

山西大学  
2007 届硕士学位论文

均匀两分量 Tonks  
气体的集体激发与稳定性

作者姓名	王志刚
指导教师	张云波 教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	玻色—爱因斯坦凝聚
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2004 年 9 月—2007 年 6 月

二〇〇七年六月

Master Thesis of Shanxi University 2007

Collective Excitations and  
Stability Analysis of Homogeneous  
Two-Component Bose Gas in Tonks Regime

<b>Student Name</b>	Wang Zhigang
<b>Supervisor</b>	Professor Zhang Yunbo
<b>Major</b>	Theoretical Physics
<b>Field of Research</b>	Bose-Einstein Condensation
<b>Department</b>	Institute of Theoretical Physics
<b>Research Duration</b>	Sept, 2004—June, 2007

June 2007

## 目 录

引 言	1
第一章 一维玻色系统理论模型简介	3
1.1 Lieb—Liniger模型	3
1.2 Tonks气体	4
1.3 Gross—Pitaevsii方程及其一维修正	5
第二章 玻色系统的集体激发	9
2.1 激发的流体力学理论	9
2.1.1 GP方程的流体力学描述和涨落方程	9
2.1.2 Tonks气体的流体力学描述和涨落方程	10
2.1.3 平均场区系统的激发	10
2.1.4 Tonks气体的激发	14
2.2 激发的微观理论	15
2.2.1 均匀系统的激发	16
2.2.2 存在外势情况下的系统激发	18
第三章 两分量玻色系统的激发与稳定性	20
3.1 两分量系统的激发	20
3.1.1 平均场区两分量系统的激发	20
3.1.2 均匀两分量Tonks气体的激发	21
3.2 系统的稳定性分析	23
3.2.1 平均场区两分量系统的稳定性	23
3.2.2 两分量Tonks系统的稳定性	25
结 论	28
参考文献	29
附 录	32
致 谢	35



## Contents

<b>Introduction</b> .....	1
<b>I A brief introduction of the theoretical models of one-dimensional Bose system</b> .....	3
1.1 Lieb—Liniger model.....	3
1.2 Tonks gas.....	4
1.3 The Gross-Pitaevskii equation and its modification in 1D.....	5
<b>II Collective excitations of Bose system</b> .....	9
2.1 Hydrodynamic theory for excitations.....	9
2.1.1 Hydrodynamic formulation of GP equation and fluctuation equations.....	9
2.1.2 Hydrodynamic formulation of Tonks system and fluctuation equations.....	10
2.1.3 Excitations in mean-field-regime system.....	10
2.2.4 Excitations in Tonks system.....	14
2.2 Microscopic theory for excitations.....	15
2.2.1 Excitations in homogeneous system.....	16
2.2.2 Excitations in trapped gas.....	18
<b>III Collective excitations and stability analysis of two-component Bose system</b> .....	20
3.1 Collective excitations of Bose system.....	20
3.1.1 Excitations of two-component system in mean-field regime .....	20
3.1.2 Excitations of homogeneous two-component system in Tonks regime .....	21
3.2 Stability Analysis .....	23
3.2.1 Stability of two-component system in mean-field regime.....	23
3.2.1 Stability of two-component system in Tonks regime.....	25
<b>Conclusion</b> .....	28
<b>References</b> .....	29
<b>Appendix</b> .....	32
<b>Acknowledgements</b> .....	35



## 摘 要

本文首先介绍一维玻色系统的理论模型，包括 Lieb—Liniger 模型以及系统处于强相互作用区时出现的费米化玻色子—Tonks 气体，并介绍描述玻色系统的 Gross-Pitaevskii 方程及其一维修正，接着总结文献中对单分量玻色系统激发主要的理论和实验工作，最后研究两分量系统的激发，并对系统的稳定性进行分析。对于两分量 Tonks 气体激发的计算，我们从系统满足的非线性含时耦合方程出发，得到方程的流体力学形式和相应的涨落方程，计算了在均匀情况下的激发谱，同时我们利用激发谱讨论系统的稳定性条件，得出与平均场区两分量系统的稳定性条件明显不同的结论：平均场区两分量系统的稳定性与相互作用常数有关，而两分量 Tonks 气体系统的稳定性则依赖于两组分的单原子质量比和密度比。

**关键词：**玻色-爱因斯坦凝聚；Tonks 气体；集体激发；稳定性

**ABSTRACT**

In this paper, we first gave a brief introduction to the theoretical models of one-dimensional Bose system, including Lieb-Liniger model and Tonks gas, which appears when the parameter  $\gamma$  approaches infinite in Lieb-Liniger model. A modified scheme for Gross-Pitaevskii equation was introduced to describe one-dimensional Bose system, then summarized the main theoretical and experimental results on excitations of single-component Bose system in literatures. The excitations and stability of two-component Bose system were investigated. To get the excitation spectra of two-component system in Tonks regime, we started from the coupled time-dependent nonlinear equations of two-component Tonks gas and formulated their hydrodynamics and the corresponding fluctuation equations. The excitation spectra in homogeneous were calculated, which enable us to analyze the stability condition of two-component system in Tonks regime, compared with that of two-component system in mean-field regime, a very different conclusion was arrived. The stability condition in mean-field regime is related to interaction constant of particles, while that in Tonks regime depends crucially on the ratio of inter-component atomic mass and density.

**Key words:** Bose-Einstein condensation; Tonks gas; collective excitations; stability

## 引言

1924年玻色和爱因斯坦在理论上预言了玻色-爱因斯坦凝聚现象(BEC),即无相互作用的玻色子在温度足够低时会凝聚到最低能量量子态上。由于实验条件的限制,直到1995年美国科罗拉多大学JILA实验室的Wieman和Cornell小组才在铷( $^{87}\text{Rb}$ )原子蒸气中第一次直接观测到了BEC。由于原子气体BEC在实验上具有很强的可控性,它很快就成为实验和理论物理学家们关注的研究对象,并作为研究各种物理现象的理想载体,在量子多体理论、量子计算、非线性物理等领域的发展非常迅速。

几十年前一维系统的研究只是“玩具”模型而没有现实对应,其中很重要的一个就是研究由具有接触相互作用的玻色子组成的一维均匀(无外势)多体系统的Lieb—Liniger模型<sup>[1]</sup>,其精确解早在六十年代就由Lieb和Liniger用Bethe Ansatz方法给出。他们发现均匀玻色气体的物理性质由一个无量纲参数 $\gamma = mg / \rho \hbar^2$ 来控制,其中 $g$ 是粒子间相互作用强度, $m$ 和 $\rho$ 分别是原子的质量和线密度。当 $\gamma \ll 1$ ,系统为弱相互作用的玻色气体,虽然在一维不会发生玻色凝聚,其元激发性质仍然和BEC类似,甚至也有预言其超流性质。对 $\gamma \gg 1$ ,系统进入强相互作用区域,而当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时得到不可穿透玻色子的Tonks—Girardeau(TG)气体<sup>[2,3]</sup>。在此区域玻色子间短程的强排斥相互作用有着和费米子泡利不相容原理同样的效果。在一维情况下可以严格证明,强相互作用的玻色和费米子多体系统之间存在一一对应的对偶关系。Lieb—Liniger模型的精确波函数,激发谱和热力学性质对任意的 $\gamma$ 都是已知的,然而关联函数的计算非常困难。在极限情况下有很多结果,但问题本身还远没有解决。基于实验技术的发展,在2004年I.Bloch组和D.S.Weiss组在实验上先后用二维光格子实现了一维玻色系统<sup>[4]</sup>,并在实验上观察到了Tonks气体——费米化的玻色原子气体,使我们可以对一维系统做更为细致的研究并对理论进行验证。我们知道Gross-Pitaevskii理论是依赖于赝势概念的长波长理论,把粒子间的短程相互作用势 $U(r)$ 用 $g\delta(r)$ 代替( $g$ 是赝势),它在描述三维玻色系统时要求是稀薄的原子气系统;而用来描述一维玻色系统时,只有系统在高密度情况下GP理论才是适用的,而且对具有排斥相互作用的玻色子在二维情况下根本就不存在赝势,这意味着GP理论在低维情况时需要修正<sup>[5]</sup>。描述Tonks气体的正是修正的一维GP方程。

在1941年Landau引入了激发的概念去解释了超流氦的性质,这是基于量子流体力学的唯象理论,定量描述了流体氦的热力学性质和输运过程。S.Stringari利用含时

GP方程的流体力学描述方法计算了束缚势场中BEC的激发模式<sup>[6,7]</sup>，这种对GP方程做线性化处理来计算激发的方法与Bogoliubov1947年提出的关于稀薄的弱相互作用玻色气体激发的微观理论等价。基本激发决定了玻色流体中密度涨落的性质，其低频部分是超流体的长波长集体激发模式，即声子。在BEC的实验中，主要是通过对囚禁势的调制来对BEC产生扰动，从而观测凝聚体形状的振荡模式来研究激发<sup>[8-11]</sup>。

对于两分量系统，由于系统中某一个或几个参数的影响，系统的平衡状态可能是两种分量均匀混合的或者处于分离状态<sup>[12]</sup>，就像水和油不能均匀混合，但水和酒精则完全可以，这也称为系统的稳定性问题。我们考虑两类系统：一类是能用平均场GP方程描述的系统，另一类是用修正的一维GP方程描述的Tonks系统。稳定性可以从不同的角度来进行分析判断，典型的方法包括能量比较方法，能量变分方法，激发谱的分析等<sup>[12-14]</sup>。

本文的结构安排如下：第一章对一维玻色系统理论模型进行简要介绍，内容主要包括Lieb—Liniger模型，Tonks气体的概念及其主要性质，并介绍描述玻色系统的Gross—Pitaevskii方程及其一维修正。第二章介绍玻色系统激发的理论工作以及相关的实验，理论部分包括流体力学理论和微观理论。第三章我们研究平均场区和Tonks—Girardeau(TG)区的两分量玻色系统的激发和稳定性。最后我们给出结论。

## 第一章 一维玻色系统理论模型简介

### 1.1 Lieb—Liniger模型

1963年 Lieb 和 Liniger 在文献[1]中研究了具有接触相互作用的玻色子组成的一维均匀(无外势)多体系统, 这样的系统模型后来被称为 Lieb—Liniger 模型。其哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N (\partial^2 / \partial x_i^2) + g \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(x_i - x_j), \quad (1.1.1)$$

其中第一项是动能项, 第二项是相互作用项,  $x_i$  和  $x_j$  为两个粒子的位置,  $g$  是相互作用常数。在周期性边界条件下, 利用 Bethe-Ansatz 方法可以对系统基态精确求解, 得到基态的单粒子能量  $\varepsilon(\rho)$  为

$$\varepsilon(\rho) = \frac{\hbar^2}{2m} \rho^2 e(\gamma), \quad (1.1.2)$$

其中无量纲参数  $\gamma = mg / \rho \hbar^2$ ,  $\rho = N / L$  是一维均匀系统的密度。在热力学极限下  $e(\gamma)$  由下面积分式决定

$$e(\gamma) = \frac{\gamma^3}{\lambda^3(\gamma)} \int_{-1}^1 g(x|\gamma) x^2 dx \quad (1.1.3)$$

上式中被积函数  $g(x|\gamma)$  以及  $\lambda(\gamma)$  满足方程

$$g(y|\gamma) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x|\gamma)}{\lambda^2 + (x-y)^2} dx \quad (1.1.4)$$

和

$$\lambda(\gamma) = \gamma \int_{-1}^1 g(x|\gamma) dx \quad (1.1.5)$$

参数  $\gamma$  是系统很重要的一个参数, 它的大小决定了系统的性质, 如图-1.1 所示, 从图中可以看出, 当  $\gamma \ll 1$  系统处于弱相互作用区时,  $e(\gamma) \approx \gamma$ , Bogoliubov 的平均场理论适用; 而当  $\gamma \gg 1$  系统处于强相互作用区时, 即所谓的 Tonks-Girardeau 区, 此时  $e(\gamma) \approx \pi^2 / 3$  趋于常数, Bogoliubov 的理论不再适用。在不同的区域, 原子气体具有完全不同的性质。在弱相互作用区, 原子气体如同量子流体一样具有长程位相相干性; 而在强相互作用区, 玻色原子与无相互作用的费米子有很多相同之处, 包括空间分布和能量。根据 (1.1.2) 式, 在两个极限区域, 系统零温基态单粒子能量  $\varepsilon(\rho)$  为

$$\varepsilon(\rho) = \begin{cases} g\rho/2 & \gamma \ll 1 \\ \pi^2 \hbar^2 \rho^2 / 6m & \gamma \gg 1 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

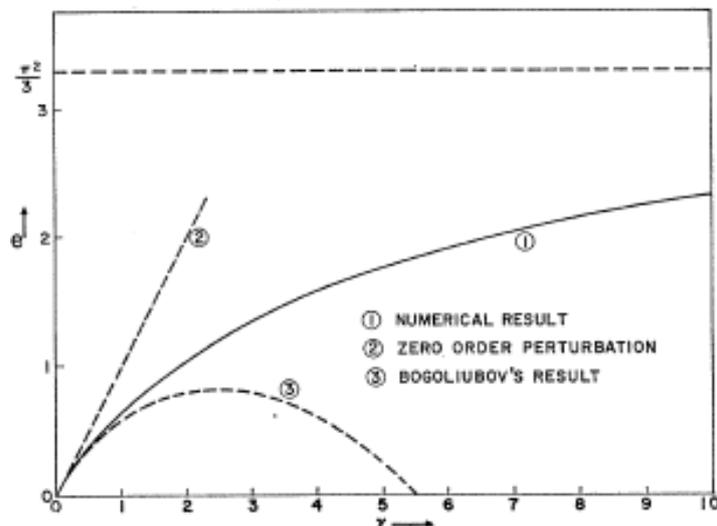


图-1.1.  $e(\gamma)$  与  $\gamma$  的变化关系曲线<sup>[1]</sup>. 曲线①是数值的结果;②是直线  $e(\gamma) = \gamma$ , 是零级近似的结果; 曲线③是 Bogoliubov 理论得到的结果. 当  $\gamma \gg 1$  时, 曲线①的渐进线是  $e(\gamma) = \pi^2/3$ .

## 1.2 Tonks 气体

Tonks 气体也叫 Tonks-Girardeau(TG)气体, 是以理论模型的提出者 L.Tonks 和 M.Girardeau 而命名的<sup>[2,3]</sup>, 它是一维系统中强相互作用的玻色原子气。在上一节介绍的 Lieb—Liniger 模型中, 系统参数  $\gamma \gg 1$  时, 系统中的原子气便可称为 Tonks 气体, 它具有很多与无相互作用的费米子相同的性质, 如图-1.2 所示, 图中  $\gamma \gg 1$  时出现了玻色子的费米化, 空间波函数分离。

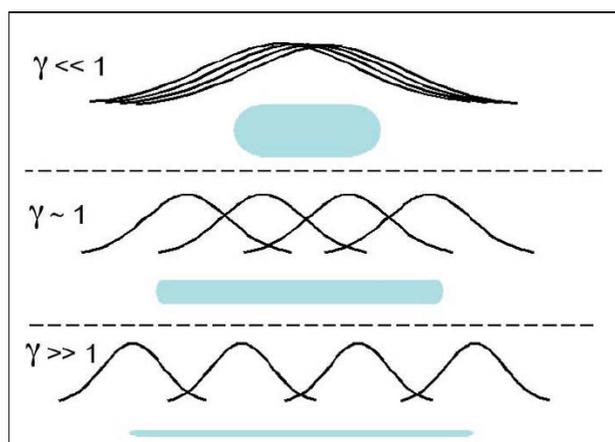


图-1.2. 玻色原子在一维系统的密度分布<sup>[4]</sup>.  $\gamma \ll 1$  时原子空间波函数趋于相同; 而  $\gamma \gg 1$  时出现了玻色子的费米化, 空间波函数分离。

Girardeau 在 1960 年的文献[2]中提到, 一维硬核玻色子等价于无相互作用的费

米子。所谓硬核是指当原子间距小于某一距离时，它们存在很强的相互作用而阻止原子靠拢，可以用波函数满足的一个边界条件来看

$$\Psi(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \text{如果} \quad |x_j - x_l| \leq a, 1 \leq j < l \leq n \quad (1.2.1)$$

这里  $x_1 \cdots x_n$  是  $n$  个粒子坐标， $a$  是硬核直径。当  $a \rightarrow 0$  时，就成了  $\delta$ -相互作用，文献[2]中正是讨论了这种  $a \rightarrow 0$  的情况。硬核玻色子与无相互作用费米子的等价关系可以用两者之间波函数的关系  $\Psi^B = A\Psi^F$  来表示， $\Psi^B$  表示玻色子波函数， $\Psi^F$  表示费米子波函数， $A(x_1 \cdots x_n) = \prod_{j>l} \text{sgn}(x_j - x_l)$ ， $|A|=1$ ，这种对应关系只在一维系统成立。通过这一关系可以知道，一维硬核玻色子系统不仅能谱与无相互作用的费米子相同，而且密度分布也是一样的，但是动量分布很不相同，因为傅立叶变换的结果依赖于波函数在不同位形空间的相对符号。

对于Tonks气体的动量分布有不少文献做了讨论。在文献[15]中，作者利用Tonks气体的玻色-费米对应关系，把Tonks气体波函数作傅立叶变换，得出在简谐势场中动量  $p$  在较大值的分布呈  $p^{-4}$  衰减的规律，并用Monte-Carlo数值方法计算了两个硬核玻色子和两个无相互作用的费米子在一维简谐势场中的动量分布，如图-1.3所示，圆圈标记玻色子的动量分布，方块标记费米子的动量分布。而后来在文献[16]中作者指出，对于Lieb—Liniger模型，动量  $p$  在较大值的分布满足  $\propto p^{-4}$  是一个普适规律，不依赖于Lieb—Liniger模型中的参数  $\gamma$ ，而Tonks气体(参数  $\gamma \rightarrow \infty$ )的大动量分布<sup>[15]</sup> 只是一个特例，并且与粒子是自由的还是在简谐势场中无关。对于Tonks气体动量较小部分的密度分布，则具有  $1/\sqrt{p}$  的峰尖特征<sup>[16,17]</sup>，如图-1.4所示，

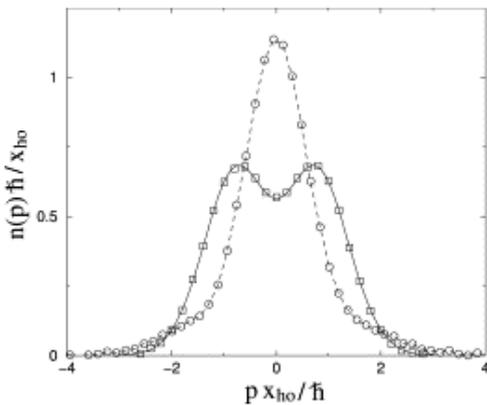


图-1.3. 两个硬核玻色子和两个无相互作用的费米子在一维简谐势场中的动量分布<sup>[15]</sup>。

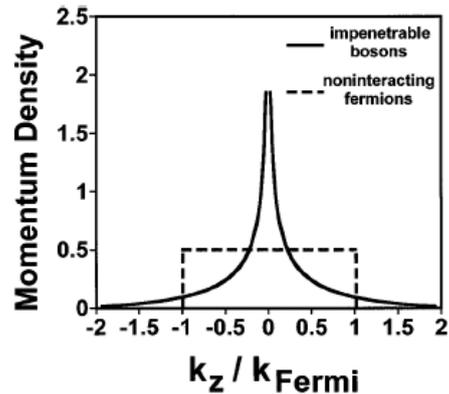


图-1.4. 硬核玻色子与无相互作用的费米子在零温时的动量分布<sup>[16]</sup>。

### 1.3. Gross-Pitaevskii方程及其一维修正

在玻色爱因斯坦凝聚体中，一般来说原子间的相互作用势是原子间距离的复杂

函数，原子间距离小时，由于电子云迭加而产生强烈的排斥力；当距离大时，则会产生由Van der Waals相互作用引起吸引力，但对于处在低温低密度的稀薄原子气体，三体碰撞几率很小，所以可以只考虑两体相互作用。在低温低密度极限下，只有在零轨道角动量态的( $l=0$ )原子散射才对整个散射振幅有贡献。在 $l=0$ 态上的原子散射称为s-波散射，其散射势可用一个等效的接触势来描述：

$$V(r_i - r_j) = U_0 \delta(r_i - r_j) , \quad (1.3.1)$$

其中 $U_0$ 是和s-波散射长度 $a_s$ 有关的相互作用常数， $r_i$ 和 $r_j$ 是两个粒子的位置。对于三维系统 $U_0 = 4\pi\hbar^2 a_s / m$ <sup>[13]</sup>，雪茄型准一维系统 $U_0 \equiv U_{1D} = -2\hbar^2 / ma_{1D}$ <sup>[18]</sup>， $a_{1D}$ 是准一维有效散射长度， $a_{1D} = -d_{\perp}^2 [1 - C(a_s / d_{\perp})] / 2a_s$ ， $d_{\perp} = \sqrt{2\hbar / m\omega_{\perp}}$ 是雪茄径向尺度， $C=1.4603$ 。对于 $d_{\perp} \gg a_s$ ， $a_{1D} \approx -d_{\perp}^2 / 2a_s$ ， $U_0$ 的正负分别代表原子之间的相互作用是排斥或者吸引。

为了解出这个多体系统的能量，采用Hartree近似或者叫平均场方法，系统波函数由系统中单粒子波函数的乘积得到。当系统处在完全凝聚的态时，所有玻色子都在相同的单粒子态 $\phi(r)$ ，因此N个粒子系统的波函数

$$\Phi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i=1}^N \phi(r_i) , \quad (1.3.2)$$

其中单粒子波函数 $\phi(r_i)$ 是归一化的

$$\int dr |\phi(r)|^2 = 1. \quad (1.3.3)$$

有效哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{P_i^2}{2m} + V(r_i) \right] + U_0 \sum_{i < j} \delta(r_i - r_j). \quad (1.3.4)$$

能量平均值

$$\begin{aligned} E &= \int \Phi^* H \Phi dr \\ &= \int \prod_{i=1}^N \phi^*(r_i) \left\{ \sum_{j=1}^N \left[ \frac{P_j^2}{2m} + V(r_j) \right] + U_0 \sum_{j < k} \delta(r_j - r_k) \right\} \prod_{l=1}^N \phi(r_l) dr_1 dr_2 \dots dr_N . \\ &= N \int dr \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(r)|^2 + V(r) |\phi(r)|^2 + \frac{(N-1)}{2} U_0 |\phi(r)|^4 \right] \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

引入凝聚态波函数

$$\Psi(r) = N^{1/2} \phi(r), \quad (1.3.6)$$

可以看出 $|\Psi(r)|^2$ 具有粒子数密度的物理意义

$$\rho(r) = |\Psi(r)|^2. \quad (1.3.7)$$

这样在忽略小量 $1/N$ 的情况下，能量平均值可以写成

$$E = \int dr \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi(r)|^2 + V(r)|\Psi(r)|^2 + \frac{1}{2}U_0|\Psi(r)|^4 \right]. \quad (1.3.8)$$

对于能量泛函(1.3.8)式，我们希望在总粒子数 $N$ 不变的约束条件下能量取得最小。约束条件是

$$N = \int dr |\Psi(r)|^2, \quad (1.3.9)$$

这是个条件极值问题，引入一个拉氏乘子 $\mu$ ，要求 $\delta E - \mu\delta N = 0$ ，显然 $\mu$ 具有化学势的物理意义。对 $\Psi^*(r)$ 进行变分，得到了关于 $\Psi(r)$ 的方程

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) + U_0|\Psi(r)|^2 \right] \Psi(r) = \mu\Psi(r). \quad (1.3.10)$$

这就是不含时GP方程。能量本征值是化学势而不是通常薛定鄂方程中的单粒子能量。还可以看出粒子所感受到的势除了外势 $V(r)$ 外还包括由其它玻色子产生的平均场而引起的非线性有效势 $U_0|\Psi(r)|^2$ 。利用 $\Psi(r,t) = \Psi(r)e^{-i\mu t/\hbar}$ ，得到含时GP方程

$$i\hbar\partial_t\Psi(r,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) + U_0|\Psi(r,t)|^2 \right] \Psi(r,t) \quad (1.3.11)$$

而相应的一维GP方程是

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) + U_{1D}|\Psi(x,t)|^2 \right] \Psi(x,t) \quad (1.3.12)$$

一维 $\delta$ -相互作用的均匀玻色系统就对应于第一节介绍的Lieb-Liniger模型。必须指出的是，在三维情况下，对低密度稀薄气体系统平均场近似才是适用的(低能散射条件才满足)；而在一维系统中 $U_{1D}$ 相同条件下，高密度才是平均场近似适用的条件(因为 $\gamma$ 中包含密度，密度越高， $\gamma$ 越小)。

V.Dunjko等曾经指出<sup>[19]</sup>，在雪茄型准一维 $\delta$ -相互作用系统中，存在三个区域：Thomas-Fermi区，Tonks-Girardeau区，和中间区域。区分这三个区域可用一个复合参数——密度 $n$ 与准一维有效散射长度 $a_{1D}$ 绝对值的乘积来表征。在轴向简谐势场中，复合参数 $n|a_{1D}| \rightarrow \infty$ ，系统精确的密度分布曲线更接近于抛物线型，这与一维Gross-Pitaevskii方程描述的系统一致，称为Thomas-Fermi区；而当 $n|a_{1D}| \rightarrow 0$ ，系统精确的密度分布曲线则更接近于抛物线的平方根型，这与后面要提到的用修正G-P方程所描述的系统一致，也就是Tonks-Girardeau区；最后就是在以上两个极限情况之间

的中间区域。由于 Lieb—Liniger 模型中的参数  $\gamma$  在这里的准一维雪茄型系统中  $\gamma = 2/n|a_{1D}|$ ，所以上面的分析还是等价于用  $\gamma$  来划分三个区。

对一维或准一维处在 Tonks-Girardeau 区的系统不能用平均场理论的 GP 方程来描述，而需要对方程进行修正。修正的 GP 方程可以从密度泛函理论得到，这一理论是在研究相互作用费米子系统的基础上发展起来的一个研究非均匀玻色气体的理论。假设在外势中包含有个  $N$  个相互作用玻色子的系统处于局域热平衡状态，在局域密度近似下，系统满足的方程类似于 Kohn-Sham 含时方程

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) + \frac{\partial[\rho\varepsilon(\rho)]}{\partial\rho} \right] \Psi(x,t), \quad (1.3.13)$$

其中  $\rho$  代表密度， $\varepsilon(\rho)$  是均匀系统中单个玻色原子的基态能量。根据 (1.1.6) 式得出，处于弱相互作用区的系统满足的是一维 Gross-Pitaevskii(GP) 方程

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) + U_{1D}\rho \right] \Psi(x,t); \quad (1.3.14)$$

而处于强相互作用的 Tonks-Girardeau 区，系统满足的方程为

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\rho^2 \right] \Psi(x,t), \quad (1.3.15)$$

这就是修正的 GP 方程，它也可根据 E.B.Kolomeisky 的理论<sup>[5,20]</sup> 得到。

按照上面平均场理论，同样可以得到两组分凝聚体系统的能量泛函<sup>[13]</sup>

$$E = \int dr \left[ \frac{\hbar^2}{2m_1} |\nabla\Psi_1|^2 + \frac{\hbar^2}{2m_2} |\nabla\Psi_2|^2 + V_1(r)|\Psi_1|^2 + V_2(r)|\Psi_2|^2 + \frac{1}{2}U_{11}|\Psi_1|^4 + \frac{1}{2}U_{22}|\Psi_2|^4 + U_{12}|\Psi_1|^2|\Psi_2|^2 \right]. \quad (1.3.16)$$

相应的动力学方程可由关系

$$i\hbar\partial_t\Psi_i(r,t) = \frac{\delta E}{\delta\Psi_i^*} \quad (1.3.17)$$

得到，结果两分量的含时 Gross-Pitaevskii 方程为

$$i\hbar\partial_t\Psi_i(r,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla^2 + V_i(r) + U_{ii}\rho_i(r,t) + U_{ij}\rho_j(r,t) \right] \Psi_i(r,t), \quad (1.3.18)$$

其中  $i, j=1, 2$  且  $i \neq j$ ，它们分别标志两种原子的质量  $m_i$ ，所受到的外势  $V_i$  和密度  $\rho_i = |\Psi_i|^2$ ， $U_{ii}$  是同种原子间相互作用常数， $U_{ij}$  是不同种原子间相互作用常数， $U_{ij} = 2\pi\hbar^2 a_{ij}/m_{ij}$ ， $m_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ ，且有  $U_{ij} = U_{ji}$ 。

## 第二章 玻色系统的集体激发

在这一章，我们将依次介绍玻色系统激发的流体力学理论和微观理论，我们将会发现流体力学理论能很有效的计算激发，不过这是在满足一定条件下才成立的理论，而微观理论则是基本理论，但是多数情况下利用它不能得到解析结果，在某些极限情况下才有解析解。

### 2.1 激发的流体力学理论

#### 2.1.1 GP方程的流体力学描述和涨落方程

这一节我们会看到GP方程用一个等价的流体力学方程来描述，方程中包括粒子密度和相位。将(1.3.11)式乘以 $\Psi^*(r,t)$ 并减去所得结果的复共轭得到

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right] = 0. \quad (2.1.1)$$

将凝聚体的波函数写为

$$\Psi(r,t) = \sqrt{\rho(r,t)} e^{i\theta(r,t)}, \quad (2.1.2)$$

$\rho$ 具有粒子数密度的意义，代入方程(2.1.1)式，由实部和虚部分别等于零，得到与含时GP方程等价的流体力学方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho \nabla \theta) \\ \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \theta)^2 - V(r) - U_0 \rho \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

在研究平衡态基本激发时，考虑对平衡态的微小偏离，定义密度涨落 $\delta\rho = \rho - \rho_0$ 和相位涨落 $\delta\theta = \theta - \theta_0$ ， $\rho_0$ 和 $\theta_0$ 分别是平衡基态的密度和相位，将涨落代入方程组(2.1.3)，并对方程线性化，我们得到密度和相位的涨落满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta\theta + \delta\rho \nabla \theta_0) \\ \hbar \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0}) - \frac{\hbar^2}{m} \nabla \theta_0 \cdot \nabla \delta\theta - U_0 \delta\rho \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

(i) 当平衡态系统处于静态时，可以证明 $\theta_0$ 的空间梯度为零，上式化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta\theta) \\ \hbar \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0}) - U_0 \delta\rho \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

本文中计算激发时都是利用这一方程。

(ii) 若平衡态不是静态系统而存在流动时, 在式(2.1.3)中  $\theta_0$  的空间梯度不为零,

但作长波近似可以舍去与长波长有关的项  $\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0})$ , 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta\theta + \delta\rho \nabla \theta_0) \\ \hbar \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{m} \nabla \theta_0 \cdot \nabla \delta\theta - U_0 \delta\rho \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

在文献[21]中, 作者正是利用这一方程研究了超冷原子物质波在一个准一维环中的干涉。

### 2.1.2 Tonks 气体的流体力学描述和涨落方程

对于一维或准一维系统处在强相互作用的Tonks-Girardeau区时, 描述系统的是修正的GP方程(1.3.15)式

$$i\hbar \partial_t \Psi(r,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(r) + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} |\Psi(r,t)|^4 \right] \Psi(r,t). \quad (2.1.8)$$

利用与前一部分同样的方法, 可以得到Tonks系统的流体力学描述, 方程(2.1.8)式可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho \nabla \theta) \\ \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{\hbar}{2m} (\nabla \theta)^2 - V(r) - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \rho^2, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

相应静态系统的密度和相位涨落方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta\theta) \\ \hbar \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0}) - \frac{\pi^2 \hbar^2}{m} \rho_0 \delta\rho, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

下面我们利用涨落方程计算均匀系统和有外势情况下系统的激发。

### 2.1.3 平均场区系统的激发

在这一节, 我们利用前面得到的涨落方程来计算由GP方程描述的均匀和不均匀静态系统的激发, 系统的涨落满足方程(2.1.5)式。

首先, 无外势的均匀系统中  $\rho_0$  是一个常数, (2.1.5)式可写为

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{m} \rho_0 \nabla^2 \left( \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla^2 \delta\rho - U_0 \delta\rho \right). \quad (2.1.11)$$

由于系统的平移对称性，其解具有平面波形式  $\delta\rho \propto e^{(iq \cdot r - i\omega t)}$ ，带入上面方程得到色散关系

$$\omega^2 = \frac{\rho_0 U_0}{m} q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m^2}, \quad (2.1.12)$$

激发谱为<sup>[13, 22]</sup>

$$\varepsilon = \sqrt{2\rho_0 U_0 \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2}, \quad (2.1.13)$$

其中  $\varepsilon_0 = \hbar^2 q^2 / 2m$  是自由粒子能量。这一关系首先是Bogoliubov用微观理论推导出来的。在长波近似下，上面的激发谱近似为声子谱，

$$\varepsilon \approx \hbar c q, \quad (2.1.14)$$

其中  $c$  是声速

$$c = \sqrt{\rho_0 U_0 / m}. \quad (2.1.15)$$

通过实验对声波在凝聚体中传播速度的测量<sup>[10]</sup>，得到的声速与理论一致，如图-2.1和图-2.2所示，两图分别是声速实验中的照片和示意图。而在短波长近似时，激发谱是

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \rho_0 U_0. \quad (2.1.16)$$

这是一个自由粒子谱加上平均场贡献构成的谱。

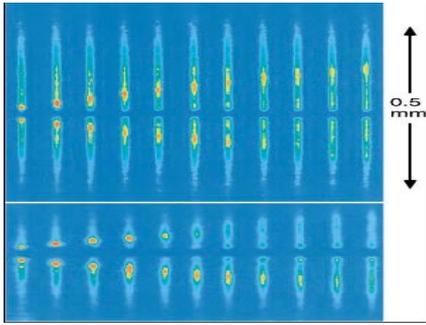


图-2.1. 声波在BEC中轴向(上)和径向(下)的传播<sup>[10]</sup>。

图片的拍摄时间间隔是1.3ms。在实验中BEC被劈开，两个波包在两个相反方向上运动。

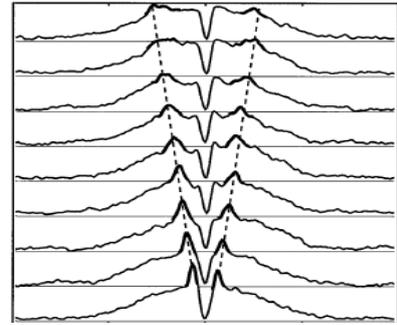


图-2.2. 图-2.1中上半部分图的横向示意图<sup>[10]</sup>，声波在BEC轴向的传播。横轴是坐标，纵轴是密度。

当加入外势后，如果系统中原子数足够多密度曲线  $\rho_0(r)$  将变的很光滑，通常

在(2.1.5)式中忽略掉  $\frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0})$  项，于是(2.1.5)式化简为

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = \frac{U_0}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta\rho). \quad (2.1.17)$$

这时平衡态密度  $\rho_0$  是空间的函数，一般可以采用 Thomas-Fermi 近似来求得密度分布

$$\rho_0(r) = \frac{\mu - V(r)}{U_0}, \quad (2.1.18)$$

$\mu$  是系统的化学势，它的值可由它与总粒子数的关系

$$\int \rho_0(r) d\tau = \int \frac{\mu - V(r)}{U_0} d\tau = N \quad (2.1.19)$$

来确定。考虑激发引起的密度涨落是随时间震荡的，具有形式  $\delta\rho \propto e^{-i\omega t}$ ，代入 (2.1.17) 式得到<sup>[6]</sup>

$$\omega^2 \delta\rho = \frac{1}{m} \{ \nabla V(r) \cdot \nabla \delta\rho - [\mu - V(r)] \nabla^2 \delta\rho \}. \quad (2.1.20)$$

下面我们讨论对于不同的外势囚禁下原子气体的激发谱。

- 首先最常见的束缚势场是三维球对称简谐势<sup>[6]</sup>

$$V(r) = m\omega_0^2 r^2 / 2. \quad (2.1.21)$$

这种情况下利用 (2.1.18) 式得化学势  $\mu = m\omega_0^2 R^2 / 2$ ， $R$  是原子云半径。代入 (2.1.20) 方程得到本征方程

$$\omega^2 \delta\rho = \omega_0^2 r \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} - \frac{\omega_0^2}{2} (R^2 - r^2) \nabla^2 \delta\rho \quad (2.1.22)$$

和本征值

$$\omega^2 = \omega_0^2 (l + 3n + 2nl + 2n^2), \quad (2.1.23)$$

其中  $l$  是球谐函数的量子数， $n$  是径向节点数，是在解超几何函数时引入的。

- 一维简谐束缚势  $V(x) = m\omega_x^2 x^2 / 2$  的情况下<sup>[23]</sup>， $\mu = m\omega_x^2 R^2 / 2$ ，代入式 (2.1.20) 中得到 Legendre 方程

$$(1 - y^2) \frac{d^2 \delta\rho}{dy^2} - 2y \frac{d\delta\rho}{dy} + \lambda \delta\rho = 0, \quad (2.1.24)$$

其中  $y = x/R$ ， $\lambda = 2\omega^2 / \omega_x^2$ 。自然边界条件要求  $\lambda = l(l+1)$ ， $l$  为整数，即得到激发频率本征值

$$\omega^2 = \omega_x^2 l(l+1) / 2. \quad (2.1.25)$$

在一维简谐势中最低的两个激发频率平方之比为  $\omega_{l=2}^2 / \omega_{l=1}^2 = 3$ （见 (2.1.25) 式），

而在准一维的情况此比值为2.5（见(2.1.34)式），在M.Henning的实验<sup>[11]</sup>中测量到最低两个激发频率平方的比值为 $\omega_B^2/\omega_D^2 \approx 3.1$ ，从而表明了一维玻色气体系统的实现。

● 同样在二维各向同性简谐势 $V(x, y) = m\omega_\rho^2 \rho^2 / 2$ 情况下<sup>[23]</sup>，对应的系统激发频率本征值

$$\omega^2 = (2n_\rho + 2n_\rho |m| + 2n_\rho + |m|) \omega_\rho^2, \quad (2.1.26)$$

$n_\rho$ 为平面上节点数， $m$ 是角动量量子数。

● 对于轴对称势<sup>[6,7]</sup>

$$V(x, y, z) = m\omega_\perp^2 r_\perp^2 / 2 + m\omega_z^2 z^2 / 2, \quad (2.1.27)$$

这里 $r_\perp^2 = x^2 + y^2$ ， $\omega_\perp$ 和 $\omega_z$ 分别是加在x-y平面上和z轴方向上的势场频率，这时由Thomas-Fermi近似

$$\rho(x, y, z) = \frac{\mu}{U_0} \left(1 - \frac{r_\perp^2}{R^2} - \frac{\lambda^2 z^2}{R^2}\right), \quad (2.1.28)$$

这里 $R$ 是x-y平面上的原子云半径，有关系式 $\mu = m\omega_\perp^2 R^2 / 2$ ，而 $\lambda = \omega_z / \omega_\perp$ ，(2.1.20)式化为

$$\omega^2 \delta\rho = \omega_\perp^2 \left(r_\perp \frac{\partial}{\partial r_\perp} + \lambda^2 z \frac{\partial}{\partial z}\right) \delta\rho - \frac{\omega_\perp^2}{2} (R^2 - r_\perp^2 - \lambda^2 z^2) \nabla^2 \delta\rho. \quad (2.1.29)$$

由于系统具有轴对称性，解方程时利用分离变量法可以把径向和轴向坐标与径向角度坐标分离，那么会有正比于 $e^{im\varphi}$ 的解， $m$ 为整数是径向角量子数。利用关系 $\nabla^2 [r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)] = 0$ ，可以验证 $\delta\rho \propto r_\perp^l Y_{l,\pm l}(\theta, \varphi)$ 和 $\delta\rho \propto r_\perp^l Y_{l,\pm(l-1)}(\theta, \varphi)$ 是方程(2.1.29)的解，其中 $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ 是球谐函数，这两个解对应的频率分别为

$$\omega^2 = l\omega_\perp^2 \quad (2.1.30)$$

和

$$\omega^2 = (l-1)\omega_\perp^2 + \omega_z^2. \quad (2.1.31)$$

当 $l=2$ 时，球谐函数 $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ 中的 $m$ 可以取 $m = \pm 2, \pm 1, 0$ ，但(2.1.30)和(2.1.31)两式没有包括 $m=0$ 所对应的频率，因此期望找到一个与径向角度 $\varphi$ 无关的解，设形式为

$$\delta\rho = a + br_\perp^2 + cz^2, \quad (2.1.32)$$

代入方程(2.1.29)，利用同次幂的项分别相等并要求常数 $a, b, c$ 无平庸解，最终得到 $\omega^2 = 0$ （表示无密度变化 $\delta\rho = 0$ ）和

$$\omega^2 = \omega_\perp^2 \left(2 + \frac{3}{2}\lambda^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16 - 16\lambda^2 + 9\lambda^4}\right). \quad (2.1.33)$$

在极限情况  $\omega_z \ll \omega_\perp$  时, 系统是准一维的雪茄形状, 方程 (2.1.29) 的本征值是

$$\omega^2 = \omega_z^2 k(k+3)/4, \quad (2.1.34)$$

$k$  是整数。在另一极限情况  $\omega_z \gg \omega_\perp$ , 系统成圆盘形, 激发频谱是

$$\omega^2 = \left( \frac{4}{3} n_r^2 + \frac{4}{3} n_r |m| + 2n_r + |m| \right) \omega_\perp^2, \quad (2.1.35)$$

$n_r$  径向节点数,  $m$  是角动量在  $z$  轴方向分量的量子数。

● 三维各向异性简谐势  $V(x, y, z) = (1/2m)(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$  情况下<sup>[7]</sup>, 密度涨落具有形式为  $\delta\rho = ax^2 + by^2 + cz^2$  的解所对应的本征频率满足方程

$$\omega^6 - 3\omega^4(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) + 8\omega^2(\omega_x^2\omega_y^2 + \omega_y^2\omega_z^2 + \omega_z^2\omega_x^2) - 20\omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2 = 0, \quad (2.1.36)$$

另外有三个密度涨落形式为  $\delta\rho = \alpha xy$ ,  $\beta yz$ ,  $\gamma xz$  的分别对应的频率  $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$ ,  $\omega_y^2 + \omega_z^2$ ,  $\omega_z^2 + \omega_x^2$ 。

#### 2.1.4. 单分量Tonks气体的激发

对于单分量Tonks系统, 满足的涨落方程是 (2.1.10) 式, 现在利用它来计算激发。

首先无外势的均匀系统  $\rho_0$  是一个常数, 其平面波解形式为  $\delta\rho \propto e^{(iq \cdot r - i\omega t)}$ , 代入 (2.1.10) 式得到色散关系

$$\omega^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m^2} \rho_0^2 q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m^2}, \quad (2.1.37)$$

从这一关系可以看出, 在长波近似下  $\omega \ll \pi \hbar \rho_0 q / m$ , 是一个声子谱, 声速  $s = \pi \hbar \rho_0 / m$  这正是文献[2]中利用Bose-Fermion Mapping求得的结果, 而在短波长近似下, 激发谱为

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \pi^2 \hbar^2 \rho_0^2 / m. \quad (2.1.38)$$

这是一个自由粒子谱加上附加能量与 (2.1.16) 式相似。

当加上简谐囚禁势  $V(x) = m\omega_x^2 x^2 / 2$  时, 利用Thomas-Fermi近似来处理平衡密度分布, 但这时密度

$$\rho_0(x) = \sqrt{\frac{2m[\mu - V(x)]}{\pi^2 \hbar^2}}. \quad (2.1.39)$$

经过一定的处理后可写成

$$\rho_0(x) = n_{\text{Tonks}}^0 \sqrt{1 - x^2 / R^2}, \quad (2.1.40)$$

其中  $n_{\text{Tonks}}^0 = 2N / \pi R$ ,  $R = \sqrt{2N\hbar / m\omega_x}$  是原子云线长度的一半。将  $\rho_0(x)$  代入涨落方程, 并考虑激发引起的密度涨落随时间震荡具有形式  $\delta\rho \propto e^{-i\omega t}$ , 我们得到<sup>[24]</sup>

$$(1-y^2)\frac{d^2\delta\rho}{dy^2}-3y\frac{d\delta\rho}{dy}+(\lambda^2-1)\delta\rho=0, \quad (2.1.41)$$

其中  $y = x/R$ ,  $\lambda = \omega/\omega_x$ 。利用费米半径处的连续性条件, 得出  $\lambda$  必须为整数, 即

$$\omega/\omega_x = n. \quad (2.1.42)$$

单分量系统在各种位形外势中激发频谱见下表。

单分量系统在各种位形外势中激发频谱表

外势位形	激发频谱
$V=0$	$\omega^2 = \frac{\rho_0 U_0}{m} q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m^2} \quad (\text{平均场区})$ $\omega^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m^2} \rho_0^2 q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m^2} \quad (\text{Tonks-Girardeau 区})$
$V(x, y, z) = m\omega_0^2 r^2 / 2$	$\omega^2 = \omega_0^2 (l + 3n + 2nl + 2n^2)$
$V(x, y) = m\omega_\rho^2 \rho^2 / 2$	$\omega^2 = (2n_\rho^2 + 2n_\rho  m  + 2n_\rho +  m ) \omega_\rho^2$ (2D 平均场)
$V(z) = m\omega_z^2 z^2 / 2$	$\omega^2 = \omega_z^2 l(l+1) / 2$ (1D 平均场) $\omega = n\omega_z$ (Tonks-Girardeau 区)
$V(x, y, z) = m\omega_\perp^2 r_\perp^2 / 2 + m\omega_z^2 z^2 / 2$	$\omega^2 = l\omega_\perp^2$ $\omega^2 = (l-1)\omega_\perp^2 + \omega_z^2$ $\omega^2 (m=0) = 2\omega_\perp^2 + \frac{3}{2}\omega_z^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16\omega_\perp^4 - 16\omega_z^2\omega_\perp^2 + 9\omega_z^4}$ $\omega^2 = \frac{1}{4}k(k+3)\omega_z^2$ (3D 雪茄型 $\omega_z \square \omega_\perp$ ) $\omega^2 = \left(\frac{4}{3}n_r^2 + \frac{4}{3}n_r  m  + 2n_r +  m \right) \omega_\perp^2$ (3D 圆盘型 $\omega_z \square \omega_\perp$ )
$V(x, y, z) = (1/2m)(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$	$\omega^6 - 3\omega^4(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) + 8\omega^2(\omega_x^2\omega_y^2 + \omega_y^2\omega_z^2 + \omega_z^2\omega_x^2) - 20\omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2 = 0$ $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2, \quad \omega_y^2 + \omega_z^2, \quad \omega_z^2 + \omega_x^2$

## 2.2. 激发的微观理论

在前面利用GP方程研究激发的时候, 波函数被当成是经典场, 在这一部分介绍Bogoliubov从量子的观点研究激发的方法<sup>[13, 22]</sup>。首先是最简单的均匀体系在零温的激发, 然后在有外势情况下的不均匀体系, 得到所谓的Bogoliubov方程。从量子的观点, 在前面提到的的哈密顿量和波函数都要变成算符形式,

$$\hat{H} = \int dr \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi^\dagger(r) \nabla^2 \Psi(r) + V(r) \Psi^\dagger(r) \Psi(r) + \frac{U_0}{2} \Psi^\dagger(r) \Psi^\dagger(r) \Psi(r) \Psi(r) \right] \quad (2.2.1)$$

其中  $\Psi^\dagger(r)$  和  $\Psi(r)$  分别表示在空间  $r$  点的玻色子产生和湮灭算符。

### 2.2.1. 均匀系统的激发

首先考虑无外势的均匀系统，下面我们将会得到与 (2.1.13) 一致的激发谱。把 (2.2.1) 式中的场算符用平面波展开，并写成零动量与非零动量产生或湮灭算符的叠加

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} a_0 + \sum_{p(p \neq 0)} \frac{e^{ip \cdot r/\hbar}}{\sqrt{V}} a_p, \quad \Psi^\dagger(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} a_0^\dagger + \sum_{p(p \neq 0)} \frac{e^{-ip \cdot r/\hbar}}{\sqrt{V}} a_p^\dagger, \quad (2.2.2)$$

其中  $a_p^\dagger$  和  $a_p$  分别代表在一个态上产生和湮灭一个动量为  $p$  的玻色子的玻色算符，满足玻色对易关系， $V$  是系统的体积。对于凝聚到零动量空间的原子数  $N_0$  很大时，利用  $a_0 |N_0\rangle = \sqrt{N_0} |N_0 - 1\rangle$  和  $a_0^\dagger |N_0\rangle = \sqrt{N_0 + 1} |N_0 + 1\rangle$ ，近似地可以把  $a_0$  和  $a_0^\dagger$  用  $\sqrt{N_0}$  来代替。而 (2.2.2) 式两个等式右边第二项看成是对基态的量子涨落  $\delta\Psi(r)$ ，把场算符写为

$$\Psi(r) = \Psi(r) + \delta\Psi(r), \quad (2.2.3)$$

$\Psi(r)$  是系统基态波函数，对于均匀体系  $\Psi = \sqrt{N_0/V}$  ( $N_0$  是凝聚到基态的粒子数)，涨落  $\delta\Psi(r)$  为小量。把 (2.2.3) 式及其共轭代入 (2.2.1) 式，保留到  $\delta\Psi$  和  $\delta\Psi^\dagger$  平方项，这样就得到

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int dr \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi + \delta\Psi^\dagger) \nabla^2 (\Psi + \delta\Psi) \right] + \frac{U_0}{2} \int dr \Psi^4 \\ + \frac{U_0}{2} \int dr \Psi^3 \left( 2\delta\Psi^\dagger + 2\delta\Psi \right) + \frac{U_0}{2} \int dr \Psi^2 \left[ (\delta\Psi)^2 + (\delta\Psi^\dagger)^2 + 4\delta\Psi^\dagger \delta\Psi \right] \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

利用涨落算符满足的关系

$$\delta\Psi(r) = \sum_{p(p \neq 0)} \frac{e^{ip \cdot r/\hbar}}{\sqrt{V}} a_p \quad \text{和} \quad \int dr \delta\Psi(r) = \int dr \delta\Psi^\dagger = 0, \quad (2.2.5)$$

哈密顿量 (2.2.4) 式可写成

$$\hat{H} = \frac{U_0 N_0^2}{2V} + \sum_{p(p \neq 0)} \left( \frac{p^2}{2m} a_p^\dagger a_p + 2U_0 n_0 a_p^\dagger a_p \right) + \frac{U_0 n_0}{2} \sum_{p(p \neq 0)} (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + a_p a_{-p}), \quad (2.2.6)$$

$n_0 = N_0/V$  是凝聚到动量为  $p=0$  的基态的粒子数密度。利用总粒子数算符

$$\hat{N} = N_0 + \sum_{p(p \neq 0)} a_p^\dagger a_p, \quad (2.2.7)$$

将(2.2.6)式中的  $N_0$  代换掉, 因为考虑的态是对零动量基态小的涨落, 我们忽略

$\sum_{p(p \neq 0)} a_p^\dagger a_p$  的平方项, 得到

$$\bar{H} = \frac{U_0 N^2}{2V} + \sum_{p(p \neq 0)} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + U_0 n_0 \right) a_p^\dagger a_p + \frac{U_0 n_0}{2} (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + a_p a_{-p}) \right], \quad (2.2.8)$$

$N$  是粒子数算符  $\bar{N}$  的平均。只对一半的动量空间求和可以将上式改成对称的形式, 得到

$$\bar{H} = \frac{U_0 N^2}{2V} + \sum_{p>0(\text{或}p<0)} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + U_0 n_0 \right) (a_p^\dagger a_p + a_{-p}^\dagger a_{-p}) + U_0 n_0 (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + a_p a_{-p}) \right]. \quad (2.2.9)$$

下面我们通过把哈密顿量(2.2.9)式对角化来得到激发谱。考察产生和湮灭算符的运动方程

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a}_p &= [a_p, \bar{H}] = \left( \frac{p^2}{2m} + U_0 n_0 \right) a_p + U_0 n_0 a_{-p}^\dagger, \\ i\hbar \dot{a}_{-p} &= [a_{-p}, \bar{H}] = \left( \frac{p^2}{2m} + U_0 n_0 \right) a_{-p} + U_0 n_0 a_p^\dagger, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

这说明可以用  $a_p$  与  $a_{-p}^\dagger$  以及  $a_{-p}$  与  $a_p^\dagger$  构成新的产生和湮灭算符, 设新算符为  $\alpha_p$  和  $\alpha_{-p}$  及它们的厄密共轭, 做正则变换

$$\alpha_p = u_p a_p + v_p a_{-p}^\dagger, \quad \alpha_{-p} = u_p a_{-p} + v_p a_p^\dagger \quad (2.2.11)$$

变换系数  $u_p$  和  $v_p$  设为实数。正则变换的要求是保证所有的对易关系形式上不变, 这是检验变换的一个重要物理条件, 要求新算符同样满足玻色对易关系

$$[\alpha_p, \alpha_p^\dagger] = \delta_{p,p}. \quad (2.2.12)$$

这样一来要求系数  $u_p$  和  $v_p$  必须满足

$$u_p^2 - v_p^2 = 1. \quad (2.2.13)$$

将(2.2.11)式的逆变换代入(2.2.9)式, 得到

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{U_0 N^2}{2V} + \sum_{p>0(\text{或}p<0)} (\alpha_p^\dagger \alpha_{-p}^\dagger + \alpha_p \alpha_{-p}) [2\zeta_p u_p v_p - U_0 n_0 (u_p^2 + v_p^2)] \\ &+ \sum_{p>0(\text{或}p<0)} (\alpha_p^\dagger \alpha_p + \alpha_{-p}^\dagger \alpha_{-p}) [\zeta_p (u_p^2 + v_p^2) - 2U_0 n_0 u_p v_p] \\ &+ \sum_{p>0(\text{或}p<0)} (2\zeta_p v_p^2 - 2U_0 n_0 u_p v_p) \end{aligned}, \quad (2.2.14)$$

其中  $\zeta_p = \varepsilon_p^0 + U_0 n_0$ ,  $\varepsilon_p^0 = p^2/2m$ 。要使上式是对角化的, 要求式中含  $\alpha_p^\dagger \alpha_{-p}^\dagger + \alpha_p \alpha_{-p}$

项的系数为零，得到等式

$$2\zeta_p u_p v_p = U_0 n_0 (u_p^2 + v_p^2). \quad (2.2.15)$$

利用 (2.2.13) 和 (2.2.15) 式得到

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_p}{\varepsilon_p} + 1 \right) \quad \text{和} \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_p}{\varepsilon_p} - 1 \right) \quad (2.2.16)$$

其中  $\varepsilon_p = \sqrt{(\varepsilon_p^0)^2 + 2\varepsilon_p^0 U_0 n_0}$ 。 (2.2.9) 式对角化后的形式为

$$\bar{H} = \frac{U_0 N^2}{2V} + \sum_{p(p \neq 0)} \varepsilon_p \alpha_p^\dagger \alpha_p - \frac{1}{2} \sum_{p(p \neq 0)} (\varepsilon_p^0 + U_0 n_0 - \varepsilon_p). \quad (2.2.17)$$

激发谱  $\varepsilon_p = \sqrt{(\varepsilon_p^0)^2 + 2\varepsilon_p^0 U_0 n_0}$  与前面用流体力学理论得到的结果完全一致。

### 2.2.2 存在外势情况下的系统激发

在这一小节介绍系统存在有外势的激发。我们不直接从哈密顿量出发，因为系统粒子数是不变的，所以选算符  $\bar{K} = \bar{H} - \mu \bar{N}$  更为方便。同 (2.1.1) 节中类似，将场算符 (2.2.3) 式及其共轭代入  $\bar{K}$  中并保留到涨落算符的二阶，得到

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \bar{H} - \mu \bar{N} \\ &= E_0 - \mu N_0 + \int dr \left( -\delta\Psi^\dagger \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \delta\Psi + [V(r) + 2U_0 |\Psi|^2 - \mu] \delta\Psi^\dagger \delta\Psi \right) \\ &\quad + \frac{U_0}{2} \left\{ \Psi^2 (\delta\Psi^\dagger)^2 + \Psi^{*2} (\delta\Psi)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

其中  $E_0$  是凝聚部分的能量。利用海森堡方程得到

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \delta\Psi}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + 2n_0(r)U_0 - \mu \right] \delta\Psi - n_0(r)U_0 \Psi^2 \delta\Psi^\dagger, \\ -i\hbar \frac{\partial \delta\Psi^\dagger}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + 2n_0(r)U_0 - \mu \right] \delta\Psi^\dagger - n_0(r)U_0 \Psi^{*2} \delta\Psi \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

这里基态波函数  $\Psi(r)$  可以取为实数，于是密度  $n_0(r) = \Psi(r)^2 = \Psi^*(r)^2$ 。做变换

$$\delta\Psi(r, t) = \sum_i \left[ \alpha_i u_i(r) e^{-i\varepsilon_i t/\hbar} - \alpha_i^\dagger v_i^*(r) e^{i\varepsilon_i t/\hbar} \right], \quad (2.2.20)$$

其中  $\alpha_i^\dagger$  和  $\alpha_i$  是在激发态  $i$  上玻色子的产生和湮灭算符，满足玻色对易关系。将 (2.2.20) 代入式 (2.2.19) 得到  $u_i(r)$  和  $v_i(r)$  满足的方程组

$$\begin{cases} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) + 2n_0(r)U_0 - \mu \right] u_i(r) - n_0(r)U_0 v_i(r) = \varepsilon_i u_i(r) \\ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) + 2n_0(r)U_0 - \mu \right] v_i(r) - n_0(r)U_0 u_i(r) = -\varepsilon_i v_i(r) \end{cases} \quad (2.2.21)$$

这就是Bogoliubov方程，这里  $u_i(r)$  和  $v_i(r)$  满足一定意义下的正交归一化条件

$$\int dr [u_i(r)u_j^*(r) - v_j^*(r)v_i(r)] = \delta_{i,j}. \quad (2.2.22)$$

将(2.2.20)式代入(2.2.18)式，算符  $K$  被对角化为

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \sum_i \varepsilon_i \alpha_i^\dagger \alpha_i + C_0 \\ C_0 &= -\sum_i \varepsilon_i \int |v(r)|^2 dr \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

其中  $\varepsilon_i$  就是激发能量。

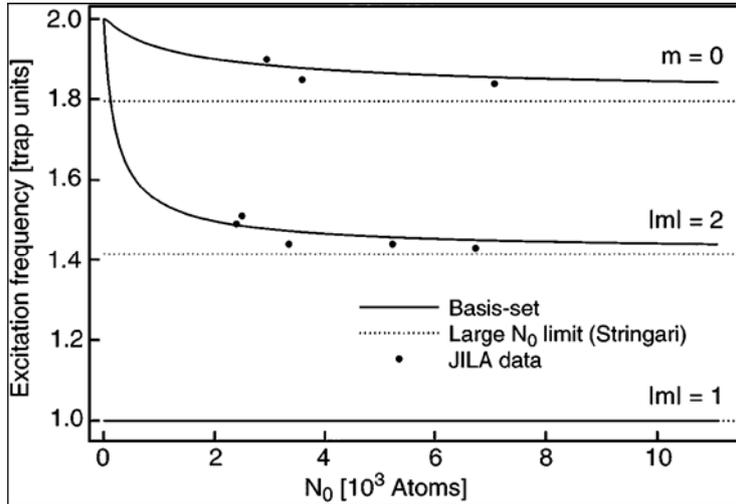


图-2.3. 系统在轴对称势情况下最低的三个激发与凝聚体原子数目的变化关系<sup>[25]</sup>。

以上关于集体激发的微观理论具有一般性，但只有在某些极限情况下才能得到解析结果。在这一章第一节所介绍的激发的流体力学理论只有当相互作用足够强而使得Thomas-Fermi近似能适用时才是有效的，这要求  $N|a|/\bar{a} \gg 1$ ，这里  $N$  是凝聚体原子数， $a$  是散射长度， $\bar{a}$  是系统尺寸(在三维各向异性简谐势中， $\bar{a}$  为简谐势各方向频率的几何平均频率  $\omega_{ho}$  对应的特征长度  $\bar{a} = (\hbar/m\omega_{ho})^{1/2}$ )。图-2.3表示的是系统在轴对称囚禁势下激发频谱与凝聚体原子数目的关系。实线是用数值方法解(2.2.21)式的结果<sup>[25]</sup>，而虚线是Thomas-Fermi近似下用流体力学理论方法得到的结果<sup>[6]</sup>，黑点是JILA实验小组的实验数据<sup>[9]</sup>。从图中可以看出，当凝聚体中原子数目足够多而使条件  $N|a|/\bar{a} \gg 1$  得以满足时，激发的流体力学理论是与实验结果相符的，而当原子数目较少时则与实验不符。

## 第三章 两分量玻色系统的激发与稳定性

在继单组分玻色原子系统的 BEC 实现以后，实验上又制备出了两分量的玻色凝聚体，对处于不同的两个超精细态上的  $^{87}\text{Rb}$  原子混合的两分量凝聚体两相的相对相位和密度的动力学人们已经进行了研究<sup>[26, 27]</sup>，两分量凝聚体的相分离和集体激发也都是人们所感兴趣的问题。前面我们已经看到单分量的处于平均场区和 Tonks 区的系统激发的计算，在这一章我们将利用流体力学描述的方法来计算两分量系统的激发，并分析系统的稳定性。

### 3.1 两分量系统的激发

#### 3.1.1 平均场区两分量系统的激发

利用与处理单分量系统相同的办法可以写出两分量 GP 方程 (1.3.18) 式的流体力学方程，进而得到两组耦合的涨落方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho_i}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m_i} \nabla \cdot (\rho_{i0} \nabla \delta \theta_i) \\ \hbar \frac{\partial \delta \theta_i}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m_i \rho_{i0}} \nabla (\rho_{i0} \nabla \frac{\delta \rho_i}{\rho_{i0}}) - U_{ii} \delta \rho_i - U_{ij} \delta \rho_j \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

其中  $i, j=1, 2$  且  $i \neq j$ 。下面利用涨落方程组 (3.1.1) 式计算两分量的激发谱。

● 先看均匀系统，同样密度涨落具有行波解  $\delta \rho_i \propto e^{i(qx - \omega t)}$ ，代入 (3.1.1) 式经过计算得到两分量均匀系统的激发谱是<sup>[12]</sup>

$$(\hbar \omega_{\pm})^2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2 + 16 \varepsilon_{10} \varepsilon_{20} \rho_{10} \rho_{20} U_{12}^2} \quad (3.1.2)$$

其中  $\varepsilon_i^2 = 2U_{ii} \rho_{i0} \varepsilon_{i0} + \varepsilon_{i0}^2$ ， $\varepsilon_{i0} = \hbar^2 q^2 / 2m_i$  是自由粒子能量， $\varepsilon_i$  是前面已经提到过的单分量均匀系统的激发模式。

● 对于加了外势场的两分量系统的激发，只有在一定特殊情况下才可能有解析解，否则需要利用数值方法。这里我们介绍三维的两种特殊情况：一种是在各向同性简谐势场中的两相完全混合没有相边界；另一种是在各向同性简谐势场中的两相完全分离，存在相边界。前一种情况根据 (3.1.1) 式，利用长波长近似和 Thomas-Fermi 近似可以得到类似单分量情况下的谱<sup>[28]</sup>

$$\omega_{\pm} = \omega_{b\pm} (2n^2 + 2nl + 3n + l)^{1/2} \quad (3.1.3)$$

这里  $\omega_{b\pm}$  是与囚禁势场频率和原子间相互作用常数有关的量。第二种情况的激发频率  $\omega$  与囚禁势场频率  $\omega_0$  满足关系<sup>[29]</sup>

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = (1-\kappa) \frac{[l(l+3/2) + (l-\omega^2/\omega_0^2)\lambda x s_1(\omega, x)][(l-\omega^2/\omega_0^2)x s_2(\omega, x) - l]}{[l(l+3/2)(\kappa-1) + x(l-\omega^2/\omega_0^2)\{\kappa\lambda s_1(\omega, x) + (l+3/2)s_2(\omega, x)\}]} \quad (3.1.4)$$

其中  $s_{1,2}(\omega, x)$  是两个超几何函数的比值,  $\kappa = \sqrt{U_{11}/U_{22}}$ ,  $\lambda = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$  是两化学势之比,  $x$  与  $\kappa$  和  $\lambda$  有关。文献[29]中作者对方程(3.1.4)做了数值处理。

### 3.1.2 均匀两分量 Tonks 气体的激发

根据密度泛函理论, 对于一维系统的能量泛函为

$$E = \int dx \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi^* \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)|\Psi|^2 + \varepsilon(\rho)|\Psi|^2 \right\}, \quad (3.1.5)$$

$\varepsilon(\rho)$  是系统无外势情况下的单粒子能量,  $\rho = |\Psi|^2$  代表密度。对于两分量的单原子质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的系统能量泛函为<sup>[30]</sup>

$$E(\Psi_1, \Psi_2) = \int dx \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Psi_1^* \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Psi_2^* \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + V_1(x)|\Psi_1|^2 + V_2(x)|\Psi_2|^2 + \varepsilon(\rho_1)|\Psi_1|^2 + \varepsilon(\rho_2)|\Psi_2|^2 + \varepsilon(\rho_1)|\Psi_2|^2 + \varepsilon(\rho_2)|\Psi_1|^2 \right\} \quad (3.1.6)$$

利用关系

$$i\hbar\partial_t\Psi_i(r, t) = \frac{\delta E}{\delta\Psi_i^*} \quad (3.1.7)$$

和 Tonks 气体对应的  $\varepsilon(\rho)$  所满足的关系

$$\varepsilon(\rho) = \frac{\pi^2\hbar^2}{6m}\rho^2, \quad (3.1.8)$$

我们可以得到两分量 Tonks 气体满足的含时耦合方程为

$$i\hbar\partial_t\Psi_i = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{d^2}{dx^2} + V_i(x) + \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_i}\rho_i^2 + \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{2\pi^2}{3}\rho_i\rho_j + \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\pi^2}{3}\rho_j^2 \right\} \Psi_i, \quad (3.1.9)$$

其中  $i, j=1, 2$  且  $i \neq j$  分别标志两种原子的质量  $m_i$ , 所受到的外势  $V_i$  和密度  $\rho_i = |\Psi_i|^2$ 。与平均场区两分量系统的耦合方程相比这里没有出现含相互作用常数的项, 而相互作用能量部分包括了同种和异种原子的贡献。通过引入

$$\Psi_i(x, t) = \sqrt{\rho_i(x, t)} e^{i\theta_i(x, t)}, \quad (3.1.10)$$

得到系统的流体力学方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_i}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m_i} \nabla \cdot (\rho_i \nabla \theta_i) \\ \hbar \frac{\partial\theta_i}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m_i\sqrt{\rho_i}} \nabla^2 \sqrt{\rho_i} - \frac{\hbar^2}{2m_i} (\nabla \theta_i)^2 - 3C_i\rho_i^2 - 2C_i\rho_i\rho_j - C_j\rho_j^2 \end{aligned}, \quad (3.1.11)$$

这里  $C_i \equiv \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\pi^2}{3}$ 。考虑在基态密度  $\rho_{i0}$  上的涨落  $\delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i0}$ ，和基态相位  $\theta_{i0}$  上的涨

落  $\delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i0}$ ，对  $\delta\rho_i$  和  $\delta\theta_i$  把方程 (3.1.11) 线性化，则涨落满足以下方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho_i}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m_i} \nabla \cdot (\rho_{i0} \nabla \delta\theta_i) \\ \hbar \frac{\partial \delta\theta_i}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m_i \rho_{i0}} \nabla \cdot (\rho_{i0} \nabla \frac{\delta\rho_i}{\rho_{i0}}) - 2C_i(3\rho_{i0} + \rho_{j0})\delta\rho_i - 2(C_i\rho_{i0} + C_j\rho_{j0})\delta\rho_j. \quad (3.1.12) \\ &\equiv -\delta\bar{\mu} \end{aligned}$$

对于没有外势的均匀体系  $\rho_{i0}$  是常数，由于系统的平移对称性，上面涨落方程的解具有平面波形式  $\delta\rho_i \propto e^{i(qx - \omega t)}$ ，带入这一形式的解，方程组 (3.1.12) 化为

$$\begin{aligned} m_i \omega^2 \delta\rho_i &= \rho_{i0} q^2 \nabla^2 \delta\bar{\mu} \\ \varepsilon^2 \delta\rho_i &= \varepsilon_i^2 \delta\rho_i + \Delta_i \delta\rho_j, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

这里

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2 &= \varepsilon_{i0} [\varepsilon_{i0} + 12\varepsilon(\rho_{i0}) + 4\varepsilon(\rho_{i0}) \frac{\rho_{j0}}{\rho_{i0}}] \\ \Delta_i &= 4\varepsilon_{i0} [\varepsilon(\rho_{i0}) + \varepsilon(\rho_{j0}) \frac{\rho_{i0}}{\rho_{j0}}] \end{aligned}, \quad (3.1.14)$$

$\varepsilon = \hbar\omega$  是激发能量， $\varepsilon_{i0} = \hbar^2 q^2 / 2m_i$  是自由粒子能量， $\varepsilon(\rho_{i0}) = \hbar^2 \pi^2 \rho_{i0}^2 / 6m_i = C_i \rho_{i0}^2$  见 (3.1.8) 式。最后我们得到方程组

$$\begin{cases} (\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2) \delta\rho_1 - \Delta_1 \delta\rho_2 = 0 \\ \Delta_2 \delta\rho_1 - (\varepsilon^2 - \varepsilon_2^2) \delta\rho_2 = 0 \end{cases}. \quad (3.1.15)$$

此方程组有非零解的条件是下列行列式为零

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon^2 - \varepsilon_1^2 & -\Delta_1 \\ \Delta_2 & -(\varepsilon^2 - \varepsilon_2^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.16)$$

这一条件给出色散关系，得到均匀情况下两分量 Tonks 系统的两支激发频谱

$$\begin{aligned} (\hbar\omega_{\pm})^2 &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2 + 64\varepsilon_{i0}\varepsilon_{20} \left[ \varepsilon^2(\rho_{10}) \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} + \varepsilon^2(\rho_{20}) \frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} + 2\varepsilon(\rho_{10})\varepsilon(\rho_{20}) \right]} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

这与平均场区均匀系统的激发谱 (3.1.2) 式相似，并且我们注意到当其中一种组分的密度占明显优势，即  $\rho_{i0} \square \rho_{j0}$  时，根据 (3.1.14) 式，能谱  $\varepsilon_i^2 \approx \pi^2 \hbar^4 \rho_{i0}^2 q^2 / m_i^2 +$

$\hbar^4 q^4 / 4m_i^2$ ，这正好是单分量情况下(2. 1. 37)式中频率对应的能谱，为单分量均匀 Tonks 气体的激发。对于两分量系统，最近人们又开始关注玻色-费米混合的激发和系统稳定性<sup>[31, 32]</sup>。

### 3.2 系统的稳定性条件

下面我们考虑两类两分量系统的稳定性：一类是处于平均场区的系统，另一类是一维 Tonks 系统。

#### 3.2.1 平均场区两分量系统的稳定性

文献中提到的有三种方法研究两分量系统的稳定性：能量比较方法，激发谱分析，能量变分方法。

首先从能量比较的角度分析。对于一个系统来说，在趋向平衡状态的过程中总是使能量尽可能的降低，从这一观点出发，可以通过对比两个状态的能量来判断哪一个更稳定<sup>[14]</sup>。对于第一类系统，两组分均匀混合的能量函数是

$$E_{unif} = \frac{U_{11}}{2} \frac{N_1^2}{V} + \frac{U_{22}}{2} \frac{N_2^2}{V} + U_{12} \frac{N_1 N_2}{V}, \quad (3.2.1)$$

而两相分离的能量函数是

$$E_{separ} = \frac{U_{11}}{2} \frac{N_1^2}{V_1} + \frac{U_{22}}{2} \frac{N_2^2}{V_2} + U_{12} \frac{N_1 N_2}{V}, \quad (3.2.2)$$

$$V_1 + V_2 = V,$$

其中  $U_{11}$ 、 $U_{22}$  和  $U_{12}$  分别是同种原子间相互作用常数和不同种原子间相互作用常数； $V_1$ 、 $V_2$  和  $V$  分别是各分量原子所占体积和系统总体积， $N_1$ 、 $N_2$  分别是各分量原子数。对于相分离的情况，力学平衡要求  $\partial E_{separ} / \partial V_1 = \partial E_{separ} / \partial V_2$ ，这样就得到关系  $U_{11}(N_1/V_1)^2 = U_{22}(N_2/V_2)^2$ ，所以

$$E_{separ} = \frac{U_{11}}{2} \frac{N_1^2}{V} + \frac{U_{22}}{2} \frac{N_2^2}{V} + \sqrt{U_{11}U_{22}} \frac{N_1 N_2}{V}. \quad (3.2.3)$$

若要求均匀的系统稳定，则要求

$$E_{separ} > E_{unif}. \quad (3.2.4)$$

比较得出稳定条件是

$$\sqrt{U_{11}U_{22}} > U_{12}. \quad (3.2.5)$$

这一条件只和原子间的相互作用常数有关。

我们再从激发谱来分析，在激发谱(3. 1. 2)式中，在长波近似  $q \rightarrow 0$  情况下

$$\varepsilon_i^2 \square 2U_{ii}\rho_{i0}\varepsilon_{i0}. \quad (3.2.6)$$

当  $\sqrt{U_{11}U_{22}} < U_{12}$  时, 频率为  $\omega_-$  的一支激发是负能量, 相应频率  $\omega_-$  为虚数, 这意味着在凝聚体上的涨落将随时间按  $e$  指数增长<sup>[33]</sup>, 均匀混合的系统就不再稳定而趋于相分离, 所以从这一角度分析, 均匀系统要稳定  $\omega_-$  是实数, 需要的条件与 (3.2.5) 式一致

$$\sqrt{U_{11}U_{22}} > U_{12}.$$

最后我们从能量变分的角度来考虑<sup>[13]</sup>, 如果系统在两组分均匀混合时候是稳定的话, 那么系统能量将会随着密度对均匀系统的偏离而增加。这里考虑密度的空间变化很小, 密度曲线足够光滑平坦那么动能项不予以考虑, 这样在能量函数中不会出现密度对空间的导数, 而只是密度的函数

$$E = \int dr \varepsilon(\rho_1(r), \rho_2(r)), \quad (3.2.7)$$

其中  $\varepsilon$  代表能量密度, 它是两个分量密度  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的函数。我们考虑能量的变化来自于两个分量密度的改变  $\delta\rho_1$  和  $\delta\rho_2$ , 能量的一阶变分  $\delta E$  应当为零, 因为每一分量粒子数是守恒的,

$$\int dr \delta\rho_i(r) = 0 \quad i=1,2. \quad (3.2.8)$$

能量二阶变分为

$$\delta^2 E = \frac{1}{2} \int dr \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1^2} (\delta\rho_1)^2 + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_2^2} (\delta\rho_2)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \delta\rho_1 \delta\rho_2. \quad (3.2.9)$$

稳定的系统能量应该是一个极小值, 这要求能量二阶变分是正定的, 得出条件

$$\partial^2 \varepsilon / \partial \rho_1^2 > 0 \quad \text{或} \quad \partial^2 \varepsilon / \partial \rho_2^2 > 0 \quad (3.2.10)$$

和

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_2^2} > \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \right)^2. \quad (3.2.11)$$

对于均匀系统忽略动能项, 能量密度为

$$\varepsilon = \rho_1^2 U_{11} / 2 + \rho_2^2 U_{22} / 2 + \rho_1 \rho_2 U_{12} \quad (3.2.12)$$

代入式 (3.2.10) 和 (3.2.11) 得到

$$U_{11} > 0 \quad \text{或} \quad U_{22} > 0 \quad (3.2.13)$$

和

$$\sqrt{U_{11}U_{22}} > U_{12}.$$

这同样与前面结论一致, 但是附加了相互作用常数为正数的条件, 为排斥相互作用。

如果  $U_{12}^2 > U_{11}U_{22}$  且两组分为吸引相互作用  $U_{12} < 0$ ，系统将会不稳定而塌缩。对于玻色子与费米子之间存在吸引相互作用的玻色-费米混合物体系的稳定性也有人进行了研究<sup>[34]</sup>。

### 3.2.2 两分量 Tonks 系统的稳定性

由于 Tonks 区与平均场区的不同，它们所对应的两分量系统稳定性条件也存在着差别，这一小结我们研究两分量 Tonks 系统的稳定性条件。

首先我们利用激发谱 (3.1.17) 式对系统的稳定性进行分析。对于式 (3.1.17) 中的  $\varepsilon_1^2$  和  $\varepsilon_2^2$ ，在长波近似下  $q \rightarrow 0$ ，忽略  $\varepsilon_{i0}$  的平方项，得到

$$\varepsilon_1^2 \approx 4\varepsilon_{10}\varepsilon(\rho_{10})(3 + \rho_{20}/\rho_{10}), \quad \varepsilon_2^2 \approx 4\varepsilon_{20}\varepsilon(\rho_{20})(3 + \rho_{10}/\rho_{20}) \quad (3.2.14)$$

如同在平均场区的分析那样，系统要稳定必须使 (3.1.17) 式中  $\omega_-^2$  正定， $\omega_-$  为实数，则要求 (3.1.17) 式根号式中的值小于  $(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2$ ，即要求

$$4\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 > 64\varepsilon_{10}\varepsilon_{20}[\varepsilon^2(\rho_{10})\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} + \varepsilon^2(\rho_{20})\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} + 2\varepsilon(\rho_{10})\varepsilon(\rho_{20})]. \quad (3.2.15)$$

利用 (3.2.14) 式，将  $\varepsilon_i^2$  的表达式代入 (3.2.15) 式，得到

$$\varepsilon(\rho_{10})\varepsilon(\rho_{20})(3 + \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}})(3 + \frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}) > [\varepsilon^2(\rho_{10})\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} + \varepsilon^2(\rho_{20})\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} + 2\varepsilon(\rho_{10})\varepsilon(\rho_{20})]. \quad (3.2.16)$$

上式可化为

$$3\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} + 3\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} - \frac{\varepsilon(\rho_{10})}{\varepsilon(\rho_{20})}\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} - \frac{\varepsilon(\rho_{20})}{\varepsilon(\rho_{10})}\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} + 8 > 0. \quad (3.2.17)$$

由  $\frac{\varepsilon(\rho_{10})}{\varepsilon(\rho_{20})} = \frac{m_2}{m_1}\frac{\rho_{10}^2}{\rho_{20}^2}$ ，经过计算上式可写成形式

$$(3 - 1/\delta)x^2 + 8x + (3 - \delta) > 0, \quad (3.2.18)$$

这里  $\delta \equiv m_1/m_2 > 0$ ， $x \equiv \rho_{10}/\rho_{20} > 0$ ，不等式 (3.2.18) 就是两相均匀混合的稳定性条件。

我们再从能量变分的角度来分析。首先，长度为  $L$  的两分量均匀 Tonks 气体系统的总能量是

$$\begin{aligned} E_h &= [\varepsilon(\rho_{10})\rho_{10} + \varepsilon(\rho_{20})\rho_{20} + \varepsilon(\rho_{10})\rho_{20} + \varepsilon(\rho_{20})\rho_{10}]L \\ &= (C_1\rho_{10}^3 + C_2\rho_{20}^3 + C_1\rho_{10}^2\rho_{20} + C_2\rho_{10}\rho_{20}^2)L \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

这里采用 Thomas-Fermi 近似舍掉了系统的动能项，其中前两项是同种原子间相互作用的贡献，后两项是异种原子间相互作用的贡献。根据变分原理，系统的稳定性条件要求

$$\frac{\partial^2 E_h}{\partial^2 \rho_{10}} \frac{\partial^2 E_h}{\partial^2 \rho_{20}} > \left( \frac{\partial^2 E_h}{\partial \rho_{10} \partial \rho_{20}} \right)^2 . \quad (3.2.20)$$

得到

$$(3 - C_1/C_2)\rho_{10}^2 + (3 - C_2/C_1)\rho_{20}^2 + 8\rho_{10}\rho_{20} > 0 \quad (3.2.21)$$

简单的计算可以将(3.2.21)式化简为

$$(3 - 1/\delta)x^2 + 8x + (3 - \delta) > 0$$

与(3.2.18)式一致。因此，从两种不同的稳定性分析方法得到了相同的系统稳定性条件，如图-3.1所示，其中两条曲线分别为

$$x_{\pm} = \frac{-4 \pm \sqrt{6 + 3(\delta + 1/\delta)}}{3 - 1/\delta} . \quad (3.2.22)$$

$x_{\pm}$  是以  $x$  为变量的方程  $(3 - 1/\delta)x^2 + 8x + (3 - \delta) = 0$  的两个根。

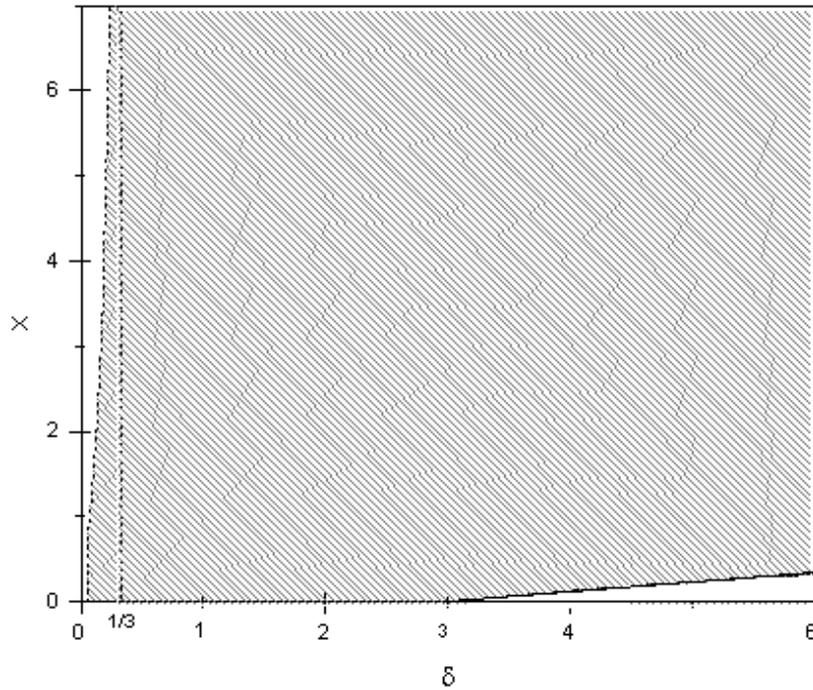


图-3.1 系统稳定区域图。图中阴影部分为稳定区域。最左边虚线

是曲线  $x_-$ ，范围在  $0 < \delta < 1/3$ ；右边实线是曲线  $x_+$ ，范围在  $\delta > 3$

从稳定区域图-3.1 中可以看出，稳定性与两组分的密度比(粒子数比)、单原子质量比都有关系。在质量比为  $0 < \delta < 1/3$  区域，密度比  $x$  满足  $x < x_-$ ，即图中  $x_-$  曲线下方的阴影部分就是系统稳定区；而在质量比  $1/3 < \delta < 3$  区域，可以看出对于任意的密度比系统总是稳定的；当质量比达到  $\delta > 3$  时，密度比  $x$  又必须满足  $x > x_+$ ，即图中在  $x_+$  曲线上方的部分是系统稳定区。图-3.1 中阴影部分给出了整个稳定区域分布。我们看到两分量 Tonks 气体在大部分参数区域可以均匀混合，而相分离只出现在质

量相差三倍以上原子混合物中。从以上的分析可以看出两分量的 Tonks 气体与平均场区的两分量系统稳定性条件明显不同，后者的稳定性条件是  $U_{11}U_{22} > U_{12}^2$ ，只与原子间相互作用常数有关系，而与两组分的密度比(粒子数比)和单原子质量比没有任何关系。

## 结 论

通过以上的介绍, 我们知道 Tonks 气体有着和无相互作用费米子很多相同之处, 比如能谱, 热力学性质, 密度分布。区别在于动量分布是很不相同的, 零温时候的费米子动量均匀分布在费米球内, 但是 Tonks 气体的动量分布并不是均匀的, 动量较大的分布程  $\propto p^{-4}$  衰减, 犹如拖着长长的尾巴, 而在小动量区域的分布又正比于  $1/\sqrt{p}$ , 动量越小的, 分布密度越大。

对于激发的计算, 在 Thomas-Fermi 近似适用的条件下, 我们看到流体力学解法是一套很好的方法, 利用它可以很方便地算出激发频谱, 而微观理论则更深入物理本质去解释物理现象。

我们利用激发的流体力学理论求解了均匀两分量 Tonks 气体的激发谱, 得到的频谱分为两支, 类似于平均场区两分量的情况。利用激发谱分析我们得到了系统的稳定性条件, 通过稳定性分析之后, 我们看到两分量 Tonks 系统的稳定性与两个组分的密度比(粒子数比)、单原子质量比有关, 这与平均场区的两分量系统稳定性条件明显不同, 后者的稳定性条件只与原子间相互作用常数有关系, 而与两组分的密度比(粒子数比)和单原子质量比没有任何关系。

**参考文献:**

- [1] LIEB E H . LINIGER W. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State[J]. *Phys Rev*, 1963, **130**: 1605-1616.
- [2] GIRARDEAU M. Relationship between System of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension[J]. *J Math Phys, (N.Y.)*1960, **1**: 516-523.
- [3] TONKS L. The Complete Equation of State of One, Two and Three-Dimensional Gases of Hard Elastic Spheres[J]. *Phys Rev*, 1936, **50**: 955-963.
- [4] KINOSHITA T, *et al.* Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas[J]. *Science*, 2004, **305**:1125.
- [5] KOLOMEISKY E B, *et al.* Low-Dimensional Bose Liquids: Beyond the Gross-Pitaevskii Approximation[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**: 1146-1149.
- [6] STRINGERI S. Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **77**: 2360-2363.
- [7] STRINGERI S. Dynamics of Bose-Einstein Condensed Gases in Highly Deformed Traps[J]. *Phys Rev A*, 1998, **58**: 2385-2388.
- [8] MEWES M –O, *et al.* Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **77**: 988-991.
- [9] JIN D S, *et al.* Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **77**: 420-423.
- [10] ANDREWS M R, *et al.* Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **79**: 553-556.
- [11] HENNING M, *et al.* Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, **91**: 250402-250405.
- [12] TIMMERMANS E. Phase Separation of Bose-Einstein Condensates[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 5718-5721.
- [13] PETHICK C J, SMITH H. *Bose-Einstein Condensation In Dilute Gases*[M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2002.
- [14] AO P, CHUI S T. Binary Bose-Einstein Condensate Mixtures in Weakly and Strongly Segregated Phases[J]. *Phys Rev A*, 1998, **58**: 4836-4840.
- [15] MINGUZZI A,. VIGNOLO P and TOSI M P. High-Momentum Tail in the Tonks Gas

- under Harmonic Confinement[J]. *Phys Lett A*, 2002, **294**: 222—226.
- [16] OLSHANII M, DUNJKO V. Short-Distance Correlation Properties of the Lieb-Liniger System and Momentum Distributions of Trapped One-Dimensional Atomic Gases[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, **91**: 090401(4).
- [17] VAIDYA H G, TRACY C A. One-Particle Reduced Density Matrix of Impenetrable Bosons in One Dimension at Zero Temperature[J]. *Phys Rev Lett*, 1978, **42**: 3-6.
- [18] OLSHANII M. Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 938-941.
- [19] DUNJKO V, *et al.* Bosons in Cigar-Shaped Traps: Thomas-Fermi Regime, Tonks-Girardeau, and In Between[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **86**: 5413-5416.
- [20] KOLOMEISKY E B, *et al.* Renormalization-Group Analysis of the Ground-State of Dilute Bose System in d Spatial Dimensions[J]. *Phys Rev B*, 1992, **46**: 11749-11756 .
- [21] CHEN S, EGGER R. Destruction of Interference by Many-Body Interactions in Cold Atomic Bose Gases[J]. *Phys Rev A*, 2003, **68**: 063605(7).
- [22] LEGGETT A J. Bose-Einstein Condensation in the Alkali Gases: Some Fundamental Concepts[J]. *Rev Mod Phys*, 2001, **73**: 307-356.
- [23] HO T L , MA M. Quasi 1 and 2d Dilute Bose Gas in Magnetic Traps: Existence of Off-Diagonal Order and Anomalous Quantum Fluctuation[J]. *J Low Temp Phys*, 1999, **115**: 61-70.
- [24] MINGUZZI A, *et al.* Hydrodynamic Excitations in a Spin-Polarized Fermi Gas under Harmonic Confinement in One Dimension[J]. *Phys Rev A*, 2001, **64**: 033605-033609.
- [25] EDWARDS M, *et al.* Collective Excitations of Atomic Bose-Einstein Condensates. *Phys Rev Lett*, 1996, **77**: 1671-1674.
- [26] HALL D S, *et al.* Dynamics of Component Separation in a Binary Mixture of Bose-Einstein Condensates. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 1539.
- [27] HALL D S, *et al.* Measurements of Relative Phase in Two-Component Bose-Einstein Condensates. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 1543.
- [28] GRAHAM R , WALLS D. Collective Excitations of Trapped Binary Mixtures of Bose-Einstein Condensed Gases[J]. *Phys Rev A*, 1996, **57**: 484-487.
- [29] SVIDZINSKY A , CHUI S T. Normal Modes and Stability of Phase-Separated

- Trapped Bose-Einstein Condensates[J]. *Phys Rev A*, 2003, **68**: 013612(12).
- [30] TANATAR B, ERKNA K. Strongly Interacting One-Dimensional Bose-Einstein Condensates in Harmonic Traps[J]. *Phys Rev A*, 2000, **62**: 053601(6).
- [31] SALASNICH L, TOIGO F. Fermi-Bose Mixture across a Feshbach Resonance. cond-mat/0701098.
- [32] SHIBATA H, *et al.* Collective Modes and Stability of Bose-Fermi Mixtures with a BCS-BEC Crossover. cond-mat/0702094.
- [33] PU H, *et al.* Collective Excitations, Metastability and Nonlinear Response of a Trapped Two-Species Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **80**: 1134-1137.
- [34] BELEMUK A M, RYZHOV V N. Stable and Unstable Regimes in Bose-Fermi Mixture with Attraction between Components. cond-mat/0612572.

## 附 录

这里我们将推导含时 GP 方程的流体力学形式及其涨落方程。含时 GP 方程为

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + U_0 |\Psi(r,t)|^2 \right] \Psi(r,t) \quad (1)$$

波函数写成形式

$$\Psi(r,t) = \sqrt{\rho(r,t)} e^{i\theta(r,t)} \quad (2)$$

代入(1)，方程左边

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} e^{i\theta} - \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} \sqrt{\rho} e^{i\theta} \quad (3)$$

右边的

$$-\nabla^2 \Psi = \left[ -\nabla^2 \sqrt{\rho} + (\nabla \theta)^2 \sqrt{\rho} - i\sqrt{\rho} \nabla^2 \theta - 2i\nabla \theta \cdot \nabla \sqrt{\rho} \right] e^{i\theta} \quad (4)$$

$$(V + U_0 |\Psi|^2) \Psi = (V + U_0 \rho) \sqrt{\rho} e^{i\theta} \quad (5)$$

由左右两边的实部虚部分别相等，得到

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} (\sqrt{\rho} \nabla^2 \theta + 2\nabla \theta \cdot \nabla \sqrt{\rho}) \quad (6)$$

$$\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \theta)^2 - V - U_0 \rho \quad (7)$$

(6)式两边同时乘以  $2\sqrt{\rho}$  可变形为

$$2\sqrt{\rho} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} 2\sqrt{\rho} (\sqrt{\rho} \nabla^2 \theta + 2\nabla \theta \cdot \nabla \sqrt{\rho})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sqrt{\rho})^2}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \left[ (\sqrt{\rho})^2 \nabla^2 \theta + 2\sqrt{\rho} \nabla \theta \cdot \nabla \sqrt{\rho} \right] \\ &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot \left[ (\sqrt{\rho})^2 \nabla \theta \right] \end{aligned}$$

上式也就是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho \nabla \theta) \quad (8)$$

因此我们得到含时 GP 方程所的流体力学形式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho \nabla \theta) \\ \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \theta)^2 - V - U_0 \rho \end{aligned} \quad (9)$$

引入涨落  $\delta\rho = \rho - \rho_0$  和  $\delta\theta = \theta - \theta_0$ ，这里  $\rho$ 、 $\rho_0$  和  $\theta$ 、 $\theta_0$  都是满足方程组(9)的。下面我们将分别由  $\rho_0$ 、 $\delta\rho$  和  $\theta_0$ 、 $\delta\theta$  表达的  $\rho$  和  $\theta$  代入(9)式来推导涨落所满足的方

程，推导过程中我们只保留到  $\delta\rho$  和  $\delta\theta$  的一次项。首先代入(9)式中第一个方程得

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho_0 + \delta\rho)}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot [(\rho_0 + \delta\rho) \nabla(\theta_0 + \delta\theta)] \\ &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \theta_0 + \rho_0 \nabla \delta\theta + \delta\rho \nabla \theta_0 + \delta\rho \nabla \delta\theta) \\ &\square -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \theta_0 + \rho_0 \nabla \delta\theta + \delta\rho \nabla \theta_0)\end{aligned}$$

由于  $\rho_0$  和  $\theta_0$  满足(9)式，所以由上式得到

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta\theta + \delta\rho \nabla \theta_0) \quad (10)$$

再看(9)式的第二个方程，

$$\hbar \frac{\partial(\theta_0 + \delta\theta)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho_0 + \delta\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0 + \delta\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} [\nabla(\theta_0 + \delta\theta)]^2 - V - U_0(\rho_0 + \delta\rho) \quad (11)$$

先看(11)式中右边第一项

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\rho_0 + \delta\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0 + \delta\rho} &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0} (1 + \delta\rho/\rho_0)^{1/2}} \nabla^2 \left[ \sqrt{\rho_0} (1 + \delta\rho/\rho_0)^{1/2} \right] \\ &\square \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) \nabla^2 \left[ \sqrt{\rho_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) \right] \\ &\square \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \left( \sqrt{\rho_0} \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) - \frac{\delta\rho}{\rho_0^{3/2}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left( \frac{\delta\rho}{\rho_0} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_0} \nabla^2 \frac{\delta\rho}{\rho_0} + 2 \nabla \sqrt{\rho_0} \cdot \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) - \frac{\delta\rho}{\rho_0^{3/2}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\rho_0}} \nabla \sqrt{\rho_0} \cdot \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \nabla^2 \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2\rho_0} \left( \sqrt{\rho_0} \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla \rho_0 \cdot \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \rho_0 \nabla^2 \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2\rho_0} \nabla \left( \rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right)\end{aligned}$$

上面的推导过程中利用了公式  $(1+x)^{\pm 1/2} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x$  (当  $x$  为小量时)。把上式代入(11)得

$$\begin{aligned}\hbar \frac{\partial(\theta_0 + \delta\theta)}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2\rho_0} \nabla \left( \rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) \right] - \frac{\hbar^2}{2m} [\nabla(\theta_0 + \delta\theta)]^2 - V - U_0(\rho_0 + \delta\rho) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \nabla^2 \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2\rho_0} \nabla \left( \rho_0 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) \right] - \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla \theta_0)^2 + 2 \nabla \theta_0 \nabla \delta\theta + (\nabla \delta\theta)^2] \\ &\quad - V - U_0(\rho_0 + \delta\rho)\end{aligned}$$

同样根据  $\rho_0$  和  $\theta_0$  满足 (9) 式, 从上面式子得到

$$\hbar \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \frac{\delta \rho}{\rho_0}) - \frac{\hbar^2}{m} \nabla \theta_0 \cdot \nabla \delta \theta - U_0 \delta \rho \quad (12)$$

因此我们得到涨落满足的一般方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta \theta + \delta \rho \nabla \theta_0) \\ \hbar \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \frac{\delta \rho}{\rho_0}) - \frac{\hbar^2}{m} \nabla \theta_0 \cdot \nabla \delta \theta - U_0 \delta \rho \end{aligned} \quad (13)$$

对于静态的系统  $\theta_0$  不是空间的函数, 涨落满足方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \delta \theta) \\ \hbar \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \frac{\delta \rho}{\rho_0}) - U_0 \delta \rho \end{aligned} \quad (14)$$

## 致 谢

值此论文完成之际，我要特别感谢我的导师张云波教授，从论文的选题，调研到最后的完成和修改，张老师都付出了艰辛的劳动。他治学严谨，做事一丝不苟，思路开阔，看待事物总是有自己独特的见解，授之以渔的师道潜移默化地教育了我。在学习、生活上，每当我遇到什么困难和问题，张老师总是热心地帮助我，使我度过了一个又一个的难关，十分有幸能做张老师的学生。

感谢在三年的硕士阶段学习中给予我无私指导和关心的梁九卿教授，聂一行教授，李卫东教授，阎维贤教授，李禄教授，李志坚教授。

感谢师兄郝亚江，杨利民，师姐程茸，郭利平，冯志芳，史惠贤，每当学习上遇到困难，总是能够得到他们热情的帮助。

感谢我的学友尹相国，薛瑞，孙晓鹏，康永强，陈刚，叶成芝，郭红梅，师弟张杰，杜磊，解海卿，张彦伟，师妹赵丽芝，范娜感谢他们为我营造宽松、融洽的学习生活氛围。

感谢山西大学为我提供良好的学习生活环境。