

山西大学
2006 届硕士学位论文

F=1 偶极旋量 BEC
在外场中的宏观量子隧穿

作者姓名	杨利民
指导教师	张云波
学科专业	理论物理
研究方向	玻色-爱因斯坦凝聚
培养单位	山西大学理论所
学习年限	2003 年 9 月—2006 年 6 月

二〇〇六年六月

Master Thesis of Shanxi University 2006

Macroscopic quantum tunneling of the dipolar spin-1 condensates under external field

Student Name	Yang Limin
Supervisor	Professor Zhang Yunbo
Major	Theoretical Physics
Field of Research	Bose-Einstein Condensation
Institute	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2003.9—2006.7

June 2006

目 录

引言	1
第一章 F=1 偶极旋量 BEC 在外场中的基态相结构	3
1.1 有偶极相互作用的F=1 旋量凝聚体模型	3
1.2 在外场中的基态结构	4
第二章 纵场下基态能的宏观量子振荡	7
2.1 自旋相干态路径积分求解基态能	6
2.2 振荡周期的估算	11
第三章 横场下最小简并能级间的宏观量子隧穿	13
3.1 有效势方法	13
3.2 基态能级劈裂的数值计算	16
结论	18
参考文献	19
附录	22
致谢	23

Contents

Introduction	1
I The ground state structure of spin-1 dipolar condensate under external field	3
1.1 F=1 dipolar condensate model.....	3
1.2 The ground state structure under external field.....	4
II Macroscopic quantum oscillation of ground state energy under longitudinal field	7
2.1 Ground state energy with spin coherent path integral.....	7
2.2 Calculation of oscillation periodic	11
III Macroscopic quantum tunneling of degenerate minima under transverse field	13
3.1 The effect potential method.....	13
3.2 The numerical evaluation of tunneling splitting.....	17
Conclusion	18
References	19
Appendix	22
Acknowledgements	23

摘 要

本文基于 $F=1$ 的偶极旋量凝聚体的模型,通过分析无外场和有外场情形下由偶极相互作用参数和自旋交换相互作用参数组成的基态相图,重点考虑加外磁场时的基态结构,并将此偶极凝聚体模型与熟知的单轴各项异性铁磁模型对应起来。对应不同的基态相区域,外加纵场时,利用自旋相干态路径积分方法计算得出基态能和有效磁矩随外磁场发生振荡;外加横场时,利用有效势方法和周期瞬子方法得到了基态能级劈裂。对于不同的凝聚体,文中给出了相应物理量的估算。

关键词 偶极旋量凝聚体;自旋相干态路径积分;有效势方法;周期瞬子

ABSTRACT

We study the macroscopic quantum tunneling of the ground state of the $F=1$ spinor condensate with dipole-dipole interaction under external magnetic fields. In different areas, using the spin coherent states path integrals method, we show that the ground state energy and the effective magnetic moment of the system exhibit an interesting macroscopic quantum oscillation (MQO) phenomenon. Tunneling between two degenerate minima are analyzed by means of an effective potential method and periodic instanton method.

KEYWORDS: dipolar interaction of spinor condensate; ground state structure; spin coherent path integral; the effective potential method; periodic instanton method

引 言

1924年玻色和爱因斯坦在理论上预言了玻色-爱因斯坦凝聚现象 (BEC)，即原子的温度足够低时，无相互作用的玻色子会在最低能量量子态上凝聚，达到可观的数量。根据量子力学中的德布罗意关系， $\lambda = h/p$ 粒子的运动速度越慢(温度越低)，其物质波的波长就越长，当温度足够低时，原子的德布罗意波长与原子之间的距离在同一量级上，此时，物质波之间通过相互作用而达到完全相同的状态，其性质由一个单原子的波函数即可描述。当温度为绝对零度时，热运动现象就消失，原子处于理想的玻色-爱因斯坦凝聚态。

由于实验条件的苛刻，直到1995年美国科罗拉多大学JILA实验室的Wireman 和 Cornell 小组在铷 ($87 Rb$) 原子蒸气中第一次直接观测到了BEC[1]。由于气态原子 BEC属于弱相互作用玻色气体，相互作用在理论上较容易处理，可以和实验结果进行对比，因此这个领域经历了爆发式的发展。

最初实验上都是利用强的磁场来囚禁BEC系统，由于原子的自旋取向绝热地跟从于强磁场，磁阱仅能捕获和控制处于一种超精细磁子能态的原子。因此，在这些磁阱囚禁实验中原子的自旋自由度被“冻结”了。1998年美国麻省理工的MIT小组首次成功采用由一束红外激光形成的光偶极势阱产生了玻色-爱因斯坦凝聚体[2]。光阱及光格子能同时捕获和控制处于所有超精细磁子能态的原子（对于他们实验中 $F = 1$ 的 ^{23}Na 原子， $f_m = 1, 0, -1$ ）。这些具有多种超精细磁子能态的原子同时实现玻色-爱因斯坦凝聚，即产生的是旋量玻色-爱因斯坦凝聚体。实验[2-5]和理论[6-8]方面都引起了人们的极大关注。

这种凝聚体是由多种超精细磁子能态的原子组成，具有内禀自由度，因而展现出丰富的物理内涵，例如自旋畴和自旋纹理[3-5, 7]。当光格子势阱足够深时，各个格点上的旋量玻色-爱因斯坦凝聚体便失去了相位相干性，而通过磁和光诱导的偶极-偶极相互作用耦合在一起。格点间的这些偶极-偶极相互作用可引起铁磁相变而导致凝聚体序列的宏观磁化[9, 10]和自旋波激发[11, 12]。

2005年实验上实现了 ^{52}Cr 原子玻色-爱因斯坦凝聚[13]，这是一个重大突破，因为铬原子(^{52}Cr)具有很大的磁矩，约 $6\mu_B$ (μ_B 为玻尔磁矩)，该凝聚体中的磁偶极-偶极相互作用达到了碱金属原子凝聚体的36倍。实验上观察到了铬原子(^{52}Cr)BEC在

膨胀时出现了形变[14]，这是由于磁偶极-偶极相互作用在简并量子气体中的长程性和磁各向异性导致的。基于以上实验事实，旋量凝聚体中偶极-偶极相互作用已经成为一种重要的相互作用，应当加以考虑。

旋量凝聚体是一个大自旋系统，可以和我们熟悉的磁性体系进行类比。磁性体系是由大量的自旋组成的，它可以是一个颗粒，也可以是体材料中的一个区域，或者是一个磁性分子团簇。一个磁性体系的性质可以借助于一些宏观的经典变量来描述。例如铁磁颗粒中的磁化强度（或磁矩） $M(r,t)$ 、反铁磁颗粒中的Neel矢量 $L(r,t)$ 、磁畴壁的矢径 $R(\xi_1, \xi_2, t)$ （ ξ_1, ξ_2 是为了描述畴壁曲面而引入的参数）。在低温下，由于自旋间很强的交换相互作用， $M(r,t)$ （或 $L(r,t)$ ）的大小为一常数，只有方向可以变化，而总磁能取决于 $M(r,t)$ （或 $L(r,t)$ ）的方向。由于磁晶各向异性或外磁场的影响，体系常常存在两个或多个能量极小方向（易磁化方向）。于是 $M(r,t)$ （或 $L(r,t)$ ）的方向可以通过隧穿势垒在这些易磁化方向之间转变。磁性宏观量子效应就是指 M, L, R 的量子隧穿或相干行为。

本文的结构安排如下：第一章引入偶极旋量凝聚体模型，分析其基态结构；第二章讨论外加纵场时，运用自旋相干态路径积分办法得出处于A区域中的基态能随外磁场发生宏观量子振荡，结合试验数据对磁场周期进行了估算；第三章考虑外加横场时，处于B区域的基态发生了宏观量子隧穿，运用有效势方法和周期瞬子方法得出了基态能级劈裂，结合相关试验数据对能级劈裂大小进行了估算；最后，对本文做出总结。

第一章 $F=1$ 偶极旋量 BEC 在外场中的基态相结构

旋量凝聚体[2, 15]在实验上的快速进展大大推动了凝聚体自旋动力学及其磁性质的研究。人们已经在实验[2]和理论[16, 17]上, 对有外场时旋量凝聚体的各种性质做了一些有意义的探索。其中, 自旋交换相互作用是主要的相互作用, 由于其它的相互作用远小于交换相互作用, 通常都被忽略了。

自从自旋这一自由度在光格子势中被释放出来后, 来源于内禀的磁偶极-偶极相互作用或场诱导的磁偶极矩[18, 19]就应当加以考虑。最初人们只考虑在不同格点间的偶极耦合, 在格点内为交换相互作用。偶极-偶极相互作用具有长程性和矢量性, 这使得偶极旋量凝聚体引起了更多的关注, 例如: 对量子系统在单势阱[20]或势阱较深的光格中[9-11]的基态结构和自旋动力学的讨论。

2005年的几个实验突破[13]已经表明, 偶极-偶极相互作用不能被忽略了。下面引入 $F=1$ 偶极旋量凝聚体模型[21], 并对其基态进行分析。

1.1 有偶极相互作用的 $F=1$ 旋量凝聚体模型

考虑零温时, 束缚在一个轴对称势中的自旋 $F=1$ 的偶极旋量凝聚体模型[21], 一般选择对称轴沿着量子化轴方向 \hat{z} 。在此模型中, 主要考虑两种相互作用项, 一种是短程碰撞相互作用, 另一种是长程磁偶极相互作用。当外加磁场为 \mathbf{B} 时, 该系统的哈密顿量二次量子化后的形式为:

$$\begin{aligned}
 H = & \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2M} + V_{ext} \right) \delta_{\alpha\beta} - g\mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_{\alpha\beta} \right] \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \\
 & + \frac{c_0}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \\
 & + \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\delta^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{F}_{\delta\gamma} \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{r}) \\
 & + \frac{c_d}{2} \iint \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left[\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\delta^\dagger(\mathbf{r}') \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{F}_{\delta\gamma} \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{r}') \right. \\
 & \left. - 3\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\delta^\dagger(\mathbf{r}') (\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{F}_{\delta\gamma} \cdot \mathbf{e}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{r}') \right]
 \end{aligned} \tag{1-1}$$

其中: $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) (\alpha = 0, \pm 1)$ 是场湮灭算符, 表示湮灭一个自旋 $F=1$ 中 $m_F = \alpha$ 分量的算符, M 是原子质量, 束缚势 V_{ext} 与自旋无关。碰撞相互作用参数 $c_0 = 4\pi\hbar^2(a_0 + 2a_2)/3M$

和 $c_2 = 4\pi\hbar^2(a_2 - a_0)/3M$ 分别代表粒子密度-密度相互作用和自旋-自旋相互作用, a_f ($f = 0$ 或 2) 是总自旋为 f 通道中的 s 波散射长度, $c_d = \mu_0 g^2 \mu_B^2 / 4\pi$ 是偶极相互作用参数 (g 是朗德因子), $\mathbf{e} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 是单位矢量, 外场 \mathbf{B} 空间均匀。

为了简化上述哈密顿量(1), 基于 $|c_2| \ll c_0, c_d \ll |c_2|$ 条件, 可以采用单模近似 (SMA) [20, 22]: $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \approx \phi(\mathbf{r})\hat{a}_\alpha$, 其中 $\phi(\mathbf{r})$ 是不依赖于自旋的空间波函数, \hat{a}_α 是表示湮灭一个 $m_F = \alpha$ 分量的湮灭算符, 去掉常数项后, 得到一个简化的哈密顿量[21]

$$H = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - g\mu_B\mathbf{B}\cdot\mathbf{L} \quad (1-2)$$

其中 $\hat{\mathbf{L}} = \hat{a}_\alpha^\dagger F_{\alpha\beta} \hat{a}_\beta$ 是总的多体角动量算符, $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$ 是 $m_F = 0$ 原子的粒子数算符, 新参量 c'_2, c'_d 变成:

$$c'_2 = (c_2/2) \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4, \quad c'_d = (c_d/4) \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 (1 - 3\cos^2\theta_e) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3,$$

其中 θ_e 是方向为 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 的极化角。

对(2)式两边除以 $|c'_2|$ 后, 得到了一个无量纲的哈密顿量:

$$H = (\pm 1 - c)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - \mathbf{B}'\cdot\mathbf{L} \quad (1-3)$$

其中 \pm 分别代表当 $c_2 > 0$ 和 $c_2 < 0$ 的情况, 新参量 $c = c'_d / |c'_2|$ 表征了偶极相互作用相对于自旋交换相互作用的强度, 此时无量纲磁场 $\mathbf{B}' = g\mu_B\mathbf{B} / |c'_2|$ 。

1.2 在外场中的基态结构

考虑 $F=1$ 偶极旋量凝聚体的基态结构, 首先是无外场[21]时对基态结构的描述: 在没有外场时, 采用单模近似 (SMA) 后系统的哈密顿量为:

$$H_{tot} = H_{sp} + H_{dd} = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) \quad (1-4)$$

利用角动量算符的性质, 定义多体角动量算符 $\hat{\mathbf{L}}^2$ 和 \hat{L}_z 的共同本征态为 $|l, m\rangle$, 本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$ 。 m 的取值范围: $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ 。 当 N 为偶数时, $l = 0, 2, 4, \dots, N$; N 为奇数时, $l = 1, 3, \dots, N$ 。 对于 $l = N$ 的大自旋系统, 由于 n_0 项中有 $1/N$ 的因子, 对于基态的贡献远小于哈密顿量 H_{tot} 中的其它项, 可以忽略, 即得到新的哈密顿量 $H_0 = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d\hat{L}_z^2$; 但对于 $l = 0$ 的情况, n_0 项将非常重要, 此时真正的基态会很明显地偏离 $|0, 0\rangle$ ($c \neq 0$)。 H_0 基态可由 $c'_2 - c'_d$ 参数平面图来说明, 如图 1 所示:

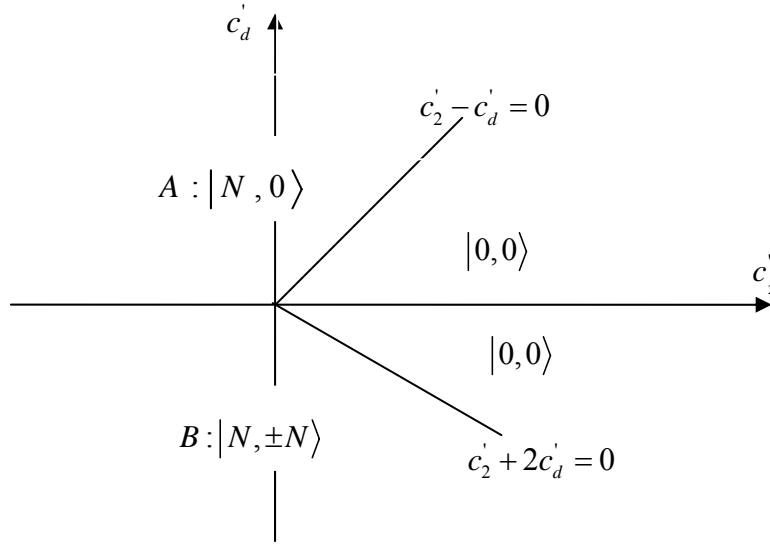


图 1 无外场时基态量子相图

对于哈密顿量： $H_0 = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d\hat{L}_z^2$ ，在其本征态 $|l, m\rangle$ 下，

$$\hat{\mathbf{L}}^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle \quad \hat{L}_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle \quad (1-5)$$

分析可得：在区域 A ($c'_d > 0, c'_d > c'_2$)，其基态为 $G = |N, 0\rangle$ ；在区域 B ($c'_d < 0, c'_d < -c'_2/2$)，其基态为 $G = |N, \pm N\rangle$ ，代表所有的粒子占据 $m_F = 1$ 或 $m_F = -1$ 态。在这两个区域，由于 \hat{n}_0 项有 $\frac{1}{N}$ 的因子而远小于其它项，故可以忽略不计。在区域 C，此时 \hat{n}_0 项不能被忽略了，其基态为 $G = \sum_l g_l |l, 0\rangle$ 其系数 g_l 与 c 有关，它是当 $\langle \hat{L}_z \rangle = 0$ 时的不同角动量态的迭加态。

考虑有外场情况下，此时的系统哈密顿 $H = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - g\mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$ ，其和无外场时的哈密顿量 H_{tor} 相比，多一个 $-g\mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$ 项，它是一个常数项，不会改变基态量子相图的区域分布。此时系统的基态在 $c'_2 - c'_d$ 参数平面上也分成三个相同的区域 A, B, C。如图二所示：

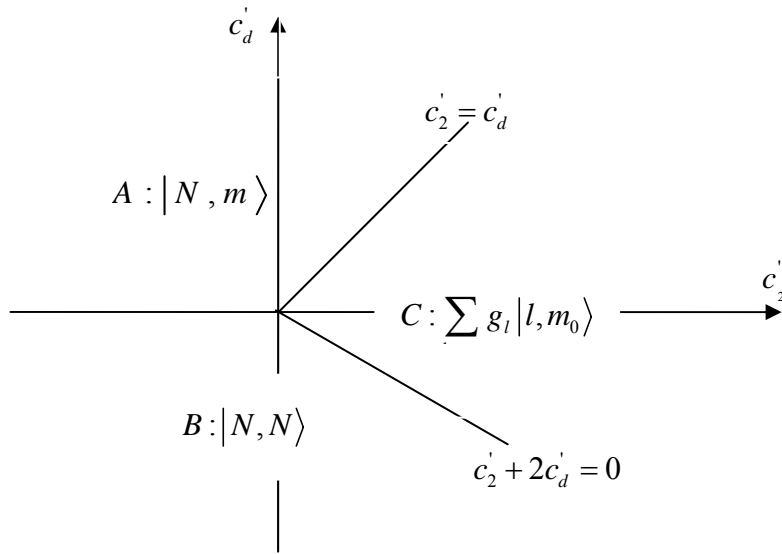


图 2 有外场时基态量子相图

先考虑给系统加一个纵向场，即沿着 z 轴 ($\theta = 0$) 方向。哈密顿量为：

$$H = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - g\mu_B BL_z \quad (1-6)$$

在区域 A ($c'_d > 0, c'_d > c'_2$)，在本征态 $|l, m\rangle$ 下，(6) 可对角化，其基态是 $G = |N, m\rangle$ ， m 的取值线性的依赖于外场强度。此时的系统模型可对应于 x - y 平面为易磁化平面的铁磁易平面各向异性模型；在区域 B ($c'_d < 0, c'_d < -c'_2/2$)，外场的出现消除了两重简并，使得原子达到完全极化态 $G = |N, N\rangle$ 。在区域 A 和 B 中，由于 \hat{n}_0 项有 $1/N$ 的因子而远小于其它项，可忽略。在区域 C， \hat{n}_0 项不可忽略，其基态 $G = \sum_{l \geq m_0} g_l |l, m_0\rangle$ ，其中 m_0 随外场增强而增加。

当加横场即外磁场沿 x 轴时，哈密顿量为：

$$H = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - g\mu_B BL_x \quad (1-7)$$

在区域 A，系统对应于 X - Y 为易平面的各向异性磁系统，凝聚体的基态完全极化，为 $G = |N, 0\rangle$ 。在区域 B，基态为 $G = \sum_m g_m |N, m\rangle$ ，是二重简并的，此种状况将会出现磁的宏观量子隧穿。在区域 C，台阶状的磁化曲线将会出现，每一个台阶意味着破坏了一个自旋单态对 [23]。

下面将上述模型中的两种作为磁隧穿现象加以研究，一种是加纵场时的区域 A，另一种是加横场时的区域 B。从以上分析可知，偶极旋量凝聚体提供了另一个研究宏观量子现象的平台。

第二章 纵场下基态能的宏观量子振荡

对于纵场下的区域 A，我们可将此偶极旋量凝聚体模型对应到铁磁各向异性模型，此时横向的 X-Y 平面对应于易磁化平面，在哈密顿量 $H = (\pm 1 - c)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{L}$ 中去掉不重要的 \hat{n}_0 项和常数项 $\hat{\mathbf{L}}^2$ 后，得到有效哈密顿量：

$$H_{LA} = 3c\hat{L}_z^2 - B'\hat{L}_z \quad (2-1)$$

其中 $c > 0$ ，此模型类似于单轴各向异性铁磁粒子模型[24, 25]，其易平面和磁场都沿着难磁化轴（z 轴）。

此模型的哈密顿量在 \hat{L}_z 的本征态 $|m\rangle$ 下即可完全对角化，得到本征值 $E_{LA} = 3cm^2 - B'm$ ，其中 $m = -N, -N+1, \dots, N-1, N$ 。下面我们用自旋相干态路径积分来求基态能。

2.1 自旋相干态路径积分求解基态能

对自旋系统有一种可以直接计算初态和末态为相干态的跃迁，这就是自旋相干态路径积分[27, 28]。根据构造相干态的一般步骤，我们首先引入自旋相干态的群结构，即通常的 SU(2) 对易关系：

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] = \pm \hat{S}_\pm, \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_z \quad (2-2)$$

SU(2) 的 Hilbert 空间是 $(2S+1)$ 维的，它的基矢是 $|S, M\rangle$ ， $M = \{-S, \dots, S\}$ 。自旋相干态 $|n\rangle$ 可以看作从态 $|S, S\rangle$ 旋转而得到的量子化轴为 \mathbf{n} 的态，

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}} |n\rangle = S |n\rangle \quad (2-3)$$

如果 $n = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ，定义自旋相干态：

$$|n\rangle = e^{-i\phi\hat{S}_x} e^{-i\theta\hat{S}_y} e^{-i\chi\hat{S}_z} |S, S\rangle \quad \text{或} \quad |n\rangle = e^{-i\theta\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{S}}} |S, S\rangle \quad (2-4)$$

其中 $m = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ ，考虑到此系统的原子数 $N \gg 1$ ，将配分函数表示为一个自旋相干态路径积分的形式：

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H_{LA}) = \int D\{\mu(n)\} \exp(-S_E) \quad (2-5)$$

其中 $D\{\mu(n)\} = \prod_{k=1}^{N-1} d\phi_k d\theta_k N \sin \theta_k / 2\pi$ 为测度，将配分函数写为初末态跃迁形式：

$$Z = \langle n(T) | \exp(-i2TH) | n(-T) \rangle = \langle n(T) | (\exp(-i\varepsilon H))^M | n(-T) \rangle \quad (2-6)$$

插入自旋相干态超完备基 $\int d\mu(n) |n\rangle \langle n| = 1$ 可得：

$$Z = \int \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} d\mu(n) \right\} \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} [\langle n_k | \exp(-i\varepsilon H) | n_{k-1} \rangle] \right\} \quad (2-7)$$

取其中的一个传播子进行计算，即：

$$\begin{aligned} \langle n_k | \exp(-i\varepsilon H) | n_{k-1} \rangle &= \langle n_k | 1 - i\varepsilon H | n_{k-1} \rangle \\ &= \langle n_k | n_{k-1} \rangle - i\varepsilon \langle n_k | H | n_{k-1} \rangle \end{aligned} \quad (2-8)$$

其中： $H = K\hat{L}_z^2 - g\mu_B B\hat{L}_z$ ($K = 3c_d'$)，可知 $H = |c_2'| H_{LA}$ ，将此哈密顿量带入可得：

$$\langle n_k | H | n_{k-1} \rangle = K \langle n_k | \hat{L}_z^2 | n_{k-1} \rangle - g\mu_B B \langle n_k | \hat{L}_z | n_{k-1} \rangle \quad (2-9)$$

利用已知的自旋相干态二阶和一阶项的相关结果，即：

$$\langle n_k | \hat{L}_z^2 | n_{k-1} \rangle = L(L - \frac{1}{2}) \cos^2(\theta) + \frac{L}{2} + i\delta\theta g_{z2}(\theta, \phi) + i\delta\phi f_{z2}(\theta, \phi) \quad (2-10)$$

其中 $g_{z2}(\theta, \phi)$ ， $f_{z2}(\theta, \phi)$ 分别为：

$$\begin{aligned} g_{z2}(\theta, \phi) &= iL(L - \frac{1}{2}) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ f_{z2}(\theta, \phi) &= L^2(\cos(\theta) - 1)(L \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta)) + L(L - \frac{1}{2}) \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ \langle n_k | \hat{L}_z | n_{k-1} \rangle &= L \cos(\theta) - \frac{L}{2} \sin(\theta) \delta\theta + iL(L \cos(\theta)(\cos(\theta) - 1) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta)) \delta\phi \end{aligned} \quad (2-11)$$

略去小量 $\delta\phi$ ， $\delta\theta$ ，把 (10) (11) 代入 (9) 得到：

$$\begin{aligned} \langle n_k | H | n_{k-1} \rangle &= K(L(L - \frac{1}{2}) \cos^2(\theta) + \frac{L}{2}) - g\mu_B BL \cos(\theta) \\ \langle n_k | n_{k-1} \rangle &= 1 - iL(1 - \cos(\theta)) \delta\phi \end{aligned} \quad (2-12)$$

将 (12) 式代入 (8) 式得到传播子：

$$\begin{aligned} \langle n_k | \exp(-i\varepsilon H) | n_{k-1} \rangle &= 1 - iL(1 - \cos(\theta)) \delta\phi - i\varepsilon(KL^2(1 - \frac{1}{2L}) \cos^2(\theta) + \frac{KL}{2} - g\mu_B BL \cos(\theta)) \\ &= \exp\{-iL(1 - \cos(\theta)) \delta\phi - i\varepsilon[(KL^2) \cos^2(\theta) + \frac{KL}{2} \sin^2(\theta) - g\mu_B BL \cos(\theta)]\} \end{aligned}$$

将上式代入 (7) 式，则配分函数为：

$$\begin{aligned}
Z &= \int \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} d\mu(n) \right\} \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} [\langle n_k | \exp(-i\varepsilon H) | n_{k-1} \rangle] \right\} \\
&= \int \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} d\mu(n) \right\} \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^{M-1} \left[L(1 - \cos(\theta)) \delta\phi \right] + \varepsilon \left(KL(L - \frac{1}{2}) \cos^2(\theta) + \frac{KL}{2} - g\mu_B BL \cos(\theta) \right) \right\} \\
&= \int \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} d\mu(n) \right\} \exp \left\{ -i \int \left[L(1 - \cos(\theta)) \dot{\phi} + KL^2 \cos^2(\theta) + \frac{KL}{2} \sin^2(\theta) - g\mu_B BL \cos(\theta) \right] dt \right\} \\
&= \int \left\{ \prod_{k=1}^{M-1} d\mu(n) \right\} \exp \left\{ -\int \left[iL(1 - \cos(\theta)) \dot{\phi} + KL^2 \cos^2(\theta) + \frac{KL}{2} \sin^2(\theta) - g\mu_B BL \cos(\theta) \right] d\tau \right\}
\end{aligned}$$

对照 (5) 式, 得到:

$$S_E = \int d\tau [iL(1 - \cos(\theta)) \dot{\phi} + KL^2 \cos^2(\theta) + \frac{KL}{2} \sin^2(\theta) - g\mu_B BL \cos(\theta)]$$

考虑到 $L \gg 1$

$$\rightarrow S_E = \int_0^{\beta\hbar} d\tau [iL(1 - \cos(\theta)) \dot{\phi} + KL(L+1) \cos^2(\theta) - g\mu_B BL \cos(\theta)] \quad (2-13)$$

其中 $\beta = 1/k_B T$, k_B 是玻尔兹曼常数, T 是温度。要解得拉式量, 将配分函数中的

$\cos(\theta)$ 积分掉即可:

$$\begin{aligned}
Z &= \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(L \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) \exp \left\{ -\int_0^{\beta\hbar} d\tau [iL(1 - \cos(\theta)) \dot{\phi}' + KL(L+1) \cos^2(\theta) - g\mu_B BL \cos(\theta)] \right\} \\
&= \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(L \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) \exp \left\{ -\int_0^{\beta\hbar} d\tau \left\{ KL(L+1) \left[\cos^2 \theta - \frac{iL\dot{\phi}' + g\mu_B BL}{KL(L+1)} \cos \theta - \left(\frac{iL\dot{\phi}' + g\mu_B BL}{2KL(L+1)} \right)^2 \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(iL\dot{\phi}' + g\mu_B BL)^2}{4L(L+1)} + iL\dot{\phi}' \right\} \right\} d(\cos \theta_k) \\
&= \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(L \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) \exp \left\{ -\int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(iL\dot{\phi}' - \frac{(iL\dot{\phi}' + g\mu_B BL)^2}{4L(L+1)} \right) \right\} \times \\
&\quad \exp \left\{ -\beta\hbar KL(L+1) \left[\cos(\theta) - \frac{iL\dot{\phi}' + g\mu_B BL}{2KL(L+1)} \right]^2 \right\} d(\cos \theta_k) \\
&= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta\hbar KL(L+1)}} \right)^{M-1} \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(L \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) \exp \left\{ -\int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(iL\dot{\phi} - \frac{(iL\dot{\phi} + g\mu_B BL)^2}{4KL(L+1)} \right) \right\} \\
&= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta\hbar KL(L+1)}} \right)^{M-1} \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(L \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) \exp \left\{ -\int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{(L\dot{\phi})^2}{4KL(L+1)} - \frac{ig\mu_B BL}{2K(L+1)} \dot{\phi} + iL\dot{\phi} - \frac{(g\mu_B BL)^2}{4KL(L+1)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

抛掉常数项后, 我们得到了拉式量:

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{(L\dot{\phi})^2}{4KL(L+1)} - \frac{ig\mu_B BL}{2K(L+1)}\dot{\phi} + iL\dot{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{4K} + i(L - \frac{g\mu_B B}{2K})\dot{\phi} \\ &= \frac{m\dot{\phi}^2}{2} + i\Theta\dot{\phi} \end{aligned} \quad (2-14)$$

其中 $m_{eff} = 1/6c$ 为有效质量， $\Theta = L(1 - g\mu_B B/2KL)$ ，在此系统中角动量 $L = N$ ，即为粒子数。为了最小化欧拉作用量 S_E ，需要找到在边界条件 $\phi_n(\tau + \beta) = \phi_n + 2\pi n$ 下的周期瞬子解。

利用欧拉-拉格朗日方程，我们得到：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \ell}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial \ell}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow m\dot{\phi} + i\Theta = C \Rightarrow \phi = \frac{C - i\Theta}{m}\tau \quad (2-15)$$

设 $x = C - i\Theta/m$ ，则 $\phi = x\tau$ 。

利用周期边界条件： $\phi_n(\tau + \beta) = \phi_n(\tau) + 2\pi n$ ，将上面的结果代入，得：

$$x(\tau + \beta) = x\tau + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{2\pi n}{\beta} \rightarrow \phi_n = \frac{2\pi n}{\beta}\tau \quad (2-16)$$

在此解下，利用以上所求的拉式量 ℓ 和边界条件下 ϕ_n 的表达式，得出欧拉作用量为：

$$\begin{aligned} S_E &= \int_0^\beta \ell d\tau = \int_0^\beta \left(\frac{m\dot{\phi}^2}{2} + i\Theta\dot{\phi} \right) d\tau = \int_0^\beta \left[\frac{m}{2} \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + i\Theta \frac{2\pi n}{\beta} \right] d\tau \\ &= \left[\frac{2m\pi^2 n^2}{\beta^2} + i\Theta \frac{2\pi n}{\beta} \right] \beta = \frac{\pi^2 n^2}{K\beta} + i\Theta 2\pi n = S_0 n^2 + i2\pi n\Theta \end{aligned} \quad (2-17)$$

其中 $S_0 = \pi^2 k_B T / K$ 。将其代入配分函数的定义式可得到：

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \Theta_3[\pi\Theta, \exp(-S_0)] \quad (2-18)$$

其中 $\Theta_3(v, q)$ 是随着 v 振荡的雅可比 theta 函数。（注：关于雅可比 theta 函数可参阅附录）

利用雅可比 theta 函数的渐近性性质，得到有外场 \mathbf{B} 时的基态能：

$$E_0 = -k_B T \ln Z = -\frac{(B')^2}{12c} + \frac{1}{2m_{eff}} \{ \Theta \}^2 \quad (2-19)$$

式中 $\{ \{x\} \}$ 表示取 x 的小数部分取最近的整数。此基态能随着 Θ 的取值不同而发生

振荡。对于磁矩的影响可由下式得出： $\partial M / \partial B = -k_B T \partial^2 \ln Z / \partial B^2$ ，在零温时近似表示为：

$$\frac{\partial M}{\partial B} \approx \frac{(g\mu_B)^2}{6c'_d} + \frac{1}{2} g\mu_B (1 + (-1)^{\{x\}}) \quad (2-20)$$

其中 $\{x\}$ 表示 x 的整数部分取最近的整数，零温时的磁化曲线呈阶梯状，这是由于有效磁矩的宏观量子振荡引起的，振荡周期依赖于偶极相互作用强度

$$\delta B = 6c'_d / g\mu_B。$$

2.2 振荡周期的估算

对于不同的凝聚体，我们估算了对应的磁场振荡周期，介绍如下：

由第一章内容我们知，偶极相互作用参数 $c_d = \mu_0 g^2 \mu_B^2 / 4\pi$ ，其中 $\mu_0 / 4\pi = 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ ，玻尔磁子 $\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{A} \cdot \text{m}$ ，可知 c_d 的量纲是 $\text{N} \cdot \text{m}^4$ 。

参数： $c'_d = \frac{c_d}{4} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 \frac{(1 - 3\cos^2 \theta_e)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ ，运用量纲分析可知 c'_d 的量纲是

$\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ 是一个能量单位。

参量 $c = c'_d / |c'_2|$ 表征了偶极相互作用相对于自旋交换相互作用的强度，其表达式可写为[21]：

$$c = \frac{c'_d}{|c'_2|} = \frac{2\pi c_d \chi(\kappa)}{3c_2} \quad (2-21)$$

其中 $\chi(\kappa)$ 是随着凝聚体方向率 κ 单调增长的函数，其取值范围： $\chi(\kappa) \in [-1, 2]$ ，为计算方便起见，取 $\chi(\kappa) = 1$ 。

已知 c'_2 ， c_2 ， c_d 的表达式分别为：

$$\begin{aligned} c'_2 &= \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 = \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} \rho^2(r) = \frac{c_2}{2} N\rho \\ c_2 &= 4\pi\hbar^2 (a_2 - a_0) / 3M \quad c_d = \mu_0 g^2 \mu_B^2 / 4\pi \end{aligned} \quad (2-22)$$

其中 N 为凝聚体粒子数， ρ 为粒子数密度。其中 a_f ($f = 0$ 或 2) 是总自旋为 f 通道中的 s 波散射长度。

将 (22) 代入 (21) 式中, 可得 $c'_d = \frac{\pi c_d}{3} N \rho$, 进一步可得 $\delta B = \frac{6c'_d}{g\mu_B}$ 。

对应于不同的凝聚体, δB 的估算总结为下表:

注: 其中 ^{23}Na , ^{87}Rb , ^{52}Cr 原子凝聚体粒子数, 密度数据分别来自 [29], [1], [13]。

^{52}Cr 原子凝聚体中偶极相互作用于 ^{23}Na , ^{87}Rb 凝聚体不同, 为:

$$c_d = \mu_0 \mu_m^2 / 4\pi, \quad \text{其中 } \mu_m = 6\mu_B$$

三种原子凝聚体各项参数表

\	粒 子 数 N	密 度 (cm^{-3})	a_0	a_2	$c_2(\text{J} \cdot \text{m}^3)$	$c_d(\text{J} \cdot \text{m}^3)$	$c'_d(\text{J})$	$\delta B(\text{Gs})$
^{23}Na	5×10^5	10^{14}	$50a_B$	$55a_B$	3.19×10^{-52}	2.15×10^{-54}	1.12×10^{-28}	1.4
^{87}Rb	2×10^4	2.6×10^{12}	$101.8a_B$	$100.4a_B$	2.3×10^{-53}	2.15×10^{-54}	1.17×10^{-31}	1.5×10^{-3}
^{52}Cr	5×10^4	10^{14}				3.09×10^{-52}	1.62×10^{-27}	10.5

第三章 横场下最小简并能级间的宏观量子隧穿

加横场即外场沿 x 轴时，讨论系统在区域 B 中的行为。去掉常数项后，得到有效哈密顿量：

$$H_{TB} = -3d\hat{L}_z^2 - B'\hat{L}_x \quad (3-1)$$

其中 $d = |c|$ ，此模型对应于易轴各向异性铁磁自旋模型，此自旋隧穿模型已经被广泛的研究。

为了得到此能级劈裂的解析解，用有效势方法[26]，可将此自旋系统对应到单粒子系统，用周期瞬子方法得到结果。

3.1 有效势方法

有效势方法是乌克兰人 V. V. Ulyanov 和 O. B. Zaslavskii 首先发展起来的[26]，用来处理小自旋系统。这种方法基于精确的自旋-坐标对应关系，通过将自旋系统 Hamiltonian 约化为连续变量的微分方程，巧妙地避免了大 S 近似。

对应于文中的模型，其有效哈密顿量由上可知 (1) 为： $H_{TB} = -3d\hat{L}_z^2 - B'\hat{L}_x$ 根据薛定谔方程： $H\psi = E\psi$ ，对于此自旋系统，可取波函数： $|\psi\rangle = \sum_m C_m |l, m\rangle$ ，

其中 $\{|l, m\rangle\}$ 是一组完备基。将 (1) 式中的哈密顿量代入本征方程，得：

$$\left[-3d\hat{L}_z^2 - \frac{B'}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \right] \sum_m C_m |l, m\rangle = E \sum_m C_m |l, m\rangle \quad (3-2)$$

其中 $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$ ， $\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$ ，利用角动量关系式：

$$\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (3-3)$$

利用 (3) 式结果，代入 (2) 式后得：

$$2 \sum_m C_m (E + 3dm^2) |l, m\rangle + \sum_m C_m B' \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle + \sum_m C_m \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle = 0 \quad (3-4)$$

对 (4) 式左乘 $\langle l, m' |$ ，在此自旋系统中，角动量 $l = N$ 和粒子数有关，可得：

$$2(E + 3dm^2)C_m + B' \sqrt{(N-m)(N+m+1)}C_{m+1} + B' \sqrt{(N+m)(N-m+1)}C_{m-1} = 0 \quad (3-5)$$

引入生成函数：
$$\Phi = \sum_{m=-N}^N \frac{C_m}{\sqrt{(N-m)!(N+m)!}} \exp(mx) \quad (3-6)$$

对 (5) 式乘以 $\frac{\exp(mx)}{\sqrt{(N-m)!(N+m)!}}$ 因子，并对所有的 m 求和，得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N 2(E + 3dm^2) \frac{C_m \exp(mx)}{\sqrt{(N-m)!(N+m)!}} + \sum_{m=-N}^N B' \sqrt{(N-m)(N+m+1)} \frac{C_{m+1} \exp(mx)}{\sqrt{(N-m)!(N+m)!}} \\ & + \sum_{m=-N}^N B' \sqrt{(N+m)(N-m+1)} \frac{C_{m-1} \exp(mx)}{\sqrt{(N-m)!(N+m)!}} = 0 \\ \rightarrow & \sum_{m=-N}^N 2(E + 3dm^2) \frac{C_m \exp(mx)}{\sqrt{(N-m)!(N+m)!}} + \sum_{m=-N}^N B' \frac{C_{m+1} \exp((m+1)x)}{\sqrt{(N-m-1)!(N+m+1)!}} (N+m+1) \exp(-x) \\ & + \sum_{m=-N}^N B' \frac{C_{m-1} \exp((m-1)x)}{\sqrt{(N-m+1)!(N+m-1)!}} (N-m+1) \exp(x) = 0 \end{aligned}$$

应用前面引入的生成函数 (6)，得到下面的方程：

$$\rightarrow E\Phi + 3d\Phi'' + \frac{B'}{2}(N-m)\exp(x)\Phi + \frac{B'}{2}(N+m)\exp(-x)\Phi = 0 \quad (3-7)$$

利用双曲函数的定义：

$$\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sinh(x), \quad \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \cosh(x)$$

上式变为：

$$3d\Phi'' - B' \sinh(x)\Phi' + (E + B'N \cosh(x))\Phi = 0 \quad (3-8)$$

定义一个新函数：
$$\Psi = \Phi \exp\left(-\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right) \quad (\text{设 } \alpha = 3d)$$

由上式可知：
$$\Phi = \Psi \exp\left(\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right)$$
，对其求一阶，二阶导数可得：

$$\Phi' = \Psi' \exp\left(\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right) + \Psi \exp\left(\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right) \frac{B'}{2\alpha} \sinh(x) \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' = & \Psi'' \exp\left(\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right) + \Psi' \exp\left(\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right) \frac{B'}{\alpha} \sinh(x) \\ & + \Psi \exp\left(\frac{B'}{2\alpha} \cosh x\right) \left\{ \left(\frac{B'}{2\alpha} \sinh(x)\right)^2 + \frac{B'}{2\alpha} \cosh(x) \right\} \end{aligned} \quad (3-10)$$

将上述 (9)、(10) 表达式代入 (8) 式得:

$$\alpha\Psi'' + \left\{ E - \frac{B'^2}{4\alpha} \sinh^2(x) + B' \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \right\} \Psi = 0, \text{ 进一步可写成:}$$

$$\left\{ -\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[\frac{B'^2}{4\alpha} \sinh^2(x) - B' \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \right] \right\} \Psi = E\Psi \quad (3-11)$$

对应于系统的本征值方程: $\hat{H}\Psi = E\Psi$

$$\text{对应得到哈密顿量: } \hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[\frac{B'^2}{4\alpha} \sinh^2(x) - B' \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \right]$$

这样就将一个自旋问题可约化为一个质量为 $m = 1/2\alpha$ 的赝粒子在坐标空间中的等效势场

$$U(x) = \frac{B'^2}{4\alpha} \sinh^2(x) - B' \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \text{ 中运动的问题。}$$

$$\text{由 (11) 式可知: } \alpha\Psi'' + \left\{ E - \frac{B'^2}{4\alpha} \sinh^2(x) + B' \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \right\} \Psi = 0$$

将此式两边同除以 $3dN^2$ 可得:

$$\frac{\alpha}{3dN^2} \Psi'' + \left\{ \frac{E}{3dN^2} - \frac{B'^2}{4\alpha 3dN^2} \sinh^2(x) + \frac{B'}{3dN^2} \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \right\} \Psi = 0 \quad (3-12)$$

有前面的已知条件 $\alpha = 3d$, 进一步得到:

$$N^{-2} \Psi'' + \left\{ \frac{E}{3dN^2} - \frac{B'^2}{36d^2 N^2} \sinh^2(x) + \frac{B'}{3dN^2} \left(N + \frac{1}{2} \right) \cosh(x) \right\} \Psi = 0 \quad (3-13)$$

考虑到 $N \gg 1$, 并设定参数: $\kappa = E/3dN^2$, $a = B'/6dN$, 可将 (13) 式化为:

$$\begin{aligned} N^{-2} \Psi'' + \{ \kappa - a^2 \sinh^2(x) + a \cosh(x) \} \Psi &= 0 \\ \rightarrow N^{-2} \Psi'' + \Psi \{ \kappa - (a \cosh(x) - 1)^2 + a^2 + 1 \} &= 0 \end{aligned} \quad (3-14)$$

对于 (14) 中的势函数 $U = (a \cosh(x) - 1)^2 - a^2 - 1$ 作一下平移调整得到新势函数

$U = (a \cosh(x) - 1)^2 - a^2$, 则 (14) 式可写成:

$$N^{-2} \psi'' + \psi(\kappa - U) = 0 \quad (3-15)$$

其中参数 κ 描述的是一个无量纲的能量 $\kappa = E/3dN^2$ ， $U = (a \cosh x - 1)^2 - a^2$ 表示一个有效势阱，其中。在 (15) 式中， N^{-1} 可看成是普朗克常数 \hbar 。当 $a < 1$ 时势 U 为双势阱。

对于 $0 \leq B' \leq 6dN$ 时，两个最小能分别局域在 $r_- = \arcsin(B'/6dN)$ 和 $r_+ = \pi - \theta_-$ ，其中角度 r 是角动量 \hat{L} 和 z 轴的夹角。当 $B' \geq B'_{sat=6dN}$ 时，简并将被解除，此时的系统被外场完全极化，两个最小能将沿着 x 轴方向合并。但从量子力学的角度上讲，由于此简并态间存在有宏观量子隧穿，简并态将会在外场到达 B'_{sat} 前解除，出现能级分裂 ΔE_0 。

$$\Delta E_0 = \sqrt{\hbar\omega/\pi C} \exp(-S/\hbar) \quad (3-16)$$

其中 S_E 的轨迹是从左势阱的最小值 $x_- = -\cosh^{-1}(1/a)$ 演化到右势阱的最小值 $x_+ = \cosh^{-1}(1/a)$ 。 ω 是在粒子在两势阱底部 x_{\pm} 附近的小振子频率。瞬子轨道的渐进形式决定了常数 C 和 $q = C^2/\hbar\omega$ ，对于这样一个势 U 可得：

$S_E = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right) - \sqrt{1-a^2}$ ，加上前置因子得到最后的能级劈裂表达式为：

$$\Delta E_0 = \frac{24d}{\sqrt{\pi}} N^{3/2} \frac{(1-a^2)^{5/4} a^{2N}}{(1+\sqrt{1-a^2})^{2N}} \exp[(2S_E N + 1)1 - a^2] \quad (3-17)$$

3.2 基态能级劈裂的数值计算

关于基态能在不同凝聚体中估算，对应于我们的模型： $H_{TB} = -3d\hat{L}_z - B'\hat{L}_x$

其中： $a = B'/6dN$ ，取值范围： $a \in [0,1]$

由 (17) 得到基态能级劈裂，接下来要计算

$$d = |c| \left| \frac{c'_d}{c'_2} \right|, \quad \text{其中 } c'_2 = \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 \quad (c_2 = 4\pi\hbar^2(a_2 - a_0)/3M)$$

为计算方便，在 (1) 是两边都乘以 $|c'_2|$ ，得到新的基态能级劈裂： $\Delta E'_0$

第三章 横场下最小简并能级间的宏观量子隧穿

$$\begin{aligned} \Delta E'_0 &= \frac{24|c'_d|}{\sqrt{\pi}} N^{3/2} \frac{(1-a^2)^{5/4} a^{2N}}{(1+\sqrt{1-a^2})^{2N}} \exp[(2S_E N + 1)1 - a^2] \\ &= \left(8\sqrt{\pi} c'_d \rho N^{5/2}\right) \frac{(1-a^2)^{5/4} a^{2N}}{(1+\sqrt{1-a^2})^{2N}} \exp[(2S_E N + 1)1 - a^2] \end{aligned} \quad (3-18)$$

单位之间的换算关系：

$$1J = 1.51 \times 10^{33} \text{ Hz}, \quad 1\text{Hz} = 4.49 \times 10^{-11} \text{ K}$$

对于各类原子凝聚体的基态能级劈裂 $\Delta E'_0$ 估算见下表：

	$c'_d(\text{Hz})$	a	N	$\Delta E'_0(\text{Hz})$
^{23}Na	1.69×10^5	$a = 0.6$	33	4.34×10^5
			38	1.14×10^2
^{87}Rb	1.76×10^2		27	2.15×10^5
			31	3.13×10^2
^{52}Cr	2.44×10^6		35	2.33×10^5
			39	3.15×10^2

由 (18) 式看出中随着粒子数 N 的增加，能级劈裂衰减很快。

结 论

本文基于零温时 $F=1$ 偶极旋量凝聚体模型，分析了该系统在无外场和有外场两种情况下的基态量子相图，结合铁磁模型，重点分析了外加纵场和横场时，处于基态相图不同区域的性质，得到一些有意义的结果。计算结果表明：在加纵场时区域 A 内，得出基态能随 $\Theta = L(1 - B'/6CL)$ 振荡（ Θ 与总自旋有关），对不同的凝聚体中磁场振荡周期做出了估算，结果表明 ^{52}Cr 原子凝聚体的周期较 ^{23}Na ， ^{87}Rb 凝聚体大；加横场时的区域 B 内，由于宏观量子隧穿，计算得到基态能级劈裂 ΔE_0 ，在不同的凝聚体中，对有限数量的粒子数做出了估算。

参考文献

- [1] ANDERSON M H, *et. al.* Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor [J]. *Science*, 1995, **269**: 198-201.
- [2] STAMPER D M, ANDREWS M R, *et. al.* Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate [J]. *Phy Rev Lett*, 1998, **80**: 2027-2030.
- [3] STENGER J, *et. al.* Spin Domains in Ground-state Bose-Einstein Condensate[J]. *Nature* (London), 1998, **396**: 345-348.
- [4] MIESNER H J, STAMPER KURN D M, *et. al.* Observation of Metastable States in Spinor Bose-Einstein Condensates. *Phys Rev Lett*, 1999, **82**: 2228-2231.
- [5] STAMPER KURN D M, MIESNER H J, *et. al.* Quantum Tunneling across Spin Domains in a Bose-Einstein Condensate [J]. *Phys Rev Lett*, 1999, **83**: 661-665
- [6] HO T L. Spinor Bose Condensates in Optical Traps [J]. *Phy Rev Lett*, 1998, **81**: 742-745.
- [7] OHMI T and MACHIDA K. Bose-Einstein Condensation with Internal Degree of Freedom in Alkali Atom Gases [J]. *J Phys Soc Jpn*, 1998, **67**:1822-1825.
- [8] LAW C K, PU H and BIGELOW N P. Quantum Spins Mixing in Spinor Bose-Einstein Condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 5257-5261.
- [9] PU H, ZHANG W P and MEYSTRE P. Ferromagnetism in a Lattice of Bose-Einstein Condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **87**: 140405.
- [10] GROSS K, SEARCH C P, PU H, *et. al.* Magnetism in a Lattice of Spinor Bose-Einstein Condensates [J]. *Phys Rev A*, 2002, **66**: 033603.
- [11] ZHANG W P, PU H, SEARCH C and MEYSTRE P. Spin Waves in a Bose-Einstein-Condensed Atomic Spin Chain [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, **88**: 060401.
- [12] XIE ZHENG WEI, ZHANG WEIPING, CHUI S T and LIU W M. *Phys Rev A*, 2004, **69**:053609.
- [13] GRIESMAIER A, WERNER J, *et. al.* Bose-Einstein Condensation of Chromium [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **94**: 160401.
- [14] STUHLER J, GRIESMAIER A, *et. al.* Observation of Dipole-Dipole Interaction in a Degenerate Quantum Gas [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **95**:150406.

- [15] BARRET M D, SAUER J A and CHAPMAN M S. All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **87**: 010404.
- [16] PU H, RAGHAVAN S and BIGELOW N P. Manipulating Spinor Condensates with Magnetic Fields: Stochastization, Metastability, and Dynamical Spin Localization [J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**: 023602.
- [17] KOASHI M and UEDA M. Exact Eigenstates and Magnetic Response of Spin-1 and Spin-2 Bose-Einstein Condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**: 1066-1069.
- [18] Yi S and You L. Trapped Atomic Condensates with Anisotropic Interactions [J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**: 041604; Yi S, You L. Trapped Condensates of Atoms with Dipole Interactions [J]. *Phys Rev A*, 2001, **63**: 053607.
- [19] GÓRAL K, RZAZEWSKI K, PFAU T. Bose-Einstein condensation with Magnetic Dipole-dipole Forces [J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**: 051601.
- [20] CHENG R, LIANG J Q and ZHANG Y B. Dynamics of Dipolar Spinor Condensates [J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 2005, **38**:2569-2578.
- [21] YI S, YOU L and PU H. Quantum Phases of Dipolar Spinor Condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **93**: 040403.
- [22] YI S, MÜ STECAPHOĞLU Ö E, SUN C P and YOU L. Single-mode Approximation in a Spinor-1 Atomic Condensate [J]. *Phys Rev A*, 2002, **66**: 011601.
- [23] BUSSMAN K, *et. al.* Switching of Vertical Giant Magnetoresistance Devices by Current through the Device [J]. *Appl Phys Lett*, 1999, **75**, 2476-2478.
- [24] GARG A. Dissipation and Interference Effects in Macroscopic Magnetization Tunneling and Coherence [J]. *Phys Rev B*, 1993, **51**: 15161-15169.
- [25] KOU S P, LIANG J Q, ZHANG Y B and PU F C. Macroscopic Quantum Coherence in Mesoscopic Ferromagnetic Systems [J]. *Phys Rev B*, 1999, **59**: 11792-11800.
- [26] ULYANOV V V and ZASTAVSKII O B. New Methods in the Theory of Quantum Spin Systems [J]. *Phys Rep*, 1992, **216**:179-251.
- [27] KLAUDER J. Path Integrals and Stationary-phase Approximations [J], *Phys Rev D*, 1979, **19**:2349-2356.
- [28] FRADKIN E. Field Theories of Condensed Matter System. Addison-Wesley, Redwood City, 1991, p. 48.
- [29] DAVIS K B, MEWES M O, *et. al.* Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium

参考文献

Atoms [J], *Phys Rev Lett*, 1995, **75**: 3969-3973.

附录

雅可比 theta 函数的定义:

$$\nu_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2niz}$$

其展开式为:

$$\nu_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz) = 1 + 2q \cos(2z) + 2q^4 \cos(4z) + 2q^9 \cos(6z) \cdots$$

在文中配分函数可表示成:

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-S_E}$$

由文中的计算知: $S_E = S_0 n^2 + i2\pi n\Theta$

将其代入到上面的配分函数得:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-S_E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(S_0 n^2 + i2\pi n\Theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-S_0})^{n^2} e^{i2\pi n\Theta} \\ &= \nu_3(\pi\Theta, e^{-S_0}) \end{aligned}$$

雅可比 theta 函数 $\nu_3(\pi\Theta, e^{-S_0})$ 会随着 Θ 而振荡。

致 谢

致 谢

值此论文完成之际，我要特别感谢我的导师张云波教授，从论文的选题，调研到最后的完成和修改，张老师都付出了艰辛的劳动。他治学严谨，做事一丝不苟，思路开阔，看待事物总是有自己独特的见解，授之以渔的师道潜移默化地教育了我。生活上，每当我遇到什么困难和问题，张老师总是热心地帮助我，使我度过了一个又一个的难关，十分有幸能做张老师的学生。

感谢在三年的硕士阶段学习中给予我无私指导和关心的梁九卿教授，李德明教授，刘文森教授，阎维贤教授，赖云忠教授，李卫东教授，聂一行教授，李禄教授。

感谢师兄郝亚江和师姐程茸，每当遇到学习上的困难，总是少不了烦劳二位博士。感谢我七年的同窗好友张永平和张存喜，他们陪我度过了风风雨雨，在我伤心失望的时候鼓励我，帮助我，我为我能有这样的患难之交而庆幸不已。

感谢我的学友郭利平，贾欣燕，徐卫平，史慧贤，冯志芳，苏晋，王路云，吕竞伟，李军奇和二位师弟尹相国，王志刚，感谢他们为我营造宽松、融洽的学习生活氛围。

感谢山西大学为我提供良好的学习生活环境。