

山 西 大 学

2009 届硕士研究生学位论文

双势阱中 Tonks-Girardeau 气体的约瑟夫森  
效应研究

|      |                        |
|------|------------------------|
| 姓 名  | 张彦伟                    |
| 指导教师 | 张云波 教授                 |
| 学科专业 | 凝聚态物理                  |
| 研究方向 | 玻色-爱因斯坦凝聚              |
| 培养单位 | 理论物理研究所                |
| 学习年限 | 2006 年 9 月——2009 年 6 月 |

二〇〇九年六月

Dissertation for the Master's Degree  
of Shanxi University in 2009

# The Josephson Effects of Tonks-Girardeau Gas in a Double-Well Potential

|                          |                                  |
|--------------------------|----------------------------------|
| <b>Name</b>              | Zhang Yanwei                     |
| <b>Supervisor</b>        | Professor Zhang Yunbo            |
| <b>Major</b>             | Theoretical Physics              |
| <b>Field of Research</b> | Bose-Einstein Condensation       |
| <b>Department</b>        | Institute of Theoretical Physics |
| <b>Research Duration</b> | September, 2006—June, 2009       |

June, 2009

## 目 录

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 引 言.....                              | 1  |
| 第一章 稀薄冷原子气体简介.....                    | 3  |
| 1.1 Gross-Pitaevskii方程.....           | 3  |
| 1.2 Tonks-Girardeau气体.....            | 3  |
| 1.3 玻色约瑟夫森效应.....                     | 7  |
| 第二章 两模玻色爱因斯坦凝聚.....                   | 9  |
| 2.1 光晶格中玻色爱因斯坦凝聚.....                 | 9  |
| 2.1.1 玻色哈伯德模型.....                    | 9  |
| 2.1.2 Spekkens-Sipe模型.....            | 11 |
| 2.2 双势阱中玻色爱因斯坦凝聚.....                 | 12 |
| 2.1.3 标准的两模模型.....                    | 12 |
| 2.1.4 改进的两模模型.....                    | 15 |
| 2.3 含时双势阱中凝聚体的动力学.....                | 20 |
| 第三章 双势阱中Tonks-Girardeau气体的动力学.....    | 22 |
| 3.1 不含时双势阱中Tonks-Girardeau气体的动力学..... | 22 |
| 3.1.1 理论模型.....                       | 22 |
| 3.1.2 结果与讨论.....                      | 25 |
| 3.2 含时双势阱中Tonks-Girardeau气体的动力学.....  | 26 |
| 总结与展望.....                            | 29 |
| 参考文献.....                             | 30 |
| 附 录.....                              | 33 |
| 致 谢.....                              | 36 |

## Contents

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction</b> .....   | 1  |
| <b>Chapter 1 A brief introduction to the dilute cold atomic gases</b> .....       | 3  |
| 1.1 Gross-Pitaevskii equation .....   | 3  |
| 1.2 Tonks-Girardeau gas.....  | 5  |
| 1.3 Bose-Josephson effects.....   | 7  |
| <b>Chapter 2 Two-mode Bose-Einstein condensates</b> .....                         | 9  |
| 2.1 Bose-Einstein condensates in optical lattices.....                            | 9  |
| 2.1.1 Bose-Hubbard Model.....   | 9  |
| 2.1.2 Spekkens-Sipe Model.....  | 11 |
| 2.2 Bose-Einstein condensates in double-well potential.....                       | 12 |
| 2.2.1 Standard two-mode model.....  | 12 |
| 2.2.2 Improved two-mode model.....  | 15 |
| 2.3 Dynamics in time-dependent potential.....                                     | 20 |
| <b>Chapter 3 Dynamics of Tonks-Girardeau gas in a double-well potential</b> ..... | 22 |
| 3.1 Time-independent dynamics.....  | 22 |
| 3.1.1 Theoretical model.....  | 22 |
| 3.1.2 Results and discussion.....   | 25 |
| 3.2 Time-dependent dynamics.....  | 26 |
| <b>Summary and outlook</b> .....  | 29 |
| <b>References</b> .....   | 30 |
| <b>Appendix</b> .....   | 33 |
| <b>Acknowledgements</b> .....   | 36 |

## 中 文 摘 要

本文首先介绍了描述弱相互作用玻色系统的 Gross-Pitaevskii 方程, Tonks-Girardeau 气体的物理性质, 并介绍了玻色爱因斯坦凝聚体中典型的约瑟夫森效应。接着我们讨论了四个描述玻色系统的两模模型, 以及它们之间的物理关系, 并讨论了含时外势阱中玻色原子的隧穿动力学。利用一维修正的 Gross-Pitaevskii 方程, 我们研究了处于 Tonks-Girardeau 气体区的原子在双阱中的动力学特性, 给出了发生约瑟夫森隧穿与宏观量子自俘的判据, 并且讨论了 Tonks-Girardeau 气体在含时外阱中的动力学行为, 得到了与先前弱相互作用玻色爱因斯坦凝聚体明显不同的物理结论。

关键词: 玻色爱因斯坦凝聚; Tonks-Girardeau 气体; 约瑟夫森效应

**ABSTRACT**

We first give a brief introduction to the physical properties of cold atoms, including the Gross-Pitaevskii equation for dilute Bose gases, the strongly interacting Tonks-Girardeau gas, and the Josephson effect with Bose-Einstein Condensates. Four models describing the two-mode Bose condensates are examined carefully and we find some exact correspondence between them. With a modified scheme for the Gross-Pitaevskii equation in one-dimensional system, we study the tunneling dynamics of the Tonks-Girardeau gas in a double-well potential. A new criterion on the Josephson-type oscillation and macroscopic quantum self-trapping is given. Furthermore we discuss the dynamics of the Tonks-Girardeau gas in a potential with a time-dependent barrier, moving adiabatically across the trap. Analytical results are compared with those for the weakly interacting Bose Josephson junction.

**Key words:** Bose-Einstein condensation; Tonks-Girardeau gas; Josephson effects.

## 引 言

1924年，玻色和爱因斯坦预言：在粒子数守恒的玻色原子系统中，当体系温度低于临界温度时，宏观数量的玻色原子在系统的基态发生凝聚，并表现出相同的量子特性，这样粒子的量子特性就以宏观的方式表现出来，即著名的玻色-爱因斯坦凝聚（BEC）现象<sup>[1, 2]</sup>。随着激光制冷与磁光囚禁中性原子技术的发展，1995年美国的Wieman和Cornell小组在实验上第一次直接观测到BEC<sup>[3]</sup>。BEC在实验上具有很强的可操控性，它很快成为实验和理论物理学家们所欢迎的研究对象，被作为研究各种量子多体现象的载体。

在一维玻色原子气体中，使用Feshbach共振技术可以调节原子从强吸引相互作用区域到Tonks-Girardeau(TG)区域（强排斥相互作用）间的变化。在玻色爱因斯坦凝聚体中，原子间的相互作用比较弱时可以用平均场近似下的Gross-Pitaevskii(GP)方程来描述<sup>[4, 5]</sup>。当原子气体处于TG区时，由于原子间短程排斥相互作用无穷大，玻色子被禁止占据空间同一位置。此情形类似于满足泡利不相容的费米子，此区间的玻色子具有费米子的性质，但这种玻色子同理想费米子的量子行为并不完全一致，对其行为的描述要用到一维修正GP方程<sup>[6]</sup>。本文第一章介绍了GP方程及TG气体的物理性质。

两模模型是一个简单有效的理想物理模型，在研究光晶格势阱时我们先研究束缚在两个格点间原子的动力学，然后扩展到整个光晶格；双势阱在实验上很容易实现，通过研究其间原子的动力学行为，我们可以更好的认识凝聚体玻色原子的物理性质。Smerzi等人研究了双势阱模型中弱相互作用原子气体的动力学行为<sup>[7]</sup>，发现双阱中原子不但发生约瑟夫森（Josephson）振荡，而且在某些初始条件下还可能出现宏观量子自俘获现象，即绝大数原子好像被其中一个阱所俘获，原子呈高度的不对称分布，这是一种由于玻色原子之间的相互作用导致的非线性现象。实验上利用激光驻波可形成周期性光晶格，束缚在其中的BEC类似于二维约瑟夫森链，可以形成振荡的原子流<sup>[8]</sup>。Albiez等人在双势阱中也实现了单个约瑟夫森结<sup>[9]</sup>，并观察到原子隧穿现象和宏观量子自陷俘现象。Giovannazzi等人研究了束缚在简谐磁阱和激光势垒构成的双阱中的原子气体<sup>[10]</sup>，发现当激光势垒移动速度较小时，势垒两边原子以一种直流约瑟夫森振荡，当其移动速度大于某一临界值时，发生交流约瑟夫森振荡。2007年Nature上的一篇实验文章证实了该理论预言<sup>[11]</sup>。本文第二章介绍了四个典型的两模

模型，并分析了各个模型下原子的动力学行为。

TG气体是被束缚在一维空间的强相互作用原子气，这种气体表现出一些特别的物理性质，如概率密度通过Talbot震荡表现出空间聚焦现象等<sup>[12,13]</sup>。本文第三章我们借助一维修正的GP方程，分别研究了含时和不含时双阱下的TG气体的隧穿动力学行为，发现TG气体的物理性质既有与弱相互作用凝聚玻色原子气相类似的地方，又有新的奇特的物理性质。

本文结构如下：第一章介绍了描述玻色系统的GP方程，TG气体的物理性质，并介绍了BEC中一个典型的物理现象——玻色约瑟夫森效应。第二章介绍了玻色-哈伯德、Spekkens-Sipe模型、标准的两模模型及改进的两模模型，并介绍了含时势阱中的BEC动力学行为。第三章我们研究了TG气体在含时与不含时双势阱中的动力学行为。最后对本文做出总结。



## 第一章 稀薄冷原子气体简介

BEC 作为一种新的物质形态有其很独特的特点，处于凝聚体中的原子保持一致的量子行为，原本单个原子难以观察的行为被放大，这就为实验和理论物理学家提供了一个独一无二的介质。凝聚体中随着原子间相互作用的强度的变化，表现出不同的物理特性。这一章中我们介绍了描述玻色系统的 GP 方程，强相互作用 TG 气体的物理性质，并介绍了 BEC 中一个典型的物理现象——玻色约瑟夫森效应。

### 1.1 Gross-Pitaevskii 方程

1924年，玻色和爱因斯坦理论预言的玻色-爱因斯坦凝聚现象是：在一定低的温度下，无相互作用的玻色子会在最低能量量子态上发生凝聚，达到宏观的数量。但实验上制得的 BEC 是处于外束缚势阱中有相互作用的原子气体。在此 BEC 体中，原子间的相互作用势是原子间距离的复杂函数，很难求得体系的确切解。人们研究发现，当凝聚原子的数目足够大，且原子间的相互作用的 s-波散射长度远小于原子间平均距离时，可以用平均场近似方法来研究。

$N$ 个相互作用的玻色原子气体系统哈密顿量的二次量子化形式为<sup>[14]</sup>：

$$\begin{aligned} H = & \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

其中  $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$  和  $\hat{\Psi}(\vec{r})$  分别表示为玻色子产生和湮灭算符，描述在  $\vec{r}$  处产生或湮灭一个粒子，满足玻色子对易关系：

$$\left[ \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}') \right] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.1.2)$$

$V_{\text{trap}}(\vec{r})$  是外场势， $V(\vec{r} - \vec{r}')$  是两体相互作用势。

波戈留波夫 (Bogoliubov) 理论提出将玻色场算符分离成凝聚部分和非凝聚部分<sup>[15]</sup>，即

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) + \hat{\Psi}'(\vec{r}) \quad (1.1.3)$$

其中：

$$\Psi(\vec{r}) \equiv \langle \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle \quad (1.1.4)$$

这里  $\Psi(\vec{r})$  是场算符的期待值，即为凝聚体序参量，一般被称作凝聚体波函数。 $n(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2$ ，表示玻色凝聚体中凝聚原子的数密度。 $\hat{\Psi}'(\vec{r})$  代表非凝聚气各态的玻色子场算符。当凝聚体的耗散很小时，它是一个小量，我们可以把  $\hat{\Psi}'(\vec{r})$  看成微扰，

将多体哈密顿量(1.1.1)代入海森堡 (Heisenberg) 方程, 得到场算符  $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$  满足的方程:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) &= [\hat{\Psi}, \hat{H}] \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t) + \int d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

在低温低密度下的稀薄原子气, 三体碰撞的几率极小, 两体碰撞占主要地位, 因此原子间的相互作用可以看作是一个两体散射的过程。在此极限下, 只有零轨道角动量态 ( $l=0$ ) 的原子散射 (s-波散射) 对散射振幅有贡献。其散射势可以用一个等效的接触势来描述:

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = g \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.1.6)$$

其中  $g$  为耦合常数, 和 s-波散射长度  $a_s$  有关。  $a_s$  和作用于原子的磁场有关, 可通过 Feshbach 共振效应来调节, 在一定磁场条件下可正也可负, 正代表两体相互作用排斥, 负代表相互吸引<sup>[16, 17]</sup>。对于三维系统,  $g = 4\pi\hbar^2 a_s / m$ <sup>[18]</sup>。将接触势函数(1.1.6)式代入海森堡方程(1.1.5), 并用凝聚体波函数  $\Psi(\vec{r}, t)$  代替场算符  $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ , 得到  $\Psi(\vec{r}, t)$  满足的方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) + g |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.1.7)$$

这就是著名的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程, 1961 年由 Gross 和 Pitaevskii 各自独立地推导出来<sup>[4, 5]</sup>。

从凝聚体的能量泛函出发也可得到 GP 方程,

$$E[\Psi, \Psi^*] = \int d\vec{r} \left[ \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) \right) \Psi + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right] \quad (1.1.8)$$

对能量泛函(1.1.8)式进行变分, 约束条件是:

$$\int d\vec{r} |\Psi(\vec{r})|^2 = N \quad (1.1.9)$$

其中  $N$  为体系总原子数。引入一个拉氏乘子  $\mu$ , 要求  $\delta E - \mu \delta N = 0$ , 显然  $\mu$  具有化学势的物理意义。对  $\Psi^*(r)$  进行变分, 得到了关于  $\Psi(r)$  的方程:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(\vec{r}) + g |\Psi(\vec{r})|^2 \right] \Psi(r) = \mu \Psi(\vec{r}) \quad (1.1.10)$$

这样得到定态 GP 方程, 其能量本征值是化学势而不是通常 Schrödinger 方程中的单粒子能量, 凝聚体的基态对应于化学势  $\mu$  取最小值的定态。从方程(1.1.10)可以看到: 原子所受到的势除了外势  $V_{trap}(\vec{r})$  外, 还包括由其它玻色原子产生的非线性有效势

$g|\Psi(\vec{r})|^2$ 。利用  $\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ ，我们可以得到含时GP方程式 (1.1.7)。

这里要说明GP方程适用的条件：首先，原子数目应该足够大；其次要求原子气体满足稀薄条件，这样才满足散射长度远小于原子间的平均距离，最后温度要足够低，由于低温可以忽略掉凝聚体的热损耗和量子损耗，这样凝聚体波函数归一化到原子总数： $\int d\vec{r} |\Psi(\vec{r})|^2 = N$ 。

## 1.2 Tonks-Girardeau气体

Lieb和Liniger研究了一维无外势具有碰撞相互作用的玻色子组成的多体系统，即Lieb-Liniger模型<sup>[19]</sup>。他们发现均匀玻色气体的物理性质由一个无量纲参数  $\gamma = mg / \rho \hbar^2$  来控制，其中  $m$  是原子的质量， $g$  是粒子间相互作用强度， $\rho$  为线密度。 $\gamma \ll 1$  时，系统为弱相互作用的玻色原子气，对其描述可以用GP方程平均场理论； $\gamma \gg 1$  时，系统为强相互作用的玻色原子气， $\gamma$  趋于无穷大时得到不可穿透玻色子的Tonks-Girardeau(TG)气体<sup>[20-22]</sup>。

TG气体是一种被限制在一维的强相互作用玻色原子气。此区域间的玻色子呈短程的强排斥相互作用，为了减小玻色子内部排斥，玻色子被禁止占据空间同一位置。此情形类似于满足泡利不相容的费米子，使得玻色子具有费米子的性质，但这种玻色子并不完全同理想费米子的量子行为一致，例如动量分布。这一物质状态自提出后已被广泛研究，但仅仅是理论上的研究。直到2004年，Bloch组和Weiss组先后在两组正交驻波形成的二维光学晶格中制备出了超冷铷原子TG气。将超冷铷原子气体束缚在一个光学点阵中，然后用另一个光学势来增加铷原子的有效质量，从而增加它们的相互作用能量，将该体系推进到了TG区域，生成TG气体<sup>[23]</sup>。如图-1.1是玻色原子一维系统密度分布图。

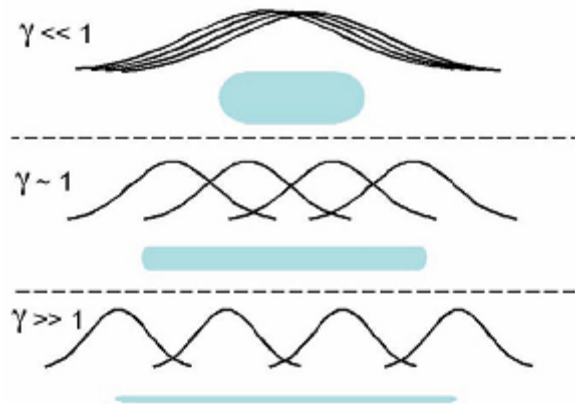


图-1.1 一维原子分布示意图<sup>[23]</sup>。

当  $\gamma \ll 1$  时，原子空间波函数趋于相同，整体上表现为单粒子行为，具有宏观的

量子效应。凝聚体中的多个原子是可以放在一起的，它们是可以相互穿透的。而当  $\gamma \gg 1$  时，即处在 TG 气体区，玻色子费米化，空间波函数分离。玻色子是硬核的，不可穿透的，多个硬核玻色子也不能占据同一位置，并且他们被限制在一个一维系统中，就像公路上由于塞车而出现的汽车排成长龙的现象。其波函数  $\Psi_{TG}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  满足的约束条件为：

$$\Psi_{TG}(x_1 \cdots x_N) = 0, \quad \text{当 } |x_i - x_j| \leq a, \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (1.2.1)$$

这里  $x_1 \cdots x_N$  是  $N$  个粒子坐标， $a$  是硬核直径。当  $a \rightarrow 0$  时，粒子间相互作用就成了  $\delta$  相互作用。TG 气体的波函数  $\Psi_{TG}(x_1, \dots, x_N)$  和无相互作用的费米子  $\Psi_F(x_1, \dots, x_N)$  的波函数有如下的对应关系：

$$\Psi_{TG} = A\Psi^F \quad (1.2.2)$$

其中  $A(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i>j} \text{sgn}(x_i - x_j)$ ，为单位反对称函数。通过两者波函数关系我们可以知道：TG 气体系统的能级与无相互作用的费米子相同，而且密度分布也一样，但是两者的动量分布很不相同，因为它们波函数的符号不同使得傅立叶变换的结果不相同。

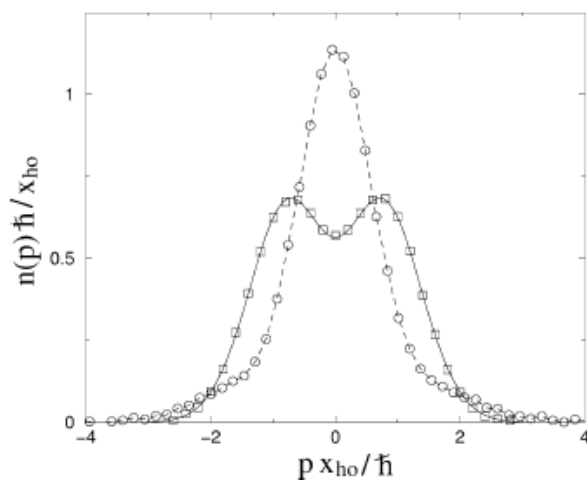


图-1.2 应用蒙特卡罗法计算在一维简谐势场中一对硬核玻色子（圆圈形）和一对无相互作用费米子（方块形）的动量分布图<sup>[24]</sup>。

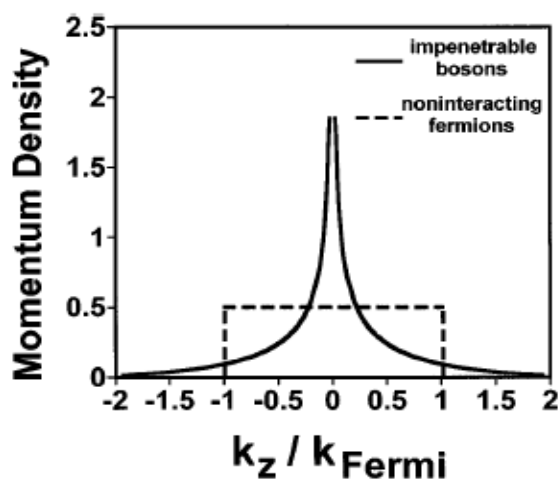


图-1.3 硬核玻色子与无相互作用的费米子在零温时的动量分布<sup>[25]</sup>。

Minguzzi等人研究了TG气体在简谐势场中的动量分布<sup>[24]</sup>，他们利用式(1.2.2)，把TG气体波函数作傅立叶变换，发现动量  $p$  在较大部分的密度分布呈  $p^{-4}$  指数衰减。他们用蒙特卡罗数值方法计算了一维简谐势场中一对硬核玻色子和一对无相互作用费米子的动量分布，如图-1.2 所示。而后Olshanii等人对Lieb-Liniger模型研究指出<sup>[25]</sup>，动量  $p$  在较大值的分布呈  $p^{-4}$  指数衰减是一个普遍的规律，不依赖于其参数  $\gamma$  的大

小。对于动量  $p$  在较小值部分的密度分布，Olshanii发现具有  $1/\sqrt{p}$  的峰尖特征<sup>[25,26]</sup>，如图-1.3所示。我们可以看到在TG气体的动量密度分布中，中间呈现出一个很尖的峰，两边有很长的尾巴。

### 1.3 玻色约瑟夫森效应

约瑟夫森（Josephson）在研究超导体时预言：在由两块相同材料的超导体，中间用绝缘体连接，当绝缘层的厚度足够薄时，在两块超导体加上电压  $U$ ，满足  $U > 2\Delta$ ，其中  $\Delta$  为超导体能隙，库伯（Cooper）电子对能够隧穿绝缘层，发生约瑟夫森隧穿，这种现象称为超导约瑟夫森效应<sup>[27]</sup>。

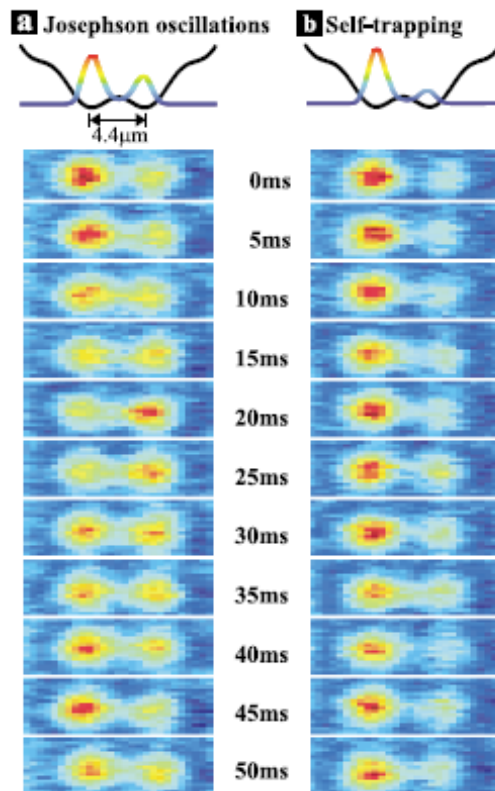


图-1.4 对称双势阱中两团弱耦合BEC的动力学行为<sup>[9]</sup>。

Javanainen第一次提出了被一个势垒分隔的两组玻色爱因斯坦凝聚态<sup>[28]</sup>，会发生与超导约瑟夫森振荡类似的行为，但他没有考虑原子之间的相互作用。Dalfovo等人考虑了玻色原子间的相互作用，提出一个可能实现玻色约瑟夫森的实验：束缚于双势阱中的玻色凝聚原子气中间的势垒足够高，这样可以忽略在经典禁区中波函数的重叠部分。当两个势阱中的原子数不同时，在这两个阱间产生中性原子流。Smerzi等人研究了双势阱中弱相互作用BEC<sup>[7]</sup>，发现原子除了会发生玻色约瑟夫森振荡外，在一定条件下还会出现一种新的宏观量子现象：宏观量子自俘现象（MQST），两阱

中凝聚的玻色原子数之差随时间的平均值不为零。并给出了从玻色约瑟夫森振荡到宏观量子自俘获的临界条件。双势阱中BEC的隧穿动力学可以借助一个单摆模型来理解，原子间非线性相互作用比较弱时发生玻色约瑟夫森振荡，类比于单摆小幅度振荡的情况，单摆在平衡点左右振荡。而当原子间非线性相互作用强度超过某一临界值时发生宏观量子自俘获现象，此种情况下绝大多数原子好像被其中一个势阱俘获，类比于大幅度振荡，相当于单摆具有足够的能量时它会绕顶点旋转。

许多实验已经观察到玻色原子约瑟夫森振荡现象以及宏观量子自俘获现象<sup>[8,9]</sup>。较为典型的一组实验是2005年Albiez等人在单个玻色约瑟夫森结中，通过调节左右阱中的原子数，不仅观测到了约瑟夫森振荡现象，还观测到宏观量子自俘获现象<sup>[9]</sup>。实验中给定两种不同的初始布居数差，观测在对称玻色约瑟夫森结左右阱间原子数密度随时间的变化，如上图-1.4所示。

在图-1.4a 中发生约瑟夫森振荡，原子随时间在左右阱中隧穿振荡，对应的初始布居数差小于其发生宏观量子自俘获的临界值。他们观测到原子振荡的周期是40(2)ms，这比在同样阱中无相互作用的原子隧穿周期500ms要小很多，说明原子间的非线性相互作用对玻色约瑟夫森振荡周期有重要影响。而当初始布居数差大于其临界值时，发生宏观量子自俘获现象(图-1.4b)，左右阱间原子数之差的平均值随时间几乎不变。

## 第二章 两模玻色爱因斯坦凝聚

双势阱模型和单势阱两态模型，虽然两者的物理背景不同，但在两模近似下，却得到相似的动力学方程。双势阱模型作为一个简单而有效的物理模型，是研究量子干涉效应及约瑟夫森效应的典型结构。正是在研究双势阱中 BEC 的动力学行为时，Smerzi 等人发现了宏观量子自俘效应 (MQST)。

在这里，我们采用双势阱模型，其结果也适用于单势阱两态的模型。我们依次介绍玻色-哈伯德、Spekkens-Sipe 模型、标准的两模模型及改进的两模模型四个典型的两模模型，并讨论含时势阱中 BEC 的动力学行为。

### 2.1 光晶格中玻色爱因斯坦凝聚

#### 2.1.1 玻色-哈伯德模型

在光晶格束缚势场下质量为  $m$  的相互作用超冷玻色子的哈密顿量为：

$$H = \int d^3\bar{r} \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}) \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\bar{r}) \right] \hat{\Psi}(\bar{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\bar{r} d^3\bar{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}') U(\bar{r} - \bar{r}') \hat{\Psi}(\bar{r}') \hat{\Psi}(\bar{r}) \quad (2.1.1)$$

其中  $\hat{\Psi}(\bar{r})$  表示玻色场算符， $V_{\text{trap}}(\bar{r})$  为束缚外势， $V(\bar{r} - \bar{r}')$  代表原子间相互作用势。由第一章我们知道三维系统玻色子的相互作用可以用一个等效接触势描述， $V(\bar{r} - \bar{r}') = 4\pi\hbar^2 a_s / m \delta(\bar{r} - \bar{r}')$ ， $a_s$  是 s-波散射长度。

单原子系统的能量本征态是布洛赫 (Bloch) 波函数，适当的布洛赫波函数组合可构成定域在单个格点上的瓦涅尔 (Wannier) 函数，不同格点的瓦涅尔函数彼此正交。我们假定系统中原子的动能小于激发到第二能带所需的能量，在最低能带的瓦涅尔基中展开玻色场算符：

$$\hat{\Psi}(\bar{r}) = \sum_i \hat{a}_i \chi(\bar{r} - \bar{r}_i) \quad (2.1.2)$$

其中  $\hat{a}_i$  是第  $i$  个格点上玻色子的湮灭算符，满足玻色对易关系  $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j] = \delta_{i,j}$ 。代入到 (2.1.1) 式中得到二次量子化的哈密顿量：

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \sum_i \varepsilon_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \quad (2.1.3)$$

这就是玻色-哈伯德模型。上面推导中我们采用紧束缚近似，只考虑近邻相互作用，并忽略其它小项。这里  $\langle i,j \rangle$  表示近邻格点求和， $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  是第  $i$  个格点的原子数算符。方程中第一项是跃迁项，描述了玻色子在相邻格点间的隧穿能量，隧穿耦合的强弱由隧穿矩阵元

$$J_{ij} = -\int d^3\bar{r} \chi^*(\bar{r} - \bar{r}_i) \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\bar{r}) \right] \chi(\bar{r} - \bar{r}_j) \quad (2.1.4)$$

表征；第二项代表原子在第  $i$  个格点的能量，

$$\varepsilon_i = \int d^3\bar{r} \chi^*(\bar{r} - \bar{r}_i) \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\bar{r}) \right] \chi(\bar{r} - \bar{r}_i) \quad (2.1.5)$$

第三项表示单个格点上原子间的相互作用，它的强弱由相互作用矩阵元

$$U = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3\bar{r} |\chi(\bar{r} - \bar{r}_i)|^4 \quad (2.1.6)$$

表示。其物理机制和大小关系可以由图-2.1看出：

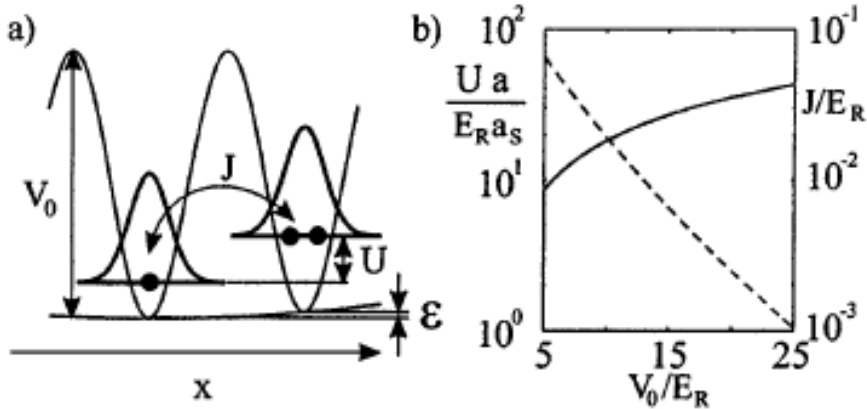


图-2.1 光格子中玻色-哈伯德模型的示意图<sup>[29]</sup>。

图-2.1a形象地表示了各参量的物理意义，它们的大小关系随外势而变化，可由图-2.1b看出。随着格点原子相互作用矩阵元  $U$  与隧穿矩阵元  $J$  的比值大小改变会出现两种性质完全不同的基态<sup>[30]</sup>：当  $U/J \ll 1$  时，隧穿耦合占主要作用，原子可以在相邻的格点间自由移动，每个格点上原子填充的数目是任意的，系统处于超流态（如图-2.2a）。此种情况下，动能占能量的主要部分，系统的波函数是非局域化的。根据 Gutzwiller 的假设，单原子波函数将扩展到整个晶格上，所有原子都占据完全相同的布洛赫扩展态，基态波函数可以写作<sup>[31]</sup>：

$$|\Psi_{SF}\rangle|_{U \approx 0} \propto \left( \sum_{i=1}^M \hat{a}_i^\dagger \right)^N |0\rangle \quad (2.1.7)$$

这里  $M$  表示格点数， $N$  表示系统总原子数。与此相反，当  $U/J \gg 1$  时，格点上原子间相互作用能在总能量占主要地位，系统的基态由局域化的原子波函数组成，是格点局域 Fock 态的乘积，每个格点原子填充的数目相同时系统总能量取最小，系统处于 Mott 绝缘态（如图-2.2b），基态波函数可写作：

$$|\Psi_{MI}\rangle|_{U \approx 0} \propto \prod_{i=1}^M (\hat{a}_i^\dagger)^N |0\rangle \quad (2.1.8)$$



这样整数占据的Mott绝缘态，量子涨落为零，相位相干性消失，系统不能用一个宏观波函数来描述。

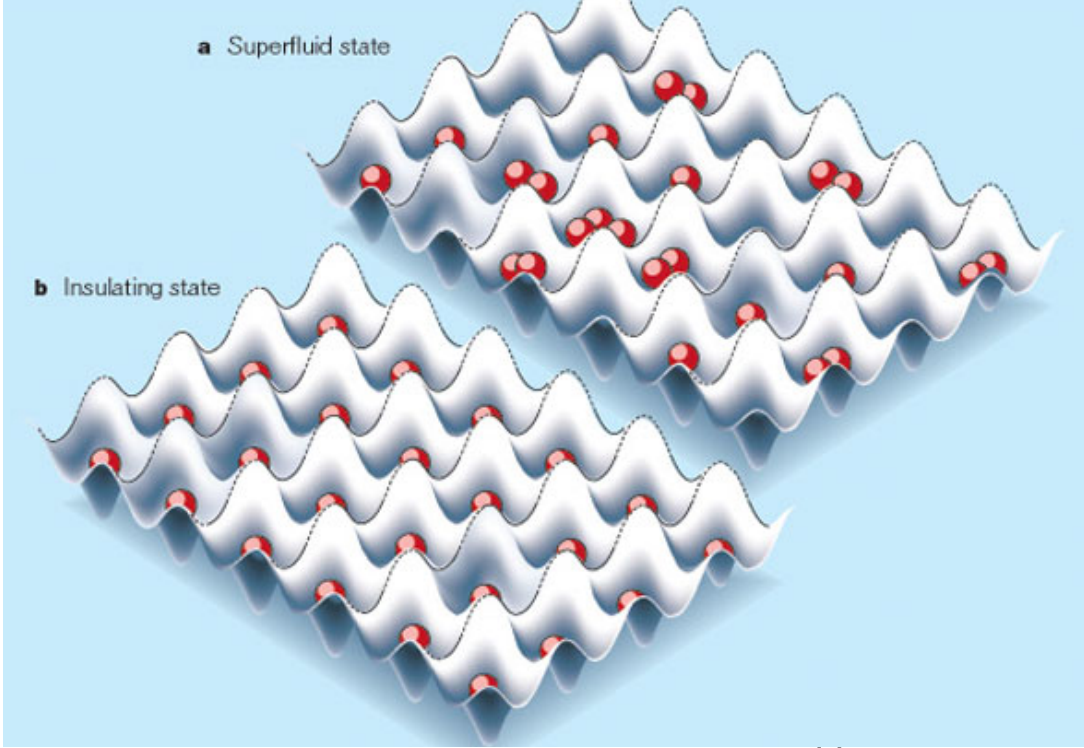


图-2.2 光晶格中BEC超流相与Mott绝缘相的转变<sup>[30]</sup>。

隧穿耦合和原子间相互作用两种机制的竞争决定了体系是处于超流态还是Mott绝缘态。当它们的比值达到某一量子临界点 $(J/U)_c$ ，此时量子涨落将导致连续量子相变<sup>[32,33]</sup>。在Jaksch提出光晶格中BEC的量子相变理论后不久，2002年德国的Hansch小组在实验上证实了这个预言<sup>[31]</sup>。

### 2.1.2 Spekkens-Sipe模型

前一小节我们讨论玻色子相互作用时，原子间的相互作用只保留同格点上原子的相互作用。当原子间相互作用增大时，必须考虑其它项对系统的贡献<sup>[34]</sup>。下面我们以一个两模模型进行讨论，玻色原子系统的哈密顿量：

$$H = \int d^3\bar{r} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}) \nabla^2 \hat{\Psi}(\bar{r}) + V_{trap}(\bar{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}) \hat{\Psi}(\bar{r}) + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\bar{r}) \hat{\Psi}(\bar{r}) \hat{\Psi}(\bar{r}) \right] \quad (2.1.9)$$

我们考虑这样一个的外势：外势在  $y$  和  $z$  方向展开很小，沿着  $x$  方向是一个双势阱，并且关于  $x$  轴对称。场算符  $\hat{\Psi}(\bar{r})$  可以利用瓦尼尔态：

$$\hat{\Psi}(\bar{r}) = \hat{a}_1 \psi_1(\bar{r}) + \hat{a}_2 \psi_2(\bar{r}) \quad (2.1.10)$$

展开，满足：

$$\psi_1(-x, y, z) = \psi_2(x, y, z) \quad (2.1.11)$$

将式(2.1.10)代入哈密顿量方程(2.1.9)，展开后得：

$$\begin{aligned}
 H_2 = & \varepsilon_{11}\hat{N} + (\varepsilon_{12} + gT_1(\hat{N} - 1))(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1) + \frac{gT_0}{2}(\hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 - \hat{N}) \\
 & + \frac{gT_2}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1 + 4\hat{N}_1\hat{N}_2)
 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

其中  $\hat{N}_1 = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1$ ， $\hat{N}_2 = \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2$ ， $\hat{N} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2$ ，

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \int d^3\bar{r}\psi_1(\bar{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{trap}(\bar{r})\right)\psi_1(\bar{r}) \\
 \varepsilon_{12} &= \int d^3\bar{r}\psi_1(\bar{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{trap}(\bar{r})\right)\psi_2(\bar{r}) \\
 T_0 &= \int d^3\bar{r}\psi_1^4(\bar{r}) \\
 T_1 &= \int d^3\bar{r}\psi_1^3(\bar{r})\psi_2(\bar{r}) \\
 T_2 &= \int d^3\bar{r}\psi_1^2(\bar{r})\psi_2^2(\bar{r})
 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

$\varepsilon_{11}$  是单粒子在  $\psi_1(\bar{r})$  态的能量， $\varepsilon_{12}$  表征粒子在两阱间的跃迁能力， $T_0$  是原子间自相互作用能， $T_1$ 、 $T_2$  表示原子间交叉相互作用能。中间推导保留了所以阶，没作任何近似。

我们用角动量关系算符：

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_z &= \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) \\
 \hat{J}_y &= \frac{i}{2}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) \\
 \hat{J}_x &= \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)
 \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

重新表示哈密顿量，得：

$$H_2 = E_0 + 2(\varepsilon_{12} + gT_1(\hat{N} - 1))\hat{J}_z + 2gT_2\hat{J}_z^2 + g(T_0 - T_2)\hat{J}_x^2 \tag{2.1.15}$$

其中：

$$E_0 \equiv \varepsilon_{11}\hat{N} + \frac{1}{4}\hat{N}(\hat{N} - 2)(gT_0 + gT_2) \tag{2.1.16}$$

## 2.2 双势阱中玻色爱因斯坦凝聚

### 2.2.1 标准的两模模型

对于弱耦合相互作用的 BEC，可以用 Gross-Pitaevskii (GP) 方程来描述，

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\bar{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{trap}(\bar{r}) + g|\Psi(\bar{r},t)|^2\right]\Psi(\bar{r},t) \tag{2.2.1}$$

其中  $\Psi(\bar{r},t)$  为体系波函数，满足  $\int d\bar{r}|\Psi(\bar{r},t)|^2 = N$ ， $N$  是体系原子数。 $V_{trap}(\bar{r})$  为外加束

缚势场。

Smerzi等人考虑势阱为一个双势阱情形<sup>[7,35]</sup>，当两阱间的势垒足够高时，体系的波函数可以看成是两个势阱中凝聚体波函数的叠加，即采用双模近似，波函数可写成：

$$\Psi(\vec{r}, t) = c_1(t)\psi_1(\vec{r}) + c_2(t)\psi_2(\vec{r}) \quad (2.2.2)$$

这里  $c_{1,2}(t) = \sqrt{N_{1,2}(t)}e^{i\theta_{1,2}(t)}$ ， $N_{1,2}$  与  $\theta_{1,2}$  分别是左右阱中的原子数和相位，总原子数守恒  $N_1 + N_2 = N$ 。 $\psi_{1,2}(\vec{r})$  描述左右势阱中凝聚体的空间波函数，两者满足正交归一性：

$$\int d\vec{r} |\psi_{i,j}(\vec{r})|^2 = \delta_{ij}, \quad i,j=1,2 \quad (2.2.3)$$

将方程 (2.2.2) 代入到 GP 方程 (2.2.1) 中，并利用方程(2.2.3)，得到一组非线性动力学方程：

$$i\hbar \frac{dc_1}{dt} = (E_1^0 + U_1 N_1) c_1 - K c_2, \quad (2.2.6)$$

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = (E_2^0 + U_2 N_2) c_2 - K c_1 \quad (2.2.7)$$

即著名的玻色约瑟夫森结 (BJJ) 方程。其中：

$$\begin{aligned} E_{1,2}^0 &= \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi_{1,2}|^2 + V_{trap} |\psi_{1,2}|^2 \right] d\vec{r}, \\ U_{1,2} &= g \int d\vec{r} |\psi_{1,2}(\vec{r})|^4, \\ K &= - \int d\vec{r} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi_1 \nabla \psi_2 + \psi_1 V_{trap} \psi_2 \right) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

这里  $E_{1,2}^0$  是左右势阱中的零点能量， $U_{1,2}$  为原子间的自相互作用能量， $K$  为阱的隧穿率。推导过程中忽略了左右阱中局域波函数交叠积分对系统的贡献，但在相互作用比较大时，必须考虑该项对系统原子动力学的影响。上面的模型称为标准的两模模型<sup>[7]</sup>。

我们定义左右势阱的分数布居数差  $\eta(t) \equiv \frac{N_1(t) - N_2(t)}{N}$  和位相差  $\theta(t) \equiv \theta_2(t) - \theta_1(t)$ 。从BJJ方程出发，可以得到关于分数布居数差与位相差的方程：

$$\dot{\eta} = -\sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \quad (2.2.9)$$

$$\dot{\theta} = \Lambda \eta + \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos \theta + \Delta E \quad (2.2.10)$$

这里我们已重新标度时间  $2Kt \rightarrow t$ ，并作无量纲化处理 ( $\hbar = m = 1$ )。中间的参量为：

$$\Delta E = \frac{E_1^0 - E_2^0}{2K} + N \frac{U_1 - U_2}{4K}, \quad (2.2.11)$$

$$\Lambda = N \frac{U_1 + U_2}{4K}$$

由经典的正则方程  $\dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$ ,  $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \eta}$ , 我们可导出体系的哈密顿量为:

$$H = \frac{\Lambda}{2} \eta^2 - \sqrt{1 - \eta^2} \cos \theta + \Delta E \eta \quad (2.2.12)$$

对应于经典力学里的单摆模型,  $\theta$  为摆角, 摆长正比于  $\sqrt{1 - \eta^2}$ 。

我们考虑一个外势为对称双势阱的情况, 对应  $U_1 = U_2 = U$ ,  $\Delta E = 0$ , 发生宏观量子自俘获现象的条件是:

$$H_0 = H(0, \pi) = H(\eta_c, 0), \quad (2.2.13)$$

即:

$$\eta_c = \frac{2}{\Lambda} \sqrt{\Lambda - 1} \quad (2.2.14)$$

图-2.4给出了对称双势阱中的分数布居数差随时间的演化。

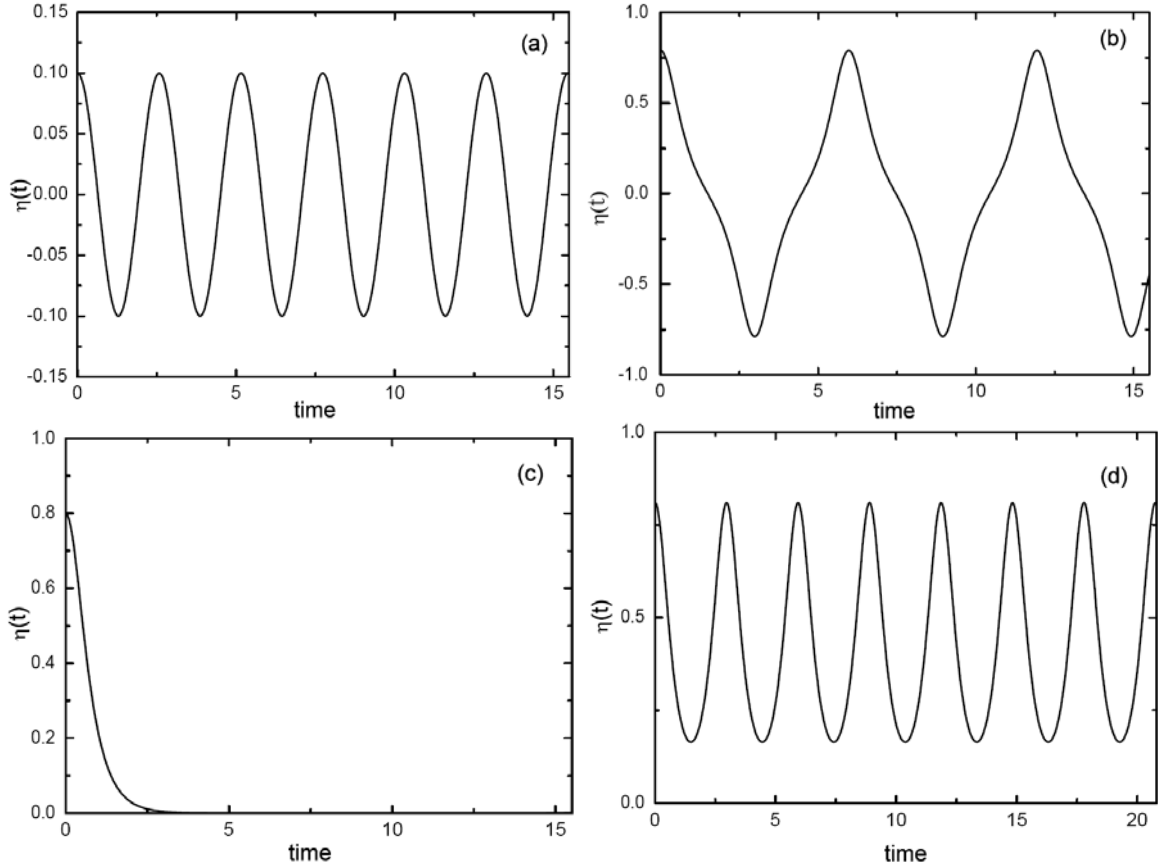


图-2.4 对称双势阱中的分数布居数差  $\eta(t)$  的时间演化图。  $\Lambda=5$ , 初始位相差  $\theta(0) = 0$ , 初始布居数差  $\eta(0)$  分别为(a) 0.1, (b) 0.79, (c) 0.8, (d) 0.81。

从图中我们看到 $\eta$ 在临界值 $\eta_c$ 以下时玻色原子在双势阱间作约瑟夫森振荡 (图a、b), 当 $\eta$ 取值大于其临界值 $\eta_c$ 时, 就发生宏观量子自俘获现象(图d)。由方程(2.2.14)可求得 $A=5$ , 初始位相差 $\theta(0)=0$ 时,  $\eta_c=0.8$ (图c)。

#### 2.1.4 改进的两模模型

前面模型适用于原子相互作用小的情形, 当相互作用增大时, 必须考虑左右阱中局域波函数交叠积分对系统的贡献。从一维GP方程出发, 可以研究原子的动力学变化。

一维含时 GP 方程:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V_{\text{trap}}(x)\Psi(x) + g|\Psi(x)|^2 \Psi(x) \quad (2.2.15)$$

考虑外场为双势阱, 波函数可写成:

$$\Psi(x,t) = c_1(t)\psi_1(x) + c_2(t)\psi_2(x) \quad (2.2.16)$$

其中 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ 是对称双势阱绝缘的基态。显然:

$$\psi_1(x) = \psi_2(-x) \quad (2.2.17)$$

我们考虑粒子在这两个阱中的隧穿, 得基态与第一激发态:

$$\psi_+(x) = \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}}, \psi_-(x) = \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \quad (2.2.18)$$

波函数化为:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \psi_+(x)(c_1(t) + c_2(t)) + \psi_-(x)(c_1(t) - c_2(t)) \right] \quad (2.2.19)$$

这里:

$$\psi_+(x) = \psi_+(-x), \psi_-(x) = -\psi_-(-x) \quad (2.2.20)$$

并且满足正交归一:

$$\int dx \psi_i \psi_j = \delta_{i,j}, \quad i, j = +, - \quad (2.2.21)$$

它们对应满足 GP 方程定态解的形式:

$$\beta_j \psi_j = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} + V_{\text{trap}} \psi_j + g \psi_j^3, \quad j = +, - \quad (2.2.22)$$

$\beta_j$ 为对应的能量。将式(2.2.19)代入方程(2.2.15), 并利用式(2.2.21)与式(2.2.22), 得:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_1(t)}{dt} &= c_1 \left( F + A|c_1|^2 - \frac{\Delta\gamma}{4} c_1 c_2^* \right) - c_2 \left( \frac{\Delta\beta}{2} - \frac{\Delta\gamma}{4} |c_2|^2 - C\psi_2\psi_1^* \right) \\ &= M_1 c_1 - K_1 c_2 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_2(t)}{dt} &= c_2 \left( F + A|c_2|^2 - \frac{\Delta\gamma}{4} c_2 c_1^* \right) - c_1 \left( \frac{\Delta\beta}{2} - \frac{\Delta\gamma}{4} |c_1|^2 - Cc_1 c_2^* \right) \\ &= M_2 c_2 - K_2 c_1 \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

其中：

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ij} &= g \int \psi_i^2(x) \psi_j^2(x) dx \quad (i, j = +, -) \\
 \Delta\gamma &= \gamma_{--} - \gamma_{++} \\
 \Delta\beta &= \beta_- - \beta_+ \\
 A &= \frac{10\gamma_{+-} - \gamma_{++} - \gamma_{--}}{4} \\
 B &= \beta_- - \beta_+ + \frac{\gamma_{++} - \gamma_{--}}{2} = \Delta\beta - \frac{\Delta\gamma}{2} \\
 C &= \frac{\gamma_{++} + \gamma_{--} - 2\gamma_{+-}}{4} \\
 F &= \frac{\beta_+ + \beta_-}{2} - \gamma_{+-}
 \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

这是一组新的BJJ方程，中间推导过程没有任何的近似，较前面的标准的两模模型称之为改进的两模模型<sup>[36,37]</sup>。我们取两者描述隧穿的项做比较，用改进的两模模型中的参量表示前面标准的两模模型中的K参量，可重新表示为：

$$K = \frac{\Delta\beta - \Delta\gamma}{2} = \frac{B}{2} - \frac{\Delta\gamma}{4} \tag{2.2.26}$$

考虑在一种极限情况： $\eta = \theta = 0$ ，

$$\begin{aligned}
 K_1 = K_2 &= \frac{\Delta\beta}{2} - \frac{\Delta\gamma}{8} - \frac{C}{2} \\
 &= K + \frac{3\Delta\gamma}{8} - \frac{C}{2}
 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

可以看到在改进的两模模型中显含了原子间的相互作用，在非线性相互作用增大时，这种模型给出的理论结果更能与实验符合。对 $\eta > 0, \theta = 0$ 情况， $K_1$ 增加， $K_2$ 减小，物理意义是左边积聚的原子比右边多，隧穿从左到右的几率增大。对 $\eta < 0, \theta = 0$ 情形正好相反。我们来重新认识一下参量C的物理意义，可写成：

$$C = g \int dx \psi_1^2 \psi_2^2 \tag{2.2.28}$$

C增大时表示左右两边的波函数叠加部分增多。当 $\beta_+$ 接近于势阱的顶部会发生这种情况。这样导致隧穿项减小——“pre-tunneling”效应，称此为相互作用隧穿，当两个波函数叠加到一定程度时，这样的相互作用致使隧穿能力减弱。

下面我们给出 $\frac{d\theta}{dt}$ ， $\frac{d\eta}{dt}$ 的运动方程：

$$\frac{d\theta}{dt} = A\eta + B \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos\theta - C\eta \cos 2\theta \tag{2.2.29}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -B\sqrt{1-\eta^2} \sin\theta + C(1-\eta^2) \sin 2\theta \tag{2.2.30}$$

由 $\dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \phi}$ ， $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial z}$ ，可得出I2M模型的哈密顿量：

$$H_{I2M} = A\frac{\eta^2}{2} - B\sqrt{1-\eta^2}\cos\theta + \frac{1}{2}C(1-\eta^2)\cos 2\theta \quad (2.2.31)$$

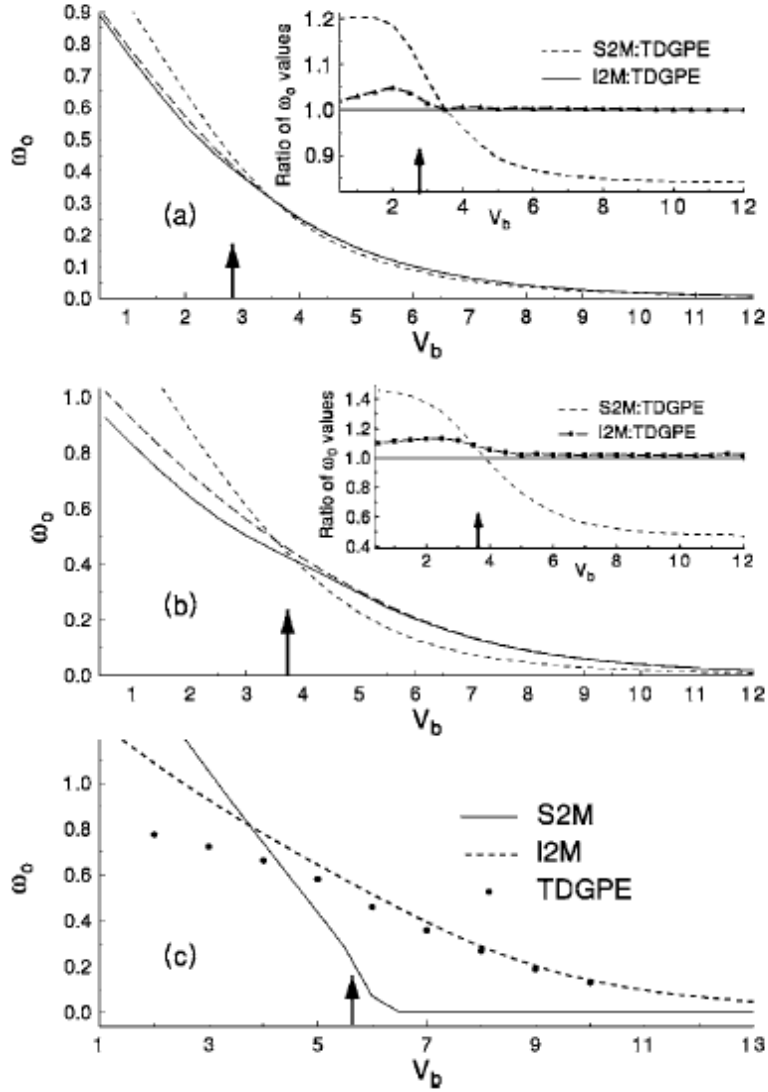


图-2.5 不同相互作用强度的的振荡频率<sup>[36]</sup>  
(a)  $gN=1.0$ , (b)  $gN=3.0$ , (c)  $gN=10.0$ 。

在  $\eta, \theta$  都很小时，两种模型的比较：

标准的两模模型：

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -2K\theta, \frac{d\theta}{dt} = (U + 2K)\eta \\ \Rightarrow \omega_{0s}^2 &= 2K(U + 2K) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

改进的两模模型：

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= (2C - B)\theta, \frac{d\theta}{dt} = (A + B - C)\eta \\ \Rightarrow \omega_{0l}^2 &= (B - 2C)(A + B - C) \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

我们给出了此种情形下，这两种模型在不同相互作用强度下  $\omega$ - $V_b$  图，如上图-2.5。

在原子间相互作用比较弱时，这两种模型得出的振荡频率都与含时 GP 方程的数值解相近；当原子间相互作用增大时，改进的两模模型考虑了隧穿中的相互作用，所得结果更能与含时 GP 方程的数值解符合，此种情况就不能再用标准的两模模型近似。

发生由超流相到绝缘相转变的临界条件是：

$$H_s = H(0, \pi) = B + \frac{C}{2} = H(\eta_c, 0) \quad (2.2.34)$$

利用方程(2.2.33)得：

$$\eta_{c,V} = \frac{2}{A-C} [B(A-B-C)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.35)$$

最后我们说明一点，Spekkens-Sipe模型与改进的两模模型是等价的，下面给出了证明：

改进的两模模型的二次量子化哈密顿量为<sup>[34,35]</sup>：

$$\hat{H}_2 = -J_z \left( \Delta\beta - \frac{\Delta\gamma}{2} - \frac{\Delta\gamma}{2N} \right) + \frac{(A+C)}{N} J_x^2 + \frac{2C}{N} \hat{J}_z^2 \quad (2.2.36)$$

Spekkens-Sipe模型对应的哈密顿量为<sup>[32]</sup>：

$$H_2 = E_0 + 2 \left( \varepsilon_{12} + gT_1 (\hat{N} - 1) \right) \hat{J}_z + 2gT_2 \hat{J}_z^2 + g(T_0 - T_2) \hat{J}_x^2 \quad (2.2.37)$$

我们比较两个方程中的系数，其中改进的两模模型中第三项  $\hat{J}_z^2$  的系数为：

$$\begin{aligned} \frac{2C}{N} &= \frac{2}{N} \left( \frac{\gamma_{++} + \gamma_{--} - 2\gamma_{+-}}{4} \right) \\ &= \frac{g}{2} \int (\psi_+^2 \psi_+^2 + \psi_-^2 \psi_-^2 - 2\psi_+^2 \psi_-^2) dx \\ &= \frac{g}{2} \int \left( \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 + \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 - 2 \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{8} g \int (2(\psi_1^4(x) + \psi_2^4(x) + 6\psi_1^2(x)\psi_2^2(x)) - 2(\psi_1^4(x) + \psi_2^4(x) - 2\psi_1^2(x)\psi_2^2(x))) dx \\ &= 2g \int \psi_1^2(x)\psi_2^2(x) dx = 2gT_2 \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

与Spekkens-Sipe模型  $\hat{J}_z^2$  的系数一致，再比较改进的两模模型中第二项  $J_x^2$  的系数：

$$\begin{aligned} \frac{(A+C)}{N} &= \frac{1}{N} \left( \frac{10\gamma_{+-} - \gamma_{++} - \gamma_{--} + \gamma_{++} + \gamma_{--} - 2\gamma_{+-}}{4} \right) \\ &= \frac{2\gamma_{+-}}{N} = 2g \int dx \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} g \int dx (\psi_1^4(x) + \psi_2^4(x) - 2\psi_1^2(x)\psi_2^2(x)) \\ &= g \int dx (\psi_1^4(x) - \psi_1^2(x)\psi_2^2(x)) \\ &= g(T_0 - T_2) \end{aligned} \quad (2.2.39)$$



与Spekkens-Sipe模型  $J_z^2$  的系数一致，最后比较改进的两模模型中第一项  $J_z$  的系数，分成三部分：

1)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\mathcal{Y}}{2N} &= \frac{\gamma_{--} - \gamma_{++}}{2N} \\ &= \frac{g}{2} \int dx \left( \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 - \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \right) \\ &= -g \int dx (\psi_1^3(x)\psi_2^1(x) + \psi_1^1(x)\psi_2^3(x)) \\ &= -2g \int dx \psi_1^3(x)\psi_2^1(x) = -2gT_1 \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

2) 由方程(2.2.40)知：

$$\frac{\Delta\mathcal{Y}}{2} = \gamma_{--} - \gamma_{++} = -2gNT_1 \quad (2.2.41)$$

3) 由于：

$$\beta_j \psi_j = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} + V_{ext} \psi_j + g \psi_j^3 \quad j = +, - \quad (2.2.42)$$

方程(2.2.42)两边同乘  $\psi_j$ ，并对全空间积分，得：

$$\beta_j = \int dx \left( \psi_j \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ext} \right) \psi_j + g N \psi_j^4 \right) \quad (2.2.43)$$

这样：

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \beta_- - \beta_+ \\ &= \int dx \left( \psi_- \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ext} \right) \psi_- + g N \psi_-^4 \right) - \int dx \left( \psi_+ \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ext} \right) \psi_+ + g N \psi_+^4 \right) \\ &= \int dx \left( \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ext} \right) \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right) + g N \left( \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \right) \\ &\quad - \int dx \left( \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ext} \right) \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right) + g N \left( \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \right) \\ &= -2 \int dx \psi_1(x) \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ext} \right) \psi_2(x) - 4gN \int dx \psi_1^3(x)\psi_2^1(x) \\ &= -2\varepsilon_{12} - 4gNT_1 \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

所以改进的两模模型中第一项  $J_z$  的系数：

$$\begin{aligned} -\left( \Delta\beta - \frac{\Delta\mathcal{Y}}{2} - \frac{\Delta\mathcal{Y}}{2N} \right) &= -(-2\varepsilon_{12} - 4gNT_1) - 2gNT_1 - 2gT_1 \\ &= 2(\varepsilon_{12} + gT_1(N-1)) \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

与Spekkens-Sipe模型  $J_z$  项的系数一致。

在改进的两模模型模型中省略了常数项，因为对于哈密顿量来说常数项的作用

相当于提高或降低一个恒定的参考标准，对哈密顿量的变化没有影响，其正是对应 Spekkens-Sipe 模型的常数项  $E_0$ 。由以上证明知它们系数是相同的，这样基于两种模型的推导是等价的！

## 2.2 含时双势阱中凝聚体的动力学

在前一节我们介绍了外势不随时间变化的双阱中凝聚体原子的动力学性质。许多文章探讨了含时势阱中的情形<sup>[38,39]</sup>，本节我们考虑这样一个由磁势阱和激光势垒构成的外势： $V_{ext}(\vec{r}, t) = V_{trap}(\vec{r}) + V_{laser}(z, t)$ ， $V_{trap}(\vec{r})$  是一个对称谐振子势： $V_{trap}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega_r^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2z^2$ ， $\omega_r$  与  $\omega_0$  分别是横向频率和纵向频率，势垒由一个高斯状的激光势给出： $V_{laser}(z) = V_0 \exp[-(z-l_z)^2/\lambda^2]$ ， $l_z(t)$  表示激光的位置，势垒移动的速度为： $v = \frac{dl_z(t)}{dt}$ 。用 GP 方程描述凝聚在其中的原子：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = [H_0(t) + g |\Psi(\vec{r}, t)|^2] \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.3.1)$$

这里  $H_0(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}, t)$ ，代表不含原子间相互作用的密顿量，这里的复合势阱可看成是一个双势阱。采用双模近似下的波函数代入到方程(2.3.1)可得：

$$i\hbar \frac{dc_1(t)}{dt} = \int d\vec{r} \psi_1(\vec{r}) [H_0(t) + g |\Psi(\vec{r}, t)|^2] \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.3.2)$$

$$i\hbar \frac{dc_2(t)}{dt} = \int d\vec{r} \psi_2(\vec{r}) [H_0(t) + g |\Psi(\vec{r}, t)|^2] \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.3.3)$$

由方程(2.3.2)与(2.3.3)可求得关于分数布居数差与位相差的方程（详细推导见本文附录）：

$$\hbar \dot{\eta} = (2E_J/N) \sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \quad (2.3.4)$$

$$\hbar \dot{\theta} = Fl_z(t) - \frac{2E_J}{N} \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos \theta - \frac{NE_c}{2} \eta \quad (2.3.5)$$

其中：

$$E_c = 2g \int d\vec{r} |\psi_1(\vec{r})|^4 = 2U_1 \quad (2.3.6)$$

代表原子在 1 阱中的相互作用能。

$$E_J = -N \int d\vec{r} \psi_1(\vec{r}) [H_0 + gN\psi_1^2(\vec{r})] \psi_2(\vec{r}) \quad (2.3.7)$$

代表约瑟夫森隧穿能。

$$\begin{aligned} F &= \int d\vec{r} [\psi_1^2(\vec{r}) - \psi_2^2(\vec{r})] \frac{\partial}{\partial l_z} V_{laser} \\ &\approx m\omega_0^2 \int d\vec{r} z [\psi_1^2(\vec{r}) - \psi_2^2(\vec{r})] \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

即激光势垒的移动等价于谐振子势阱向相反方向移动， $Fl_z(t)$  表示由激光势垒所在位置不同造成两阱化学势不同对位相差的影响。

考虑一个这样一个 JILA 装置， $N = 5 \times 10^4$  个铷原子束缚在一个圆柱对称的谐振子阱中，横向频率  $\omega_r = 17.68s^{-1}$ ，纵向频率  $\omega_0 = 50s^{-1}$ ，s-波散射长度  $a_s = 58.19 \text{ \AA}$ ，一

片高斯状的激光势垒在中心沿着纵向把势阱分成两部分。我们假定激光势垒的半宽为  $3.5\mu\text{m}$ ，并且  $V_0/\hbar = 650\text{s}^{-1}$ 。计算激光势垒按某一速度移动 0.5 秒钟后原子布居数差，结果如图-2.6。

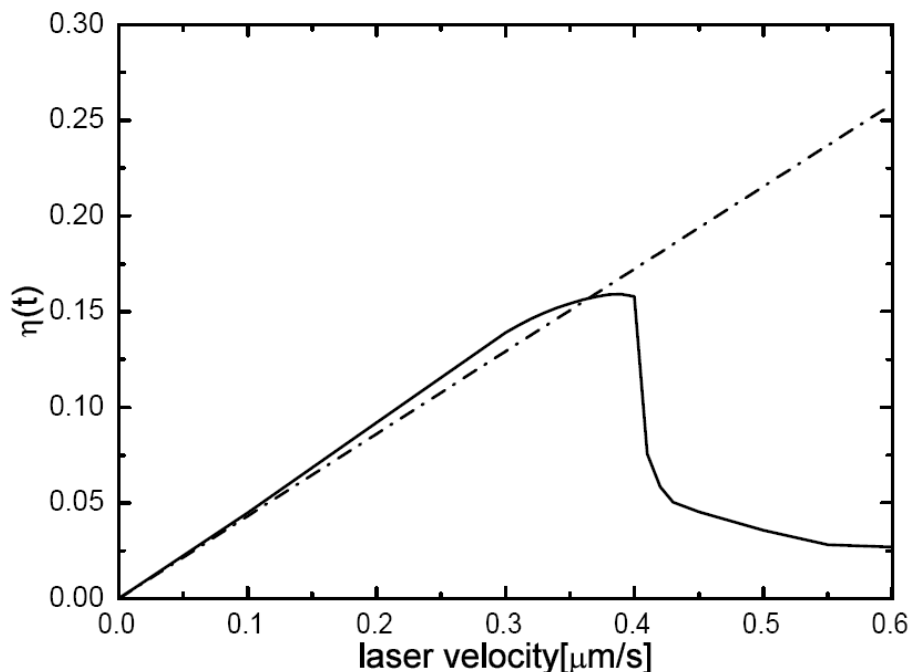


图-2.6 布居数差随势垒运动速度的关系曲线。

图中实线是由方程(2.3.2)和(2.3.3)得来的，对应的能量积分  $NE_c/\hbar = 2.46\text{ms}^{-1}$ ， $E_J/N\hbar = 2.41 \times 10^{-4}\text{ms}^{-1}$ ， $F/\hbar = 1.060\text{ms}^{-1}\mu\text{m}^{-1}$ 。当激光势垒移动的速度小于其临界值时，原子呈直流(dc)约瑟夫森振荡，表现在势垒两边布居数差随势垒速度移动而增加，当超过其临界速度，原子呈交流(ac)约瑟夫森振荡，两边布居数差基本保持不变。图中对应的临界速度值为  $v_c = 0.40\mu\text{m}/\text{s}$ ，在临界速度处发生突变。虚线代表定态布居数差，即势垒一开始就处于按某一速度移动 0.5 秒后的位置，中间没有变化，对应 0.5 秒后的布居数差。

### 第三章 双势阱中 Tonks-Girardeau 气体的动力学

前面第一章我们介绍过 TG 气体的一些物理性质,在这一章中我们利用一维修正 GP 方程,主要研究了 TG 气体在不含时双势阱中的约瑟夫森效应及宏观量子自俘效应,给出发生这两种转变的判据;并讨论了 TG 气体在一个含时势阱中的动力学,得到了势垒移动情况下强相互作用 TG 区的动力学方程。

#### 3.1 不含时双势阱中 Tonks-Girardeau 气体的动力学

##### 3.1.1 理论模型:

GP 近似是一种长波理论,依赖于粒子间相互作用构成的假势,然而对处在两维空间排斥的玻色子这种假势会消失<sup>[40]</sup>,我们需要对处于两维和两维以下的玻色子的 GP 理论做修正。随着空间维数的减少,粒子间相撞的几率增大,GP 方程中非线性项  $|\Psi|^4$  需修正为  $|\Psi|^{2(2+d)d}$ ,  $d(d \leq 2)$  为空间维数<sup>[41]</sup>。在一维情形这种效应最强,我们有一个  $|\Psi|^6$  的相互作用。对于处在 Tonks-Girardeau 区一维强相互作用玻色原子气,体系能量密度等价于自由费米子密度  $\pi^2 \hbar^2 n^3 / 6m$ <sup>[22,25]</sup>,能量泛函修正为:

$$E = \int dx \left[ \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(x) \right) \Psi + \frac{\pi^2 \hbar^2}{6m} |\Psi|^6 \right] \quad (3.1.1)$$

对能量泛函 (3.1.1) 式进行变分,约束条件是:

$$\int dx |\Psi(x)|^2 = N \quad (3.1.2)$$

$N$  为体系总原子数,引入一个拉氏乘子  $\lambda$ ,要求  $\delta E - \lambda \delta N = 0$ 。对  $\Psi^*(x)$  进行变分,得到了关于  $\Psi(x)$  的方程:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(x) + \frac{\pi^2 \hbar^2}{6m} |\Psi(x)|^2 \right] \Psi(x) = \lambda \Psi(x) \quad (3.1.3)$$

利用  $\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{-i\lambda t/\hbar}$ , 可得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(x) + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} |\Psi(x,t)|^4 \right] \Psi(x,t) \quad (3.1.4)$$

这就是修正的 GP 方程<sup>[6]</sup>。

若考虑外势场为双势阱的情况,体系波函数可采用双模近似。将双模近似下的波函数代入到修正的 GP 方程中,并利用方程 (3.1.3) 与 (3.1.4), 我们得到:

$$i\hbar \frac{dc_1}{dt} = \left( E_1^0 + U_1 N_1^2 - 4N_1 \sqrt{N_1 N_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) P_1 \right) c_1 - \left( K + P_1 N_1^2 + P_2 N_2^2 \right) c_2 \quad (3.1.5)$$

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = \left( E_2^0 + U_2 N_2^2 - 4N_2 \sqrt{N_1 N_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) P_2 \right) c_2 - \left( K + P_2 N_2^2 + P_1 N_1^2 \right) c_1 \quad (3.1.6)$$

即 TG 气体下的玻色约瑟夫森结 (BJJ) 方程。其中:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \\
 E_{1,2}^0 &= \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi_{1,2})^2 + V_{ext} \psi_{1,2}^2 \right] dx, \\
 U_{1,2} &= \gamma \int dx |\psi_{1,2}(x)|^6, \\
 \mathbf{K} &= - \int dx \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi_1 \nabla \psi_2 + \psi_1 V_{ext} \psi_2 \right), \\
 \mathbf{P}_1 &= -\gamma \int dx \psi_1^5 \psi_2, \quad \mathbf{P}_2 = -\gamma \int dx \psi_1 \psi_2^5
 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

在推导中我们保留含  $\psi_1^6$  与  $\psi_1^5 \psi_2$  项的积分，忽略左右阱中其它局域波函数的交叠积分。 $E_{1,2}^0$  是左右势阱中的零点能量， $U_{1,2}$  为原子间的自相互作用能量， $\mathbf{K}$  为通常的隧穿率，而  $\mathbf{P}_{1,2}$  可改写为  $\int dx \psi_1(x) [\gamma \psi_{1,2}^4(x)] \psi_2(x)$ ，理解为在非线性有效势  $\gamma \psi_{1,2}^4(x)$  中的隧穿， $\mathbf{P}_{1,2}$  称为非线性隧穿率。

我们看到与先前人们研究弱相互作用得到的BJJ方程不同的是<sup>[7]</sup>：在强相互作用TG气体中，由于  $U_{1,2}$  中参数  $\gamma$  远大于一般相互作用中的  $g$  因子，且系数为其原子数的平方，但代表体系的零点能量、隧穿率都不变，这样等价于减弱了原子在左右势阱中的隧穿，更容易获得宏观量子自俘现象。

由BJJ方程，可以得到关于分数布居数与位相差的方程。为了方便推导，用另一种形式记  $c_i(t) = \sqrt{N_i} e^{i\theta_i} = r_i(t) e^{i\theta_i(t)}$ ,  $i=1,2$ 。代入到方程(3.1.5)中，得：

$$i\hbar(\dot{r}_1 + i\dot{\theta}_1 r_1) e^{i\theta_1} = r_1 e^{i\theta_1} (E_1^0 + U_1 N_1^2 - 4N_1 \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta_{\mathbf{P}_1}) - r_2 e^{i\theta_2} (\mathbf{K} + \mathbf{P}_1 N_1^2 + \mathbf{P}_2 N_2^2)$$

利用方程两边实部、虚部分别相等，得：

$$\hbar \dot{r}_1 = -r_2 \sin \theta (\mathbf{K} + \mathbf{P}_1 N_1^2 + \mathbf{P}_2 N_2^2) \tag{3.1.8}$$

与

$$-\hbar \dot{\theta}_1 = (E_1^0 + U_1 N_1^2 - 4N_1 \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta_{\mathbf{P}_1}) - \frac{r_2}{r_1} \cos \phi (\mathbf{K} + \mathbf{P}_1 N_1^2 + \mathbf{P}_2 N_2^2) \tag{3.1.9}$$

类似地，由方程(3.1.6)我们可以得出：

$$\hbar \dot{r}_2 = r_1 \sin \phi (\mathbf{K} + \mathbf{P}_1 N_1^2 + \mathbf{P}_2 N_2^2) \tag{3.1.10}$$

与

$$-\hbar \dot{\theta}_2 = (E_2^0 + U_2 N_2^2 - 4N_2 \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta_{\mathbf{P}_2}) - \frac{r_1}{r_2} \cos \phi (\mathbf{K} + \mathbf{P}_1 N_1^2 + \mathbf{P}_2 N_2^2) \tag{3.1.11}$$

由方程(3.1.8)与(3.1.10)得：

$$\hbar \dot{\eta} = -2\sqrt{1-\eta^2} \left[ \mathbf{K} + \frac{1}{4} N^2 (\mathbf{P}_1 (1+\eta)^2 + \mathbf{P}_2 (1-\eta)^2) \right] \sin \theta; \tag{3.1.12}$$

由方程(3.1.9)与(3.1.11)得：

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\theta} = & \Delta E + \frac{1}{2} N^2 (U_1 + U_2) \eta + \frac{1}{4} N^2 (U_1 - U_2) \eta^2 - N^2 \sqrt{1 - \eta^2} [(1 + \eta) P_1 - (1 - \eta) P_2] \cos \theta \\ & + \frac{2\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left[ K + \frac{1}{4} N^2 (P_1 (1 + \eta)^2 + P_2 (1 - \eta)^2) \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

其中

$$\Delta E = (E_1^0 - E_2^0) + \frac{U_1 - U_2}{4} N^2 \quad (3.1.14)$$

这组方程包含丰富的物理，在以往研究BEC中<sup>[3]</sup>，由于非线性隧穿率对隧穿的贡献很小，所以常被忽略。但在研究强相互作用的TG气体时，非线性隧穿率 $P_{1,2}$ 对隧穿起很大作用，影响左右阱中原子的隧穿。以往位相变化只与分数布居数的一次有关，在强相互作用的TG气体中我们看到它不仅与分数布居数的一次有关，还与其二次方有关。特别是在不对称的双势阱中，我们将更容易观察到分数布居数对相位的影响。

特别地，如果我们考虑外势阱为对称的双势阱，则 $E_1^0 = E_2^0 = E^0$ ， $U_1 = U_2 = U$ ， $P_1 = P_2 = P$ ，方程(3.1.12)与(3.1.13)约化为：

$$\hbar \dot{\eta} = -2\sqrt{1 - \eta^2} \left[ K + \frac{1}{2} N^2 P (1 + \eta^2) \right] \sin \theta; \quad (3.1.15)$$

$$\hbar \dot{\theta} = UN^2 \eta + \frac{2\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left[ K + \frac{1}{2} N^2 P (3\eta^2 - 1) \right] \cos \theta \quad (3.1.16)$$

我们重新标度时间尺度 $2Kt \rightarrow t$ ，并作无量纲化处理( $\hbar = m = 1$ )，得：

$$\dot{\eta} = -\sqrt{1 - \eta^2} [1 + \chi(1 + \eta^2)] \sin \theta; \quad (3.1.17)$$

$$\dot{\theta} = \zeta \eta + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} [1 + \chi(3\eta^2 - 1)] \cos \theta \quad (3.1.18)$$

其中：

$$\chi = \frac{N^2 P}{4K}, \quad \zeta = \frac{UN^2}{2K} \quad (3.1.20)$$

由经典的正则方程 $\dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$ ， $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \eta}$  我们可导出体系的哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2} \zeta \eta^2 - \sqrt{1 - \eta^2} [1 + \chi(1 + \eta^2)] \cos \theta \quad (3.1.21)$$

此种情况下，发生宏观量子自俘获现象的条件是：

$$H_0 = H(\eta(0), \theta(0)) > H(0, \pi), \quad (3.1.22)$$

即：

$$\frac{1}{2} \zeta \eta(0)^2 - \sqrt{1 - \eta(0)^2} [1 + \chi(1 + \eta(0)^2)] \cos[\theta(0)] > 1 + \chi \quad (3.1.23)$$

得：

$$\zeta > \zeta_c = 2 \left( (1 + \chi) \frac{1 + \sqrt{1 - \eta(0)^2} \cos[\theta(0)]}{\eta(0)^2} + \chi \sqrt{1 - \eta(0)^2} \cos[\theta(0)] \right) \quad (3.1.24)$$

$\zeta_c$  为发生MQST现象的临界条件。

### 3.1.2 作图讨论

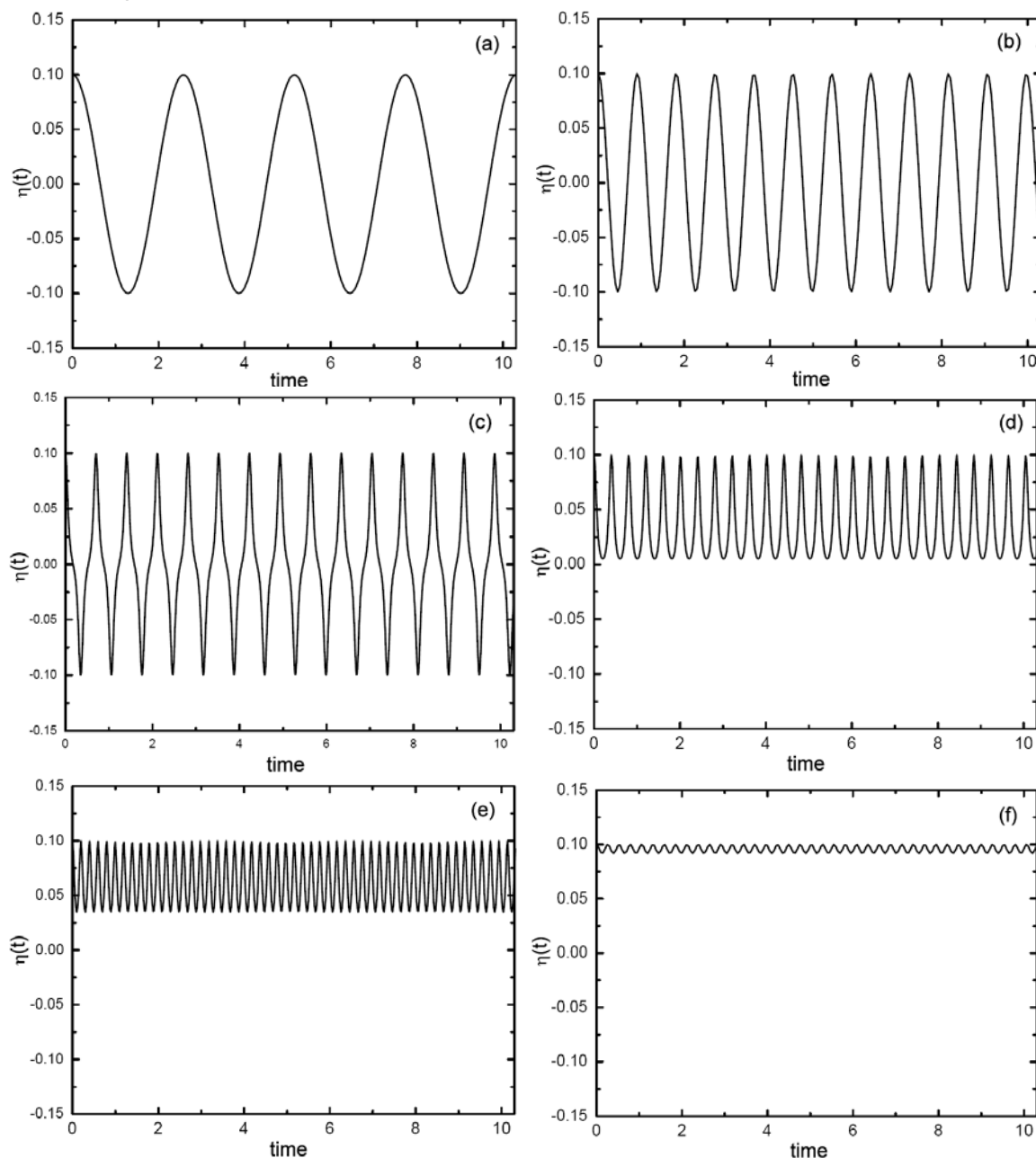


图-3.1 分数布居数  $\eta(t)$  随时间的演化图。初始条件是  $\eta(0)=0.1$  和  $\theta(0)=0$ , (a)  $\zeta=5$ ,  $x=0.001$ ; (b)  $\zeta=50$ ,  $x=0.01$ ; (c)  $\zeta=430$ ,  $x=0.086$ ; (d)  $\zeta=435$ ,  $x=0.087$ ; (e)  $\zeta=500$ ,  $x=0.1$ ; (f)  $\zeta=5000$ ,  $x=1$ 。

图中表示对称双势阱中的TG气体的分数布居数  $\eta(t)$  的时间演化，我们取

$\zeta/\chi = 5000$ ，当给定初始条件是  $\theta(0) = 0$  和  $\eta(0) = 0.1$ ，由方程(3.1.23)可解出发生 MQST 的临界值是  $\zeta = 433.785$ 。当  $\zeta$  值小于临界值时，分数布居数随时间的变化振荡(图a、b、c)；当  $\zeta$  大于此临界值时，发生 MQST 现象(图d、e、f)。

较以前弱相互作用玻色原子在双势阱得到的分数布居数随时间演化，在强相互作用下初始布居数可以更小，通过调节两阱中的原子总数，就能实现双阱中 TG 气体从约瑟夫森振荡到 MQST 现象的转变；从另一方面，在相同的初始布居数情况下，实现约瑟夫森振荡到 MQST 现象转变，TG 气体所需的原子数更少。说明强相互作用下的玻色原子，更愿意处于 Mott 绝缘态。

### 3.2 含时双势阱中 Tonks-Girardeau 气体的动力学

我们讨论 TG 气体在一个随时间变化的双阱中的动力学，可以用一维修正的 GP 方程描述：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(x,t) + \gamma |\Psi(x,t)|^4 \right] \Psi(x,t) \quad (3.2.1)$$

我们考虑外势阱为节我们考虑这样一个由磁势阱和激光势垒构成的外势： $V_{ext}(x,t) = V_{trap}(x) + V_{laser}(x,t)$ ， $V_{trap}(x)$  是一个对称谐振子势： $V_{trap}(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$ ， $\omega_0$  为谐振子频率，势垒由一个高斯状的激光势给出： $V_{laser}(x) = V_0 \exp\left[-(x - l_x)^2 / \lambda^2\right]$ ， $l_x(t)$  表示激光的位置，势垒移动的速度为： $v = \frac{dl_x(t)}{dt}$ 。

外势阱可等效为一个含时的双势阱，体系波函数采用双模近似，代入方程(3.2.1)中，得：

$$i\hbar \frac{dc_1}{dt} = \int dx \psi_1 \left[ H_0(t) + \gamma |\Psi|^4 \right] \Psi \quad (3.2.2)$$

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = \int dx \psi_2 \left[ H_0(t) + \gamma |\Psi|^4 \right] \Psi \quad (3.2.3)$$

即外势为含时的 TG 气体的玻色约瑟夫森结方程。由方程(3.2.2)与(3.2.3)可得关于分数布居数差与位相差的方程。为了方便推导，用另一种形式记  $c_i(t) = \sqrt{N_i} e^{i\theta_i} = r_i(t) e^{i\theta_i(t)}$ ， $i = 1, 2$ 。代入到方程(3.2.2)中，并利用方程两边实部与虚部分别相等得：

$$\begin{aligned} \hbar \dot{r}_1 = r_2 \sin \theta \int dx \psi_1 \left[ H_0(t) + \gamma \left( r_1^4 \psi_1^4 + r_2^4 \psi_2^4 + 4r_1^2 r_2^2 \cos^2 \theta \psi_1^2 \psi_2^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2r_1^2 r_2^2 \psi_1^2 \psi_2^2 + 4r_1^3 r_2 \cos \theta \psi_1^3 \psi_2 + 4r_1 r_2^3 \cos \theta \psi_1 \psi_2^3 \right) \psi_2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

与



$$\begin{aligned}
 -\hbar\dot{\theta}_1 = \int dx \psi_1 \left[ H_0(t) + \gamma(r_1^4 \psi_1^4 + r_2^4 \psi_2^4 + 4r_1^2 r_2^2 \cos^2 \theta \psi_1^2 \psi_2^2 + 2r_1^2 r_2^2 \psi_1^2 \psi_2^2 \right. \\
 \left. + 4r_1^3 r_2 \cos \theta \psi_1^3 \psi_2 + 4r_1 r_2^3 \cos \theta \psi_1 \psi_2^3) \psi_2 \right] \left( \psi_1 + \frac{r_2}{r_1} \cos \theta \psi_2 \right) \quad (3.2.5)
 \end{aligned}$$

类似地，由方程(3.2.3)我们可得：

$$\begin{aligned}
 \hbar\dot{r}_2 = -r_1 \sin \theta \int dx \psi_2 \left[ H_0(t) + \gamma(r_1^4 \psi_1^4 + r_2^4 \psi_2^4 + 4r_1^2 r_2^2 \cos^2 \theta \psi_1^2 \psi_2^2 \right. \\
 \left. + 2r_1^2 r_2^2 \psi_1^2 \psi_2^2 + 4r_1 r_2^3 \cos \theta \psi_1 \psi_2^3 + 4r_1^3 r_2 \cos \theta \psi_1^3 \psi_2) \psi_1 \right] \quad (3.2.6)
 \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}
 -\hbar\dot{\theta}_2 = \int dx \psi_2 \left[ H_0(t) + \gamma(r_2^4 \psi_2^4 + r_1^4 \psi_1^4 + 4r_1^2 r_2^2 \cos^2 \theta \psi_1^2 \psi_2^2 + 2r_1^2 r_2^2 \psi_1^2 \psi_2^2 \right. \\
 \left. + 4r_1 r_2^3 \cos \theta \psi_1 \psi_2^3 + 4r_1^3 r_2 \cos \theta \psi_1^3 \psi_2) \psi_1 \right] \left( \psi_2 + \frac{r_1}{r_2} \cos \theta \psi_1 \right) \quad (3.2.7)
 \end{aligned}$$

由方程(3.2.4)与(3.2.6)得：

$$\begin{aligned}
 \hbar\dot{\eta} = -2\sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \int dx \psi_1 \left[ H_0(t) + \gamma N^2 \psi_1^4 + 4\gamma N \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta \psi_1^3 \psi_2 \right. \\
 \left. + 2\gamma N_1 N_2 \psi_1^2 \psi_2^2 (\cos 2\theta + 2) - 2\gamma N_1 N_2 \psi_1^4) \psi_2 \right] \quad (3.2.8)
 \end{aligned}$$

由方程(3.2.5)与(3.2.7)得：

$$\begin{aligned}
 \hbar\dot{\theta} = \gamma(N_1^2 - N_2^2) \int dx \psi_1^6 + 4\gamma \cos \theta \sqrt{N_1 N_2} (N_1 - N_2) \int dx \psi_1^5 \psi_2 \\
 + \gamma(N_2^2 - N_1^2) \int dx \psi_1^4 \psi_2^2 + 4\gamma \cos \theta \sqrt{N_1 N_2} (N_2 - N_1) \int dx \psi_1^3 \psi_2^3 + Fl_x(t) \\
 + \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int dx \psi_1 \left[ H_0(t) + \gamma N^2 \psi_1^4 + 4\gamma N \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta \psi_1^3 \psi_2 \right. \\
 \left. + 2\gamma N_1 N_2 \psi_1^2 \psi_2^2 (\cos 2\theta + 2) - 2\gamma N_1 N_2 \psi_1^4) \psi_2 \right] \cos \theta \quad (3.2.9)
 \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 F = \int d\bar{r} \left[ \psi_1^2(\bar{r}) - \psi_2^2(\bar{r}) \right] \frac{\partial}{\partial l_x} V_{laser}, \\
 \simeq m\omega_0^2 \int dx \left[ \psi_1^2(\bar{r}) - \psi_2^2(\bar{r}) \right] x \quad (3.2.10)
 \end{aligned}$$

即激光势垒向  $x$  轴一侧移动等价于谐振子势阱向相反方向移动。 $Fl_x(t)$  表示由激光势垒所在位置不同造成两阱化学势不同对位相差的影响。

我们保留含  $\psi_1^6$  与  $\psi_1^5 \psi_2$  项的积分，忽略左右阱中其它局域波函数的交叠积分，方程(3.2.8)与(3.2.9)可化为：

$$\hbar\dot{\eta} = \frac{2E_J^0}{N} \sqrt{1-\eta^2} \sin \theta + E_J^1 (1+\eta^2) \sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \quad (3.2.11)$$

$$\hbar\dot{\theta} = Fl_x(t) - \frac{N^2 E_c}{2} \eta - \frac{2E_J^0}{N} \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos \theta + E_J^1 \frac{1-3\eta^2}{\sqrt{1-\eta^2}} \eta \cos \theta \quad (3.2.12)$$

其中

$$E_c = 2\gamma \int dx \psi_1^6, \quad (3.2.13)$$

代表原子在 1 阱中的原子自相互作用能，

$$E_J^0 = -N \int dx \psi_1 H_0 \psi_2, \quad (3.2.14)$$

代表 Josephson 隧穿能。

$$\begin{aligned} E_J^1 &= -\gamma N^2 \int dx \psi_1^5 \psi_2 \\ &= -\int dx \psi_1 (\gamma N^2 \psi_1^4) \psi_2 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

可理解为 TG 原子在非线性有效势  $\gamma N^2 \psi_1^4$  中的隧穿，称其为非线性隧穿。

由此我们得到了势垒移动情况下强相互作用 TG 区的动力学方程，该方程可用于研究束缚在该阱中 TG 原子气体的约瑟夫森效应。

## 总结与展望

我们利用修正的GP方程，导出了双势阱中的TG气体的玻色约瑟夫森结方程、分数布居数和位相差随时间演化的方程。特别地考虑了对称双势阱中的情况，得出了发生宏观量子自俘现象的条件，并给以图像说明；导出了势垒移动情况下强相互作用TG区的动力学方程，该方程可用于研究束缚在该阱中TG原子气的约瑟夫森效应，目前我们的研究工作还在继续。

外势阱对束缚在其中的原子的动力学有很重要的影响，上面我们只是讨论双势阱中的情形，若变换外势阱，如加一个外势是一个三势阱，会有更有趣的物理现象发生；物理上自旋是原子的另一个自由度，本文讨论时忽略了原子的自旋，考虑自旋对系统处于两种状态的影响，将会有不同的判据；我们还可以研究在以上情形中，两种或多种不同种类的TG玻色子的混合，将会有更丰富的物理现象。由于TG气体是被限制在一维，比较容易在实验上操控，类似这样的物理现象很容易在实验上被观测到。

## 参考文献:

- [1] BOSE S N. Planck's law and light quantum hypothesis[J]. *Z Phys*, 1924, **26**: 178-181.
- [2] EINSTEIN A, SITZUNGSBER K, PREUSS, et al. *Phys Math Kl*, 1924, **22**: 261.
- [3] ANDERSON M H, ENSHER J R, MATTHEWS M R, et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. *Science*, 1995, **269**: 198-201.
- [4] GROSS E P. Structure of a quantized vortex in boson systems[J]. *Nuovo Cimento*, 1961, **20**: 454-477; *J Math Phys*, 1963, **4**: 195.
- [5] PITAEVSKII L P, Vortex lines in an imperfect Bose gas[J]. *Sov Phys JETP*, 1961, **13**: 451-454.
- [6] KOLOMEISKY E B, NEWMAN T J, STRALEY J P, et al. Low-dimensional Bose liquids: beyond the Gross-Pitaevskii approximation [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**: 1146-1149.
- [7] SMERZI A, FANTONI S, GIOVANAZZI S, et al. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **79**: 4950-4953.
- [8] ANKER TH, ALBIEZ M, GATI R, et al. Nonlinear self-trapping of matter waves in periodic potentials[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **94**: 020403(4).
- [9] ALBIEZ M, GATI R, FOLLING J, et al. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **95**: 010402(4).
- [10] GIOVANAZZI S, SMERZI A, FANTONI S. Josephson effects in dilute Bose-Einstein condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**: 4521-4524.
- [11] LEVY S, LAHOUD E, SHOMRONI I. The a.c. and d.c. Josephson effects in a Bose-Einstein condensate[J], *Nature*, 2007, **449**: 579-583.
- [12] CAMPO A, MUGA J G. Dynamics of a Tonks-Girardeau gas released from a hard-wall trap[J]. *Euro phys Lett*, 2006, **74**: 965-971.
- [13] ROJO A J, COHEN J L, BERMAN P R. Talbot oscillations and periodic focusing in a one-dimensional condensate[J]. *Phys Rev A*, 1999, **60**: 1482-1490.
- [14] DALFOVO F, GIORGINI S, PITAEVSKII L P, et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases[J], *Rev Mod Phys*, 1999, **71**: 463-512.

- [15] BOGOLIUBOV N. *J Phys*, 1947, **11**: 23.  
 BOGOLIUBOV N. In: *Lectures on Quantum Statistics*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York (1970) Vol I: Quantum Statistics, Ch. 3.5, Eq. (3.81) .
- [16] INOUE S, ANDREWS M R, STENGER J, et al. Observation of Feshbach resonances in a Bose Einstein condensate[J], *Nature* 1998, **392**: 151-154.
- [17] ROBERTS J L, CLAUSSEN N R, CORNISH S L, et al. Controlled collapse of a Bose-Einstein condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **86**: 4211-4214.
- [18] PETHICK C J, SMITH H. *Bose-Einstein Condensation In Dilute Gases*[M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2002.
- [19] LIEB E H, LINIGER W. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state[J]. *Phys Rev*, 1963, **130**: 1605-1616.
- [20] TONKS L. The complete equation of state of one, two and three-dimensional gases of hard elastic spheres[J]. *Phys Rev*, 1936, **50**: 955-963.
- [21] GIRARDEAU M. Relationship between system of impenetrable bosons and fermions in one dimension[J]. *J Math Phys, (N.Y.)* 1960, **1**: 516-523.
- [22] GIRARDEAU M. Permutation symmetry of many-particle wave functions [J]. *Phys Rev*, 1965, **139**: B500-B508.
- [23] KINOSHITA T, WENGER T, DAVID S. Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas[J]. *Science*, 2004, **305**: 1125-1128.
- [24] MINGUZZI A, VIGNOLO P and TOSI M P. High-momentum tail in the Tonks gas under harmonic confinement[J]. *Phys Lett A*, 2002, **294**: 222-226.
- [25] OLSHANII M, Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 938-941.
- [26] VAIDYA H G, TRACY C A. One-particle reduced density matrix of impenetrable bosons in one dimension at zero temperature[J]. *Phys Rev Lett*, 1978, **42**: 3-6.
- [27] JOSEPHSON B D. Possible new effects in superconductive tunnelling[J]. *Phys Lett*, 1962, **1**: 251.
- [28] JAVANAINEN J. Oscillatory exchange of atoms between traps containing Bose condensates[J]. *Phys Rev Lett*, 1986, **57**: 3164-3166.
- [29] JAKSCH D, BRUDER C, CIRAC J I, et al. Cold bosonic atoms in optical lattices[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**: 3108-3111.

- [30] HENK T C, STOOFF. Bose-Einstein condensation: Breaking up a superfluid[J], *Nature*, 2002, **415**: 25-26.
- [31] GREINER M, MANDEL O, ESSLINGER T, et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms[J], *Nature* 2002, **415**: 39-44.
- [32] WILHELM, ZWERTGER. Mott–Hubbard transition of cold atoms in optical lattices[J], *J Opt B*, 2003, **5**: S9-S16.
- [33] DUPUIS N, SENGUPTA K. Superfluid to Mott-insulator transition of cold atoms in optical lattices[J]. *physica B*, 2009, **404**: 517-520.
- [34] SPEKKENS R W, SIPE J E. Spatial fragmentation of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential[J], *Phys Rev A*, 1999, **59**: 3868-3877.
- [35] RAGHAVAN S, SMERZI A, FANTONI S, et al. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects,  $\pi$  oscillations, and macroscopic quantum self-trapping [J]. *Phys Rev A*, 1999, **59**: 620-633.
- [36] ANANIKIAN D, BERGEMAN T. Gross-Pitaevskii equation for Bose particles in a double-well potential: Two-mode models and beyond[J]. *Phys Rev A*, 2006, **73**: 013604(15).
- [37] ANANIKIAN D, BERGEMAN T. Erratum: Gross-Pitaevskii equation for Bose particles in a double well potential: Two mode models and beyond[J]. *Phys Rev A*, 2006, **74**: 039905(E).
- [38] LEE C, HAI W, SHI L, et al. Chaotic and frequency-locked atomic population oscillations between two coupled Bose-Einstein condensates[J]. *Phys Rev A*, 2001, **64**: 053604-053611.
- [39] ABDULLAEV F. Coherent atomic oscillations and resonances between coupled Bose-Einstein condensates with time-dependent trapping potential[J]. *Phys Rev A*, 2000, **62**: 023613-023611.
- [40] SCHICK M. Two-dimensional system of hard-core bosons[J]. *Phys Rev A*, 1971, **3**: 1067-1073.
- [41] KOLOMEISKY E B, STRALEY J P. Renormalization-group analysis of the ground-state of dilute Bose system in d spatial dimensions[J]. *Phys Rev B*, 1992, **46**: 11749-11756.

## 附录

含时双势阱的玻色约瑟夫森结方程为：

$$i\hbar \frac{dc_1(t)}{dt} = \int d\bar{r} \psi_1(\bar{r}) [H_0(t) + g |\Psi(\bar{r}, t)|^2] \Psi(\bar{r}, t) \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{dc_2(t)}{dt} = \int d\bar{r} \psi_2(\bar{r}) [H_0(t) + g |\Psi(\bar{r}, t)|^2] \Psi(\bar{r}, t) \quad (2)$$

其中波函数  $\Psi(\bar{r}, t) = c_1(t)\psi_1(\bar{r}) + c_2(t)\psi_2(\bar{r})$ ， $N_{1,2}$  与  $\theta_{1,2}$  分别是左右阱中的原子数和相位，总原子数守恒  $N_1 + N_2 = N$ ， $c_{1,2}(t) = \sqrt{N_{1,2}(t)} e^{i\theta_{1,2}(t)}$ 。为了方便推导，用另一种形式记  $c_i(t) = r_i(t) e^{i\theta_i(t)}$ ， $i=1,2$  代入方程(1)，利用方程两边实部与虚部分别相等，得：

$$\hbar \dot{r}_1 = r_2 \sin \theta \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2 \quad (3)$$

$$-\hbar \dot{\theta}_1 = \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \left( \psi_1 + \frac{r_2}{r_1} \cos \theta \psi_2 \right) \quad (4)$$

类似地，由方程(2)得：

$$\hbar \dot{r}_2 = -r_1 \sin \theta \int d\bar{r} \psi_2 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2 \quad (5)$$

$$-\hbar \dot{\theta}_2 = \int d\bar{r} \psi_2 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \left( \psi_2 + \frac{r_1}{r_2} \cos \theta \psi_1 \right) \quad (6)$$

由方程(3)与(5)可得分数布居数方程：

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\eta} &= \hbar \frac{\dot{N}_2 - \dot{N}_1}{N} = \hbar \frac{2(r_2 \dot{r}_2 - r_1 \dot{r}_1)}{N} \\ &= -\frac{4r_1 r_2}{N} \sin \theta \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2 \\ &= -2\sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(N_1 \psi_1^2 + N_2 \psi_2^2 + 2\psi_1 \psi_2 \sqrt{N_1 N_2} \cos \theta)] \psi_2 \end{aligned} \quad (7)$$

这里由于波函数在无穷远处的概率为零，且对两个对称的势阱有：

$$\psi_1(\bar{r}) = \psi_2(-\bar{r}) \quad (9)$$

所以

$$\int d\bar{r} \psi_2 \nabla^2 \psi_1 = \int d\bar{r} \psi_1 \nabla^2 \psi_2 \quad (8)$$

$$\int d\bar{r} \psi_1^3 \psi_2 = \int d\bar{r} \psi_2^3 \psi_1 \quad (10)$$

这样：

$$\int d\bar{r} \psi_1 [g(N_1 \psi_1^2 + N_2 \psi_2^2)] \psi_2 = \int d\bar{r} \psi_1 [g(N_1 \psi_1^2 + N_2 \psi_1^2)] \psi_2 = \int d\bar{r} \psi_1 (gN \psi_1^2) \psi_2 \quad (11)$$

方程(7)化为：

$$\begin{aligned}
 \hbar \dot{\eta} &= -2\sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + gN\psi_1^2] \psi_2 - gN(1-\eta^2) \int d\bar{r} \psi_1^2 \psi_2^2 \psi_1 \sin 2\theta \\
 &= \frac{2E_J}{N} \sqrt{1-\eta^2} \sin \theta - gN(1-\eta^2) \int d\bar{r} \psi_1^2 \psi_2^2 \sin 2\theta \\
 &\cong \frac{2E_J}{N} \sqrt{1-\eta^2} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{12}$$

这里  $E_J = N \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + gN\psi_1^2] \psi_2$ ，我们忽略含  $\int d\bar{r} \psi_1^2 \psi_2^2$  的小项。

下面我们导出位相差方程，由方程(4)与(6)得：

$$\begin{aligned}
 \hbar \dot{\theta} &= \hbar \dot{\theta}_2 - \hbar \dot{\theta}_1 \\
 &= \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_1 \\
 &\quad - \int d\bar{r} \psi_2 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2 \\
 &\quad + g \int d\bar{r} \psi_1^4 r_1^2 - g \int d\bar{r} \psi_2^4 r_2^2 \\
 &\quad + \int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2 \left( \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right) \cos \theta
 \end{aligned} \tag{13}$$

将方程(13)中

$$\begin{aligned}
 &\int d\bar{r} \psi_1 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_1 \\
 &- \int d\bar{r} \psi_2 [H_0(t) + g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2
 \end{aligned}$$

分成两部分计算：

1):

$$\begin{aligned}
 &\int d\bar{r} \psi_1 [g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_1 - \int d\bar{r} \psi_2 [g(r_1^2 \psi_1^2 + r_2^2 \psi_2^2 + 2r_1 r_2 \psi_1 \psi_2 \cos \theta)] \psi_2 \\
 &= g \int d\bar{r} \psi_2^2 \psi_1^2 (r_2^2 - r_1^2) \cong 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

即我们忽略含  $\int d\bar{r} \psi_1^2 \psi_2^2$  的小项。

2):

$$\begin{aligned}
 &\int d\bar{r} \psi_1 H_0(t) \psi_1 - \int d\bar{r} \psi_2 H_0(t) \psi_2 \\
 &= \int d\bar{r} \psi_1 \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\bar{r}, t) \right] \psi_1 - \int d\bar{r} \psi_2 \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\bar{r}, t) \right] \psi_2 \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \int d\bar{r} [(\nabla \psi_1)^2 - (\nabla \psi_2)^2] \psi_1 + \int d\bar{r} V_{ext}(\bar{r}, t) (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \int d\bar{r} [(\nabla \psi_1(\bar{r}))^2 - (\nabla \psi_1(-\bar{r}))^2] \psi_1 + \int d\bar{r} V_{ext}(\bar{r}, t) (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
 &= \int d\bar{r} V_{ext}(\bar{r}, t) (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
 &= \int d\bar{r} (V_{trap}(\bar{r}) + V_{laser}(z, t)) (\psi_1^2 - \psi_2^2)
 \end{aligned} \tag{15}$$

我们假定激光势垒  $V_{laser}(z, t)$  在初始计时  $t_0 = 0$  时， $l_z = 0$ 。在经过一个小的时间  $t$  后，处在  $l_z$  位置，方程(15)进一步化为：



$$\begin{aligned}
& \int d\bar{r} (V_{\text{trap}}(\bar{r}) + V_{\text{laser}}(z, t)) (\psi_1^2 - \psi_2^2) - \int d\bar{r} (V_{\text{trap}}(\bar{r}) + V_{\text{laser}}(z, t_0)) (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
&= \int d\bar{r} (V_{\text{laser}}(z, t) - V_{\text{laser}}(z, t_0)) (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
&= \int d\bar{r} V_0 \left( e^{-(z-l_z)^2/\lambda^2} - e^{-z^2/\lambda^2} \right) (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
&\cong \int d\bar{r} V_0 \left( e^{-z^2/\lambda^2} + \frac{\partial e^{-(z-l_z)^2/\lambda^2}}{\partial l_z} l_z \right) (\psi_1^2 - \psi_2^2) - \int d\bar{r} V_0 e^{-z^2/\lambda^2} (\psi_1^2 - \psi_2^2) \\
&= l_z \int d\bar{r} \frac{\partial V_{\text{laser}}(z, t)}{\partial l_z} (\psi_1^2 - \psi_2^2) = Fl_z(t)
\end{aligned} \tag{16}$$

其中  $F = \int d\bar{r} \frac{\partial V_{\text{laser}}(z, t)}{\partial l_z} (\psi_1^2 - \psi_2^2)$ ,  $Fl_z(t)$  表示由激光势垒所在位置不同造成两阱化学势不同对位相差的影响。方程(13)化为:

$$\begin{aligned}
\hbar \dot{\theta} &\cong Fl_z(t) + g \int d\bar{r} \psi_1^4 (r_1^2 - r_2^2) + \frac{2E_J}{N} \left( \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right) \cos \theta \\
&= Fl_z(t) - \frac{2E_J}{N} \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos \theta - \frac{NE_c}{2} \eta
\end{aligned} \tag{17}$$

这里我们定义  $E_c = 2g \int d\bar{r} |\psi_1(\bar{r})|^4$ , 代表原子在 1 阱中的相互作用能。上面推导中忽略含  $\int d\bar{r} \psi_1^2 \psi_2^2$  的小项。

综上, 我们得到了分数布居数与相位差的动力学方程:

$$\hbar \dot{\eta} = (2E_J/N) \sqrt{1-\eta^2} \sin \theta \tag{18}$$

$$\hbar \dot{\theta} = Fl_z(t) - \frac{2E_J}{N} \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos \theta - \frac{NE_c}{2} \eta \tag{19}$$

## 致 谢

光阴荏苒，研究生阶段的学习生活即将结束。在理论物理所这个大家庭里，导师们兢兢业业、献身科学的精神在我心中刻下了永久的印记。很高兴自己能在这片浓厚的科研氛围和良好的工作环境中学习成长。

感谢我的导师张云波教授，在张老师的细心指导下，我充分认识到了所学专业的重要性，不仅从理论上弥补了自己以前认识的不足，深化了对专业知识的理解，而且学到了书本上没有的知识，开阔了自己的视野。这些知识的储备都为本文的写作打下了坚实的基础。从论文的选题，调研到最后的完成和修改，张老师都付出了大量的心血和智慧。导师学识广博、治学严谨、高尚的师德、平易近人的作风，都是我人生的楷模。衷心感谢张老师对我的悉心关怀和谆谆教诲！感谢您的信任和鼓励！

感谢理论所梁九卿教授、聂一行教授、李卫东教授、李禄教授、阎维贤教授、李志坚教授、张素英教授等老师的关心和帮助，让我受益匪浅。

感谢郅江瑞院长、裴建文书记、聂一行副院长、尹王保副院长等物电学院的领导对我工作、学习和生活方面给予的关怀。

感谢师姐郭利平、王红梅和师兄尹相国、张杰，每当遇到学习上的问题，总是能够得到他们热情的帮助。感谢我的学友杜磊、梁成功、解海卿、牛鹏斌、赵丽芝、赵健等人，很高兴能与他们一起走过这三年难忘的学习生活。感谢学弟吕晓龙，学妹蔚小红、李花、梁晋菊、毛丽君，正是因为有了大家积极的参与，小组的讨论才更精彩，迸发出许多思维的火花。

感谢我学习生活了七年的母校——山西大学！

张彦伟

2009年5月 太原

# 承诺书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

学位论文作者（签章）：

年 月 日