

山 西 大 学

2009 届博士研究生学位论文

光晶格中两分量冷原子
量子相变的研究

姓 名	郭 利 平
指导教师	张 云 波 教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2005 年 9 月—2009 年 6 月

二 00 九年六月

Dissertation for the Doctor's Degree
of Shanxi University in 2009

Phase Transition of Two-Component Ultra-Cold Atoms in Optical Lattices

Name	Liping Guo
Supervisor	Professor Yunbo Zhang
Major	Condensed Matter Physics
Field of Research	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2005.9—2009.6

June, 2009

目 录

中文摘要.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
第一章 绪论	1
1.1 引言.....	1
1.2 光晶格中单分量玻色气体量子相变.....	3
1.2.1 光晶格--光势阱俘获中性原子.....	3
1.2.2 光晶格中BEC的能带理论.....	5
1.2.3 量子相变.....	7
1.3 光晶格中两分量玻色气体量子相变.....	9
1.3.1 自旋有关的光晶格势.....	9
1.3.2 两分量玻色哈伯德模型.....	11
1.3.3 光晶格中两分量玻色气体的相图.....	15
参考文献.....	18
第二章 腔QED及其与原子的相互作用	23
2.1 腔量子电动力学.....	23
2.1.1 腔的介绍.....	23
2.1.2 腔与原子相互作用.....	25
2.2 单模场与二能级原子.....	28
2.2.1 Jaynes-Cummings 模型.....	28
2.2.2 单模场与 N 个二能级原子的相互作用.....	31
2.3 受激拉曼绝热通道.....	38
2.4 小结.....	42
参考文献.....	43
第三章 光晶格中两分量玻色原子在Feshbach共振附近的基态转变	45

3.1 自旋超交换哈密顿量	45
3.1.1 简并微扰法	45
3.1.2 有效哈密顿量	48
3.2 两带近似下两分量玻色哈伯德模型	52
3.2.1 两带近似下的玻色哈伯德模型哈密顿量	52
3.2.2 两带近似下绝缘区的相变	55
3.3 小结	61
参考文献	62
第四章 光晶格中冷原子自旋序的腔QED探测	63
4.1 利用腔探测单分量原子在光晶格中的量子态	63
4.1.1 系统的哈密顿量	64
4.1.2 半经典近似下的噪声特性	66
4.1.3 全量子理论下的透射光谱	71
4.2 两分量冷原子的自旋序的探测	75
4.2.1 三能级原子与两模光场相互作用	76
4.2.2 光晶格中两分量冷原子在两模光场作用下的哈密顿量	79
4.2.3 半经典近似下的噪声特性	80
4.2.4 全量子理论下的透射光谱	86
4.3 小结	93
参考文献	94
结论与展望	97
附录A	98
附录B	101
攻读博士学位期间已发表论文和待发表的论文	104
致谢	105

CONTENTS

Chinese Abstract	VII
Abstract	VIII
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Overview	1
1.2 Quantum phase transition of Bose atoms in optical lattices.....	3
1.2.1 Trapping neutral atoms with optical lattices.....	3
1.2.2 Energy band theory of BEC in optical lattices.	5
1.2.3 Quantum phase transition	7
1.3 Quantum phase transition of two-component Bose gas in optical lattices.....	9
1.3.1 Spin-dependent optical lattices.....	9
1.3.2 Two-component Bose Hubbard model.....	11
1.3.3 Phase diagram of two-component Bose gas in optical lattices.....	15
References.....	18
Chapter 2 Cavity quantum electrodynamics and interaction between cavity and atoms	23
2.1 Cavity QED	23
2.1.1 A brief introduction to cavity.....	23
2.1.2 Interaction between cavity and atoms	25
2.2 Single-mode field and two-level atoms.....	28
2.2.1 Jaynes-Cummings model.....	28
2.2.2 Single-mode field and N two-level atoms.....	31
2.3 Stimulated Raman adiabatic passage (STIRAP)	38
2.4 Conclusion.....	42
References.....	43

Chapter 3 Ground state competition of two-component bosons in an optical lattice near a Feshbach resonance	45
3.1 Spin exchange Hamiltonian	45
3.1.1 Degenerate perturbation method	45
3.1.2 Effective spin exchange Hamiltonian	48
3.2 Two-component Bose Hubbard model in two-band approximation.....	52
3.2.1 Two-band Hamiltonian.....	52
3.2.2 Singlet-Triplet phase transition in Mott-insulator regime.....	55
3.3 Conclusion.....	61
References.....	62
Chapter 4 Cavity-enhanced detection of magnetic orders in lattice spin models	63
4.1 Transmission spectra probing of quantum phases of ultracold atoms in optical lattices.....	63
4.1.1 The Hamiltonian.....	64
4.1.2 Noise properties in semi-classical approximation.....	66
4.1.3 Transmission spectra with a fully quantized method.....	71
4.2 Probing quantum phases of two-component atoms coupled with two cavities....	75
4.2.1 A three-level atom coupled with two cavities.....	76
4.2.2 Hamiltonian of two-component atoms interacting with two cavity modes.....	79
4.2.3 Noise Properties in semi-classical approximation.....	80
4.2.4 Transmission spectra of Mott-Insulator and Superfluid phases.....	86
4.3 Conclusion.....	93
References.....	94
Summary and outlook	97
Appendix A	98

Appendix B	101
Papers published during doctoral learning	104
Acknowledgement	105

中 文 摘 要

最近二十年来，光晶格中超冷原子相变的研究在理论和实验两方面都取得了很大进步。通过用两分量 Bose-Hubbard 模型来描述光晶格中的两种玻色气体系统已经展示出了丰富的内容，为可控的量子磁学打开了一扇门。另一方面，通过 Feshbach 共振技术调节原子间的相互作用为我们研究多能带占据系统提供了可能。

我们研究了绝缘区域每个格点上占据数为 2 且等量混合的两分量玻色原子的基态性质，发现了由于基态竞争引起的新自旋三重态——单态量子相变。当同一格点中原子与原子间相互作用较弱时，两个原子倾向于处在最低能带。在最近邻格点间有弱的隧穿时，系统可投影到一个有效的自旋铁磁交换模型。当通过调节 Feshbach 共振使原子与原子间相互作用变得足够大时，第二能带将被占据。由于哈密顿量中的轨道耦合项 S^+S^- ，同一格点不同轨道上的两个原子形成单态。对于非 SU(2) 对称的模型，对应于相分离或超对流，光晶格中的冷原子可能在实验上模拟易轴或易平面的凝聚态铁磁模型。

根据最近的理论和实验上对单分量量子气体研究的发展，我们构建了一个探测两分量玻色原子自旋关联的模型。在腔模光场中透射光谱的线性理论下，晶格中两分量玻色原子的不同磁相能够被清楚地区分出来。研究发现在占据数为 1 的两分量玻色原子的 Mott 绝缘态中出现的三个不同量子相：反铁磁相、铁磁相、XY 相与腔的透射光子数密切相关。我们的研究方案在目前冷原子实验中有望直接被实现。

关键词：光晶格；两分量冷原子；量子相变；自旋超交换；腔 QED；透射光谱；噪声

Phase Transition of Two-Component Ultra-Cold Atoms in Optical Lattices

Liping Guo (Condensed Matter Physics)

Directed by Prof. Yunbo Zhang

ABSTRACT

The study of phase transitions of ultra-cold atoms in optical lattices has made great progress both theoretically and experimentally in the last decades. Two-species bosons in optical lattices described by the two-component Bose-Hubbard model may exhibit rich behaviour, opening the door to controlled studies of quantum magnetism. On the other hand, the interactions between atoms can be tuned by Feshbach resonance which enables the study of multiband occupied systems.

Firstly, we investigate the ground-state properties of an equal mixture of two species of bosons in its Mott-insulator phase at a filling factor of two per site. One novel of spin triplet-singlet transition is identified through the competition of the ground state. For a weak on-site interaction the two particles prefer to stay in the lowest band and with weak tunneling between neighboring sites the system is mapped into an effective spin-1 ferromagnetic exchange Hamiltonian. When the interaction is tuned by a Feshbach resonance to be large enough, the higher band will be populated. Due to the orbital coupling term S^+S^- in the Hamiltonian, the two atoms in different orbits on a site would form an on-site singlet. For a non-SU (2) symmetric

model, easy-axis or easy-plane ferromagnetic spin exchange models may be realized, corresponding to phase separation or counterflow superfluidity, respectively.

Secondly, we develop a general scheme for detecting spin correlations inside a two-component lattice gas of bosonic atoms, stimulated by the recent theoretical and experimental advances on analogous systems for a single component quantum gas. Within a linearized theory for the transmission spectra of the cavity mode field, different magnetic phases of a two-component (spin 1/2) lattice bosons become clearly distinguishable. In the Mott-insulating (MI) state with unit filling for the two-component lattice bosons, three different phases: antiferromagnetic, ferromagnetic, and the XY phases are found to be associated with drastically different cavity photon numbers. Our suggested study can be straightforwardly implemented with current cold atom experiments.

Key Words: Optical lattices; Two-component ultra-cold atoms; Quantum phase transition; Spin super-exchange; Cavity quantum electrodynamics (QED); Transmission spectra; Noise function

第一章 绪 论

第一节 引 言

1924年玻色和爱因斯坦在理论上预言了玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein Condensate, 简称为BEC)现象[1],[2], 即当原子的温度足够低时, 无相互作用的玻色子会在最低能量量子态上聚集, 达到可观的数量。在这种状态下, 所有的原子如同一个原子, 具有完全相同的物理性质。随着实验技术, 特别是激光冷却技术的发展, 威依迈(Wieman)和科纳尔(Cornell)的研究小组于1995年6月在铷(^{87}Rb)原子蒸气中第一次直接观测到玻色-爱因斯坦凝聚。BEC理论和实验的发展为我们对冷原子系统的研究提供了依据。

在位置空间中调制激光场可产生束缚中性原子的周期势阱, 这为我们进一步研究冷原子提供了最简单方法。光晶格技术起源于对原子的偏振梯度冷却及亚光子反弹冷却的实验中。近几年来, 这种技术已逐渐被应用到超冷原子及BEC的操控与量子相变的研究中。例如, 对于一维系统, 实验上可以通过叠加两束相对而行、线性极化对射的激光形成驻波, 来捕获冷原子, 这样形成的周期势阱称之为光晶格。与光阱类似, 光学晶格能捕获和控制处于所有超精细自旋态的原子, 为研究BEC的自旋与磁特性提供了技术上的保证。此外, 光晶格还具有另一重要特性——空间周期性。原子在光晶格中的运动类似于电子在固体晶格场中的运动。因此, 光晶格中超冷原子的研究也为研究一些类固体物理现象提供了理想工具。这一实验的理论解释用玻色哈伯德(Bose-Hubbard)模型描述[3], 这一模型也是我们研究工作中重要的依据。德国的研究小组Greiner等人首次在实验上观察到玻色—爱因斯坦凝聚体在光晶格中从超流态到Mott—绝缘态转变的量子相变现象[4]。这一重要的实验进展不仅在理论上具有重大的研究价值, 而且为BEC的应用开辟了新途径。光晶格还有许多实验上的应用, 例如利用稀疏填充的光晶格观察光的布拉格散射[3,5]或布洛赫振荡[6]; 用光晶格囚禁原子作为量子模拟器[7]或观察量子隧穿[8]等。光晶格也有许多实际的应用, 如光晶格BEC的自发磁化现象可能应用在弱磁场探测及磁传感器等技术领域; 其自旋波的激发、控制与探测的研究则可能为量子计算及量子信息处理等方面提供重要的指导。

当系统的绝对温度趋于绝对零度时，所有的热运动就会逐渐消失，这时不会发生经典意义上的相变，但是从量子力学角度看，即使是在绝对零度，根据海森堡不确定关系(Heisenberg's uncertainty relation)也会有量子波动存在。当这些波动足够强时，就会促使系统从一相向另一相转变，出现宏观量子相变。Fisher[9] 和 Jaksch [3] 等人采用 Bose-Hubbard model 在理论上论证了光晶格中单分量冷原子的相变—绝缘到超流。当多分量冷原子放置于光晶格中会出现很丰富的物理特性[10-15]，研究多分量玻色子或费密子在光晶格中的相变问题为目前工作的热门之一。占据数为整数的两分量玻色子存在五种超流和绝缘的基态[11]，在绝缘相会产生铁磁、反铁磁和 XY 相三种态[11-13][16]。绝缘相自旋为 1 的玻色子由于平均占据数以及自旋交换值会出现 nematic singlet[18]和 dimerized 态[18]。

迄今为止，多分量系统的绝缘相可被表述成自旋动力学的有效哈密顿量的形式[12-13]。以前的工作主要集中在单带近似，只考虑基态，忽略了上能带的影响。最近，Köhl 等人研究了费密气体 ^{40}K 两分量混合时，调节 Feshbach 共振，可以获得很强的相互作用，而且和最低的几个能带相耦合[19]。2006 年初，Ho[20]在理论上分析了布洛赫能带在只考虑最低的两个能带--即两带近似的情况，两分量的费密气体在平均占据数为 2 的绝缘区，通过调节 Feshbach 共振使得相互作用由弱变强，发现基态和第一激发态在 $U/\Delta \approx 1.19$ 时相交，证明了存在量子相变。这种多分量多能带的模型也引起许多人的兴趣[21-22]。

腔量子电动力学，简称腔 QED，描述束缚在一个共振腔里物质和电磁场的相干作用，为研究量子信息处理提供了一个很重要的平台。一个超精细腔实验上可产生强耦合区，使得原子和单模光场相干地多次交换一个光子。所以利用微波腔或光学腔可进行基本的研究工作。针对量子态的操控和量子信息发展的挑战，近来实验上研究原子在光学腔内的激光冷却和俘获。2007 年 Brennecke 等人实验上实现了 BEC 与超精细光学腔的量子化场的强耦合作用，并且可测量本征光谱[23]。同年 Colombe 等人研究了在芯片上光学腔中 BEC 与光场强耦合作用，预期该系统可研究量子信息光和物质相互作用界面[24]。

探测玻色爱因斯坦凝聚体特征的标准方法是研究从阱中释放出的原子间物质波的干涉[25-29]。然而这一方法会最终破坏系统。最近 Mekhov 提出了一个新的方法—系统原子数守恒情况下光学测量的方法[30]。其原理是依赖原子态的散射可直接反映

原子量子统计的现象。简单的说这种现象是原子数的变化影响了腔模的散射平移，如在一些晶格区域原子数的涨落使得腔模的频谱发生平移。而在不同的共振频率处出现的腔模透射光谱反映了原子数的分布函数。这样探测要求考虑原子的统计，例如：由光谱反映的诸如中心频率和宽度等的平均值和变化。另外在这种周期格点中光学散射能够帮助克服实验上带来的困难。与均匀的 BEC 相比[23]，从周期格点散射出来的光能帮助研究局域关联或非局域关联[31]。这种方法在研究光晶格中的量子相变问题时非常有用！

第二节 光晶格中单分量玻色气体量子相变

相对传播的几对激光束的干涉能在空间形成明暗相间的周期性场强分布，原子在其中能感受到交流 Stark 效应(光频移)，即磁偶极矩和交变的电磁场作用，这样形成的原子束缚势称为光晶格。这种势能将原子囚禁成为类晶体结构，原子在光晶格中的运动类似于电子在固体晶体中的运动。由激光形成的光晶格势，即使格点上没有原子也不会有缺陷，这里晶格常数是光波波长的数量级(微米的量级)，而不是固体晶体中原子间的距离(埃的量级)。虽然这样系统本质上没有强相互作用，但是将原子囚禁在光晶格中减少了原子动能，从而等效地增加了原子间的相互作用，因此光晶格为研究强关联的原子体系提供了一个非常有价值的实验平台。

1.2.1 光晶格—光势阱俘获中性原子

光晶格的诞生可追溯到由法国巴黎高师和美国标准技术研究院所进行的两个实验。前者研究了样品照射后探测激光束的吸收和增益；后者则测量了所捕获原子的荧光。这些实验首次给出了原子陷于一维周期性光学势阱的明确证据。两个实验都用了正交偏振的驻波配置。这个一维模拟系统是由Dalibard和Cohen-Tannoudji[32-33]在理论上提出的，他们指出可以由正交线偏振相向传播的激光形成周期格点阵列—光学晶格—来同时冷却和囚禁原子。高维光晶格可以通过不同方向传播的驻波叠加形成。

放置在磁场中的超冷中性原子，自旋被冻结，而置于光偶极阱中的冷原子和外电场之间的感生偶极矩的相互作用可将自旋态释放。例如：由激光发出的振荡电场会导致原子产生振荡偶极矩，同时与振荡偶极矩相互作用可以产生一个俘获势[34]：

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \alpha(\omega_L) |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \quad (1.1)$$

$\alpha(\omega_L)$ 是原子的极化率， $I \propto E^2(r)$ 是激光场的强度， $E(\mathbf{r})$ 是电场在 \mathbf{r} 处的场强。通常激光频率与原子的共振频率的失谐是很大的，这使得由共振激发导致的自发辐射效应可被忽略，而且偶极势是不变量。由于驻波场中光强分布不均匀，根据激光频率失谐不同，偶极力把原子推向波节或波腹： $\Delta > 0$ ($\Delta = \omega_L - \omega_a$)，推向波节； $\Delta < 0$ ，推向波腹[35]。这种力是周期性的，以光的半波长为周期。如一维的光晶格可以通过两个反方向传播的相干激光叠加形成，两束光的干涉可以形成驻波(周期 $\lambda_L/2$)，由此可俘获原子。增加更多的激光来干涉，我们可以得到 1D、2D、3D 周期势；由一对激光产生的 1D 晶格是一个简单的驻波干涉图案，如图 1.1 (a)：

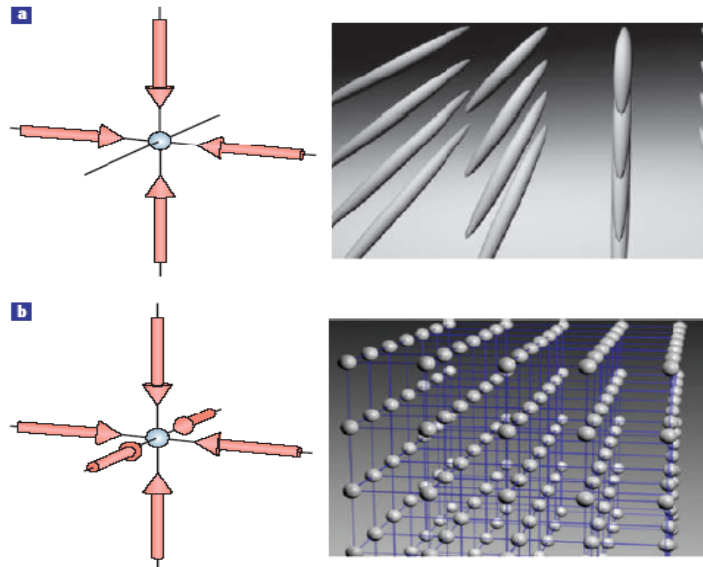


图1.1 六束相互正交的激光产生的一、三维晶格，引自Adv. At. Mol. Opt. Phys. (2002) 42, 95-170。

在这些势阱中的原子仅能沿着束缚势弱的轴运动，因此在足够低的温度下会实现完全冻结在径向运动的一维量子行为。而对应 3D 简单的立体晶体(图 1.1, b 所示)，每个束缚阱像紧束缚的谐振子势。

利用光场产生的周期束缚势的一个重要优点是势阱的几何性质和深度是可完全被操控的。例如：束缚势的几何性质可以通过不同角度的干涉激光来实现，由此可以产生更多复杂的晶格，如 Kagome lattices 等。而在实验操作过程中光势阱的深度甚至可以通过简单增加或降低激光的强度来调节，所以使基本的相变的动力学的实

验研究成为现实。

由一系列驻波形式的每个周期势是

$$V_{lat}(x) = V_0 \sin^2(k_L x) \quad (1.2)$$

其中 $k_L = 2\pi/\lambda_L$ 是用于形成驻波的激光的波矢量， V_0 代表了势阱的深度，通常是以反冲能量为单位的(这里 $E_R = \hbar^2 k_L^2 / 2m$ 表示从激光束中吸收一个光子得到的能量，称作反冲能量，作为能量的基本单位， m 是一个中性原子的质量)，这是周期势场中中性原子的能量尺度。一般来说两束激光光束在夹角小于 180° 范围内，可以实现更长周期的周期势。

光晶格对原子的操控技术，不但可以用来研究 BEC 的自旋和磁性特性[36]等，还可进行量子计算[37]，对量子信息存储有重要意义。由于光晶格的周期性结构以及势阱深度可以人为地调节，能够改变凝聚体原有的相干性质，从而可研究系统量子相变问题[4]。

1.2.2 光晶格中BEC的能带理论

首先我们研究一团BEC在光晶格中的本征态。这里我们只考虑周期晶格势的影响(考虑外势的情况参考[36-39])。根据Bloch定理，周期性势的存在会使系统呈现能带结构，但由于非线性项的存在它的能带结构不同于固体中Bloch电子的能带，而较之有一定的扭曲，同时也影响了其他量诸如拉比(Rabi)频率、Bloch振荡振幅以及隧穿几率等的大小。

超冷原子(如钠)在一维光晶格中的势能如式(1.2)。在 $V_0 \gg E_R$ 的情况下，每个阱具有许多的振动能级，能隙 $\hbar\omega_0 \gg E_R$ 。在低温条件下，原子被束缚在最低振动能级上。除了很小的跃迁至最近邻格点的能量外其它动能被冻结。最低能带的单粒子本征态是准动量为 q_x 的Bloch波，能量为

$$\varepsilon_0(\mathbf{q}) \approx \frac{3}{2} \hbar\omega_0 - 2J(\cos q_x d) \quad (1.3)$$

晶格常数 $d = \pi/q_x$ ，参数 $J > 0$ 描述近邻跃迁的动能。在极限 $V_0 \gg E_R$ ，据一维的Mathieu方程以及第一能带宽为 $W \rightarrow 4J$ 可得到

$$J \simeq \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_R \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{3/4} \exp \left[-2 \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{1/2} \right]$$

一般任意周期势 $V_p(x+R)=V_p(x)$ ，本征态是Bloch函数 $\psi_{n,q_x}(x)$ 。它具有分立的能带指标 n 和在倒格矢第一布里渊区的准动量 q_x [33]。因为平移晶格矢 R ，Bloch函数需与纯相位因子 $\exp(iq_x R)$ 相乘，这样我们可拓展到整个晶格。引入Wannier函数 $w_{n,R}(x)$ ，通过Fourier变化，本征函数可写成

$$\psi_{n,q_x}(x) = \sum_R w_{n,R}(x) e^{iq_x R} \quad (1.4)$$

其中 Wannier 函数 $w_{n,R}(x)$ 对于不同能带和格点满足正交归一性

$$\int dx w_n^*(x-R) w_{n'}(x-R') = \delta_{n,n'} \delta_{R,R'} \quad (1.5)$$

对于光格子中BEC的描述可以采用如下的完全哈密顿量：

$$H_{tot} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \sum_{j=1}^3 V_{j0} \sin^2 \left(\frac{\pi x_j}{a} \right) + g |\Phi(\mathbf{r})|^2 \quad (1.6)$$

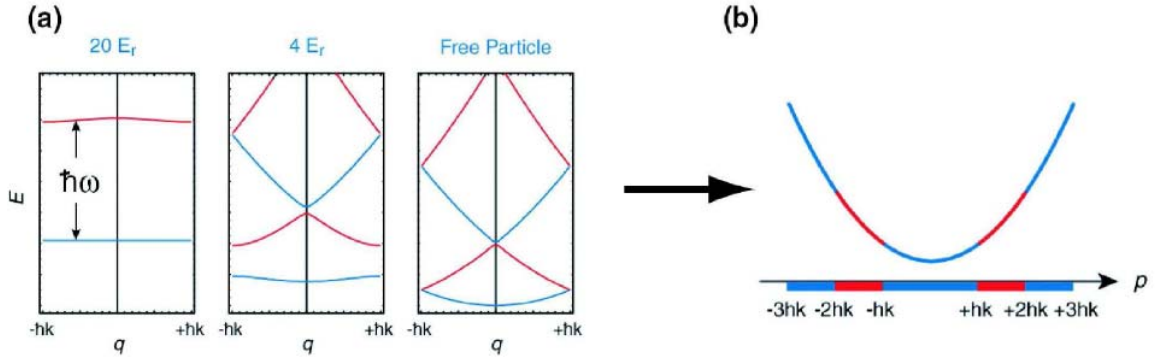


图1.2 (a) 不同阱深的光格子对于能带结构：阱深分别为 $20E_r$ ， $4E_r$ 和 $0E_r$ 。在这个绝热演化过程，准动量是守恒的； (b) 第 n 能带上准动量为 q 的Bloch波函数，等效于晶格第 n 个布里渊区动量为 p 的自由粒子。引自Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).

相互作用参数 g 由下式给出

$$g = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m}$$

$\Phi(\mathbf{r})$ 是凝聚体在位置 \mathbf{x} 处的波函数。若原子气体非常稀薄，原子间相互作用势可略去，则我们得到的光格子中超冷原子的能带类似于固体物理学中 Bloch 电子的能谱，如图(1.2)。阱深分别为 $20E_R$ ， $4E_R$ 和 $0E_R$ (自由粒子)。考虑到原子间相互作用势的存在，光格子中冷原子的能带将会呈现新的特点。

1.2.3 量子相变

相变是自然界普遍存在的一类突变现象[40]。通常将与温度有关的相变称作热力学相变，一般可以分为一级相变和连续相变。如果系统的绝对温度趋于零，所有的热运动将逐渐消失，但是由于海森堡(Heisenberg)不确定关系仍然会有量子涨落存在。这些微观量子涨落会促使多体系统从一个相向另一个相转变，即发生量子相变。光晶格中的超冷原子通过调节光晶格阱深使得相互“竞争”的两种相互作用能的比值 U/J 达到某一量子临界点，此时量子涨落将导致这种连续量子相变。对于三维的光晶格势，量子相变的临界条件

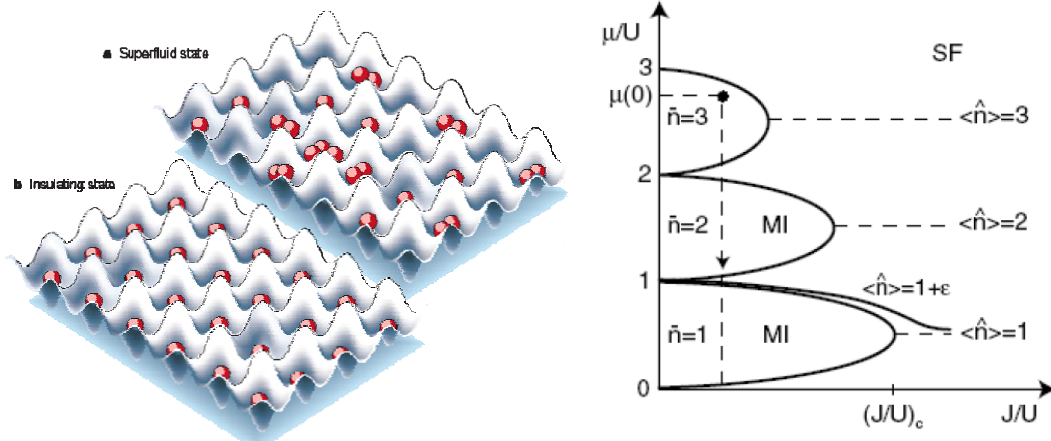


图 1.3 Bose-Hubbard 模型零温下的相图。横纵坐标分别为无量纲化的隧穿耦合与化学势。 \bar{n} 表示绝缘相中格点的平均原子数[4, 9]。

为 $(U/J)_c = 5.8z$, 其中 z 是配位数[9] [41-43]。对于不同维数和不同平均占据数下的临界条件可以参看其他文献[44-46]。在零温时，超流到绝缘体的相变在 $\mu - J$ 平面的相图包含了一系列叶型区。叶型区内(小 J 区)是 Mott 绝缘相，叶型区的外部则是超流相。根据朗道连续相变理论，超流相具有长程相位相干性，

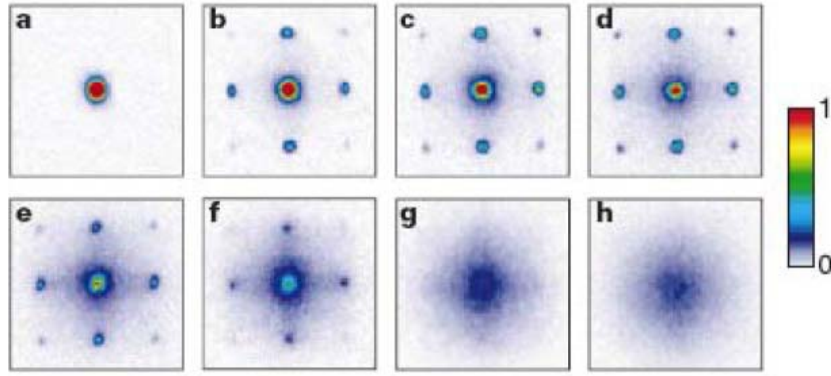


图 1.4 不同势阱深度下的干涉图样。(a) $0E_R$;(b) $3E_R$;(c) $7E_R$;(d) $10E_R$;(e) $13E_R$;
(f) $14E_R$;(g) $16E_R$;(h) $22E_R$ [4]。

序参量非零；而 Mott 绝缘相没有长程相位相干性，序参量为零。

在 1998 年 Jaksch 提出光晶格中冷原子的量子相变的理论后[3]，2002 年 Greiner 等人在实验上证实了这个预言[4]。在他们的实验中，利用 ^{87}Rb 原子，通过调节光晶格深度来改变格点上原子间的相互作用，从而实现了超流相(SF phase)到绝缘相(MI phase)的相变。图 1.4 是通过吸收成像法拍摄的干涉图样。

在超流区，原子在整个晶格是非定域的，因此有清晰的干涉图样。干涉图中尖锐的干涉最大直接反映了系统相位相干的程度。随着光晶格势深的增加，干涉图样发生显著地变化。势阱深度大约为 $13E_R$ 时，干涉图样变得模糊，直到 $22E_R$ 时干涉图样完全不可见。这正是系统从超流相到 Mott 绝缘相转变的标志。这时如果降低势阱深度，系统返回到超流相，干涉图样又很快清晰可辨了[4]。

前面我们介绍了光晶格中单分量超冷玻色原子的量子相变。后来人们又讨论了高自旋的或多分量的冷原子在光晶格中的相变问题。Tsuchiya 等人研究了自旋为 1 的反铁磁相互作用的玻色原子在光晶格中从超流到 Mott 绝缘的量子相变[16]，他们利用平均场近似得到零温相图，发现格点平均占据数是偶数的 Mott 绝缘相是自旋单态，非常稳定；而平均占据数为奇数的 Mott 绝缘相有一个原子不能形成单态，因此格点自旋为 1。Svidzinsky 等人则进一步考虑了外部磁场对量子相变的影响[47]。自旋为 2 的玻色原子在光晶格中的能谱和量子相变[48]。另外，Pu 和 Zhang[49]研究了由磁偶极相互作用引起的光晶格中凝聚体的反铁磁相变和自发磁化等现象。总之，

光晶格中量子相变的研究已经从单分量超冷玻色原子延伸到两分量超冷玻色原子、旋量超冷玻色原子以及超冷玻色—费米混合物等等复杂的领域。当然，对于光晶格和量子相变的实际应用仍在不断的探索中。

第三节 光晶格中两分量玻色气体量子相变

1.3.1 自旋相关的光晶格势

迄今为止，光晶格势是不依赖于原子内部态的形式。然而如果周期势对不同自旋的原子作用不同，那么这种依赖原子自旋的周期势能够使得不同晶格位置的原子产生联系，从而可以实现基本的量子门[50-53]，产生大幅度的纠缠[54-55]，激发自旋波[56-57]以及研究量子随机行走[58]或者形成一个基本的量子模拟模型来研究复杂的凝聚态物质的哈密顿量[59]。

我们先介绍一下在实验上实现光晶格中与自旋有关的中性原子的装置[60]。形成光晶格的两束沿相反方向传播的激光具有线性极化矢，极角为 θ 。这样的驻波光场能可看成一个左旋 σ^+ 和一个右旋 σ^- 的极化的驻波激光场的叠加。它使得晶格势为 $V_+(x, \theta) = V_{\max} \cos^2\left(kx + \frac{\theta}{2}\right)$ 和 $V_-(x, \theta) = V_{\max} \cos^2\left(kx - \frac{\theta}{2}\right)$ 。 k 是产生驻波的激光场的波矢， V_{\max} 是晶格的势阱深度。通过改变极角 θ 的大小可以控制两个势分开的距离 $\Delta x = (\theta/180^\circ)\lambda_x/2$ [50-54]。当 θ 增大时，两个势阱沿相反方向移动，又在 $\theta = n \cdot 180^\circ$ 叠加在一起。其中 n 是一个整数。这种与自旋相关的光晶格势在原子的两个内部态实现，如一个自旋态“感受”到的势是 $V_+(x, \theta)$ ，而另一个自旋态“感受”到的偶极势是 $V_-(x, \theta)$ 。采用波长为 $\lambda_x = 785\text{nm}$ 的激光产生的光晶格俘获 Rb 原子，这个波长正好在 Rb 原子 D1 和 D2 线的精细结构分裂处的中间波段。不同的原子态感受到的偶极势不同：如态 $|1\rangle \equiv |F=2, m_F=-2\rangle$ 感受到的偶极势 $V_1(x, \theta) = V_-(x, \theta)$ ，另一个态 $|0\rangle \equiv |F=1, m_F=-1\rangle$ 感受到的势 $V_0(x, \theta) = 3/4V_+(x, \theta) + 1/4V_-(x, \theta)$ 。如果原子首先被制备成两个态的相干叠加形式 $1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ ，然后连续增大极角 θ ，这样原子的空间波包劈裂成沿相反方向运动的两个分量。

实验上凝聚体中原子的数目约为 3×10^5 ，被囚禁在各向同性的频率为 $2\pi \times 16\text{Hz}$ 的谐振子的磁势阱中。然后在这团凝聚体上叠加一个三维的光晶格势。增加晶格的阱深驱使系统由超流进入 Mott 绝缘相[4]，原子被局域到单个的格点中，相邻格点间的隧穿被抑制，系统不再有长程相位相干性，因此与实验上可观测的动力学无关。晶格的三个正交的驻波光场在 y, z 方向的两个光场的波长 $\lambda_{y,z} = 840\text{nm}$ 。对于第三个沿水平方向 x 的激光的波长是 $\lambda_x = 785\text{nm}$ 。沿着这个轴的一个四分之一波片和一个电光调节器(EOM)允许我们通过给电光调节器一个合适的电压来旋转回复反射的极化矢的极角 θ 。这个过程如图 1.5 所示。

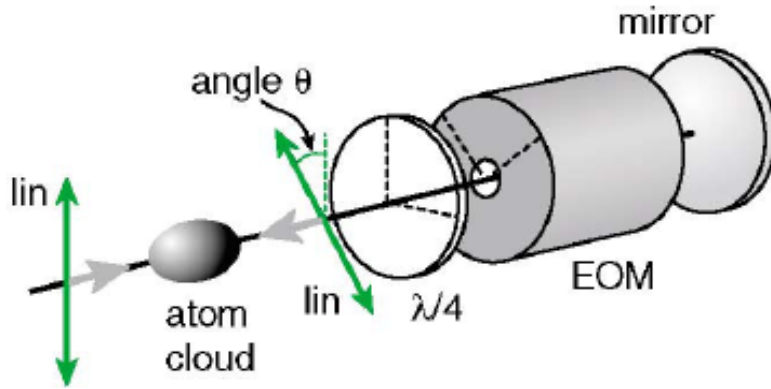
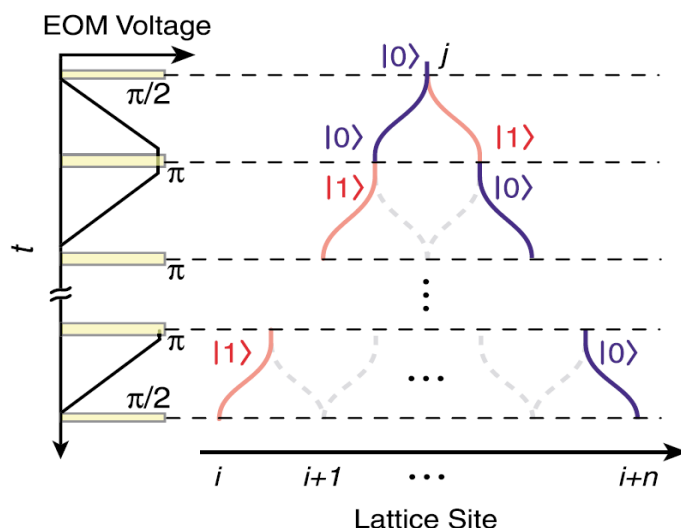


图 1.5 系统装置图. 一维的光学驻波由两束线性极化的激光沿相反方向对射而形成。返回的激光的极角能够通过电光调节器被调节。虚线是波片和 EOM 的轴。PRL **91**, 010407 (2003)。

初始极角 θ 被设置成 $\theta = 0$ ，即 x 方向上两束对射激光的线偏振矢量调节到平行。当晶格中的原子处于 Mott 绝缘相时，绝热关掉磁场囚禁势，仅保留 1G 均匀的磁场在 x 方向来维持原子自旋激化。不久绝热的关掉沿着 y 和 z 方向的光晶格使在原子沿着驻波方向移动，以此减少相互作用能，以便在单粒子水平研究由于原子之间的碰撞相互作用而导致的多体态的相移。紧接着，应用一个初始为 $\pi/2$ 微波脉冲，将凝聚原子制备到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的相干叠加态，调节偏振夹角 θ ，处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态的凝聚原子空间波包发生分离并朝相反方向运动，这就是所谓的原子波包的自旋相关输运过程。为了增大原子的两个波包之间的距离，在偏振夹角旋转到 $\theta = +180^\circ$ 之后应用一

个微波 π 脉冲，从而交换两个超精细态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，将偏振矢量往反方向调回到 $\theta = 0$ ，则这个原子的两个波包没有被带回到原始的格点而是被分离得更远，即增大了 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个波包之间的距离，如图 1.6 所示



1.6 干涉仪序列示意图[63]。

这个微波的辐射场，大约是 6.8GHz ，两个原子态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间驱动 Rabi 振荡，其频率为 $\Omega = 2\pi \times 40\text{kHz}$ 。这个微波场可将原子调节到两个原子态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的任意的叠加态。Mandel 等人观测到丰富的实验现象[60]。这样我们以两分量的原子为例对实验上如何实现自旋相关的光晶格势做了大致解释。接下来我们看理论上光晶格中两分量冷原子的一些研究工作。

1.3.2 两分量玻色哈伯德模型

哈伯德(Hubbard)模型在考虑窄带中电子强关联效应的基础上成功地解释了有些过渡金属氧化物当温度升高时从绝缘体转变为金属的现象。而玻色—哈伯德(Bose-Hubbard)模型最初则被用来研究纳米管中惰性气体的吸收[62]或具有强电荷效应的超导薄膜中的库伯(Cooper)对[38,63]等等。由于玻色原子在光晶格中的运动类似于电子在固体晶体中的运动，1989 年 Fisher 和 1998 年 Jaksch 正是利用单分量的玻色—哈伯德模型在理论预言了单分量的超冷原子从超流到 Mott 绝缘相的量子相变

[3]，并为实验证实。随着实验上将冷的玻色子[60]、费米子[19,61]以及玻色和费米的混合物[62]束缚在光晶格，许多工作进一步研究了多分量的冷原子气体在光晶格中的性质。

我们着重考虑两分量的玻色子在光晶格中的相变问题。首先相互作用的玻色子在光晶格束缚势场下的哈密顿量为：

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^+(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m_a} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m_a} \int d\vec{r} \hat{\psi}^+(\vec{r}) \hat{\psi}^+(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad (1.7)$$

这里 $\hat{\psi}(\vec{r})$ 表示玻色场算符。束缚势 $V_{ext}(\vec{r})$ 包含光晶格周期势 $V_{oL}(\vec{r})$ 和一个外加的缓慢变化的束缚势 $V_T(\vec{r})$ ，如图 1.7 所示。原子间的相互作用是短程势， a_s 表示 s -波散射长度， m_a 是单个原子质量。

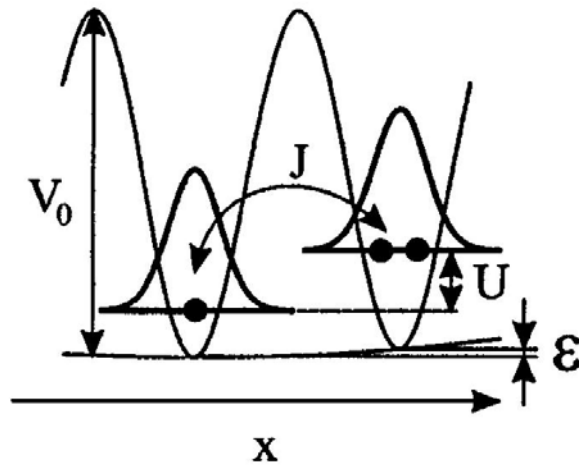


图 1.7 Bose-Hubbard 模型在光晶格中示意图，势阱底部的能级由束缚势 V_T 产生

[3]。

在完整晶格中的单原子系统的能量本征函数是布洛赫(Bloch)函数，在同一能带中，不同波矢对应不同的能量本征值。不同波矢(即不同能量)的布洛赫函数组合可构成瓦涅尔(Wannier)函数,它可以很好地定域在单个格点上，不同格点的瓦涅尔函数满足彼此正交性。为讨论光晶格周期势中格点间原子的相互作用，我们采用瓦涅尔表象。假定系统的最低能带远低于第二个能带，在最低能带的瓦涅尔基中展开玻色场算符：

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_{i,\sigma} \hat{b}_{i\sigma} w(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (1.8)$$

其中 σ 是原子态的指标(我们用 \uparrow, \downarrow 来表示), $\hat{b}_{i\sigma}$ 是第 i 个格点上湮灭处于 σ 态的玻色子的算符, 它们满足玻色对易关系 $[\hat{b}_{i\sigma}, \hat{b}_{j\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{ij}$ 利用上面玻色场算符的展开式, 并且只考虑最近邻格点间的相互作用, 哈密顿量(1.7)可约化为两分量原子的玻色哈伯德模型:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \left(t_\sigma \hat{b}_{i\sigma}^\dagger \hat{b}_{j\sigma} + H.c. \right) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} U_{\sigma\sigma} \hat{n}_{i\sigma} (\hat{n}_{i\sigma} - 1) + U_{\uparrow\downarrow} \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} - \sum_{i\sigma} \mu_\sigma \hat{n}_{i\sigma} \quad (1.9)$$

其中 $\langle i, j \rangle$ 表示对最近邻格点求和, 而 $\hat{n}_{i\sigma} = \hat{b}_{i\sigma}^\dagger \hat{b}_{i\sigma}$ 是第 i 个格点的原子数算符, 模型中的第一项是跃迁项(hopping), 描述了玻色子在相邻格点间的隧穿能量, 其强弱由隧穿矩阵元描述[14]

$$t_\sigma \approx \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \right) E_R^{1/4} (V_\sigma)^{3/4} \exp \left[-2 \left(\frac{V_\sigma}{E_R} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.10)$$

$E_R = \hbar^2 k^2 / 2m_a$ 是原子的反冲能量, $a_{s,\sigma}$ 对应不同自旋的原子的散射长度。同种原子的相互作用通过参数 $U = U_{\uparrow\uparrow} = U_{\downarrow\downarrow} \approx (8/\pi)^{1/2} (ka_{s\uparrow(\downarrow)}) (R_R \nu_{\uparrow(\downarrow)}^3)^{1/4}$ 来描述。不同原子间相互作用的参数

$$U_{\uparrow\downarrow} \approx (8/\pi)^{1/2} (ka_{\uparrow\downarrow}) (R_R \bar{\nu}_{\uparrow\downarrow}^3)^{1/4} \quad (1.11)$$

来描述。其中 $\nu_{\uparrow\downarrow}$ 是光晶格对不同的原子 \uparrow 和 \downarrow 的不同的阱深, $\bar{\nu}_{\uparrow\downarrow} = 4\nu_{\uparrow}\nu_{\downarrow} / (\nu_{\uparrow}^{1/2} + \nu_{\downarrow}^{1/2})^2$ 是在各个方向上自旋的平均势。进而不同原子间的相互作用 $U_{\uparrow\downarrow}$ 的大小能够如前边实验所述的通过移动两个晶格来使得 $U_{\uparrow\downarrow}/U$ 的取值范围很大。依赖于自旋分量的跃迁 t_σ 能够很容易的改变势阱深度 ν_{\uparrow} 和 ν_{\downarrow} , 而阱深可通过控制形成束缚阱的激光的强度来调节。一般来说两种原子化学势不同, 即 $\mu_{\uparrow} \neq \mu_{\downarrow}$ 。从自旋的角度来说, 化学势转变成沿 z 方向的磁场, 然而因为两分量原子的占据数本质上没有发生转化, 实验中有固定的磁化强度, 即两种原子数差 $n_{\uparrow} - n_{\downarrow}$ 是固定的, 这样通过调节化学势来固定磁化强度。

首先考虑一个简单的情况，即两种原子的化学势相等 $\mu_{\uparrow} = \mu_{\downarrow} = \mu$ ，通过激光的极化而改变晶格的阱深可导致两种原子的化学势发生相对平移，而这个平移通常很小，总是能够用外磁场来补偿使得两种原子的化学势相同。简单假设比值 $\eta = t_{\uparrow} / t_{\downarrow}$ ，并且令 $t_{\uparrow} \leq t_{\downarrow}$ ， $\eta \leq 1$ 。当平均每个格点的占据数为奇数时参数 μ ， $\lambda = U_{\uparrow\downarrow} / U$ ， t_{\downarrow} 和 η 的变化使得系统处于不同的相。

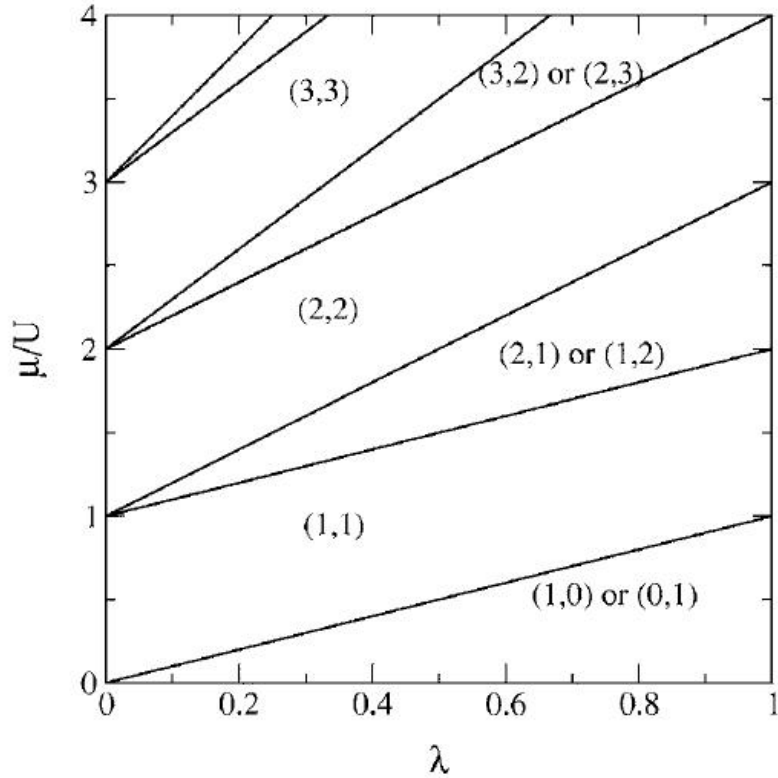


图 1.8 两分量的玻色系统在 Mott 绝缘态下 ($t_{\uparrow} = t_{\downarrow} = 0$) 的相图，每个格点奇数占据的时候是两重简并[65]。

式(1.9)描述了系统在巨正则系综下的哈密顿量。在实验当中每个分量的原子数都是守恒的，这个描述不是完全充分的。在单分量的玻色哈伯德模型中巨正则系综下的合理性来自于整个束缚势。在这样的情况下不同的区间将被看做在平衡系统下的不同的“有效的化学势”，这样会导致不同相：Mott 绝缘相和超流相的“畴”结构。因此在一个大的势阱里 Mott 绝缘相的玻色子在阱的边缘与超流相的玻色子相接触，阱的边缘犹如粒子库。这证明了把这样的系统作为巨正则系综的可行性[64]。绝缘相是我们所最感兴趣的，此时的光晶格势阱比较深，跃迁项很弱，我们近似取 $t_{\uparrow} = t_{\downarrow} = 0$ ，

这样系统的每个格点的哈密顿量都相同。所以任意的 i 格点的哈密顿量可写成

$$H_i = \frac{U}{2} \left[\sum_{\sigma} \hat{n}_{i\sigma} (\hat{n}_{i\sigma} - 1) + 2\lambda \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} \right] - \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} \hat{n}_{i\sigma} . \quad (1.12)$$

H_i 的基态由格点 i 上整数个玻色子 $n_{i(\downarrow)}$ ($\mu/U, \lambda$) 决定。相图如 1.8 所示。除了通常的偶占据的情况 $n_{i\uparrow} = n_{i\downarrow}$ ，奇占据的 $n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow} = \pm 1$ 的情况与单分量的系统相比也有不同的地方。很多工作都是围绕奇占据数的情况展开的[11-13]。

1.3.3 光晶格中两分量玻色气体的相图

光晶格中的冷原子系统的超流到绝缘的相变的观测为研究难操控的强关联系统的实验开辟了迷人的前景。比如理论研究已经证明光晶格中带自旋的玻色子或者费米子很有可能观测到复杂的量子相变，从而来实现新颖的超流机制和探测呈现自旋电荷分离的一维的玻色系统。甚至两分量的玻色气体的绝缘相也可以展示出丰富的物理行为。当运动的自由度被限制时，不受此限制的赝自旋可以形成有效的海森堡自旋交换。这能够用来研究自旋为 $1/2$ 的超冷玻色原子的哈密顿量，从而为可控的量子磁学的研究打开一扇门。在这个方法里，两种玻色子或费米子被束缚在光晶格中，这里依赖于自旋的相互作用和跃迁可通过调节束缚光场的强度，频率以及极化来控制。

在奇数占据绝缘相的情况，其基态简并，把隧穿项作为微扰可以得到有效的自旋哈密顿量。当隧穿很大时，微扰理论就不再适用。文献[14]利用非微扰的方法描述了两分量的绝缘和超流相，研究了每个格点只有一个原子占据的相图。我们研究的重点是两分量在绝缘相的相图，故微扰方法是主要的研究手段。我们介绍占据数为任意奇数粒子 $2n_0 - 1$ 的情况下，在有限的隧穿作用下由于量子涨落两重简并被消除。更准确的说在区间 $U, U', |U - U'| \gg t_{\uparrow}, t_{\downarrow}$ ，远离 $SU(2)$ 对称点 $\lambda = 1$ ，并且不同原子间的相互作用几乎消失 $\lambda \ll 1$ ，利用微扰的办法来研究两分量在光晶格中的相图。为了计算在每个格点占据数为奇数的绝缘态的涨落关联，先把晶格分成两个子空间 A 和 B——这样将反铁磁相和棋盘式固态的情况都包含了进来。首先使用一个试探波函数

$$|\Psi\rangle = \prod_{i \in A} \prod_{j \in B} |\psi_A\rangle_i |\psi_B\rangle_j \quad (1.13)$$

其中

$$|\psi_{A,B}\rangle = \cos \frac{\theta_{A,B}}{2} |n_0, n_0 - 1\rangle + e^{i\phi_{A,B}} \sin \frac{\theta_{A,B}}{2} |n_0 - 1, n_0\rangle. \quad (1.14)$$

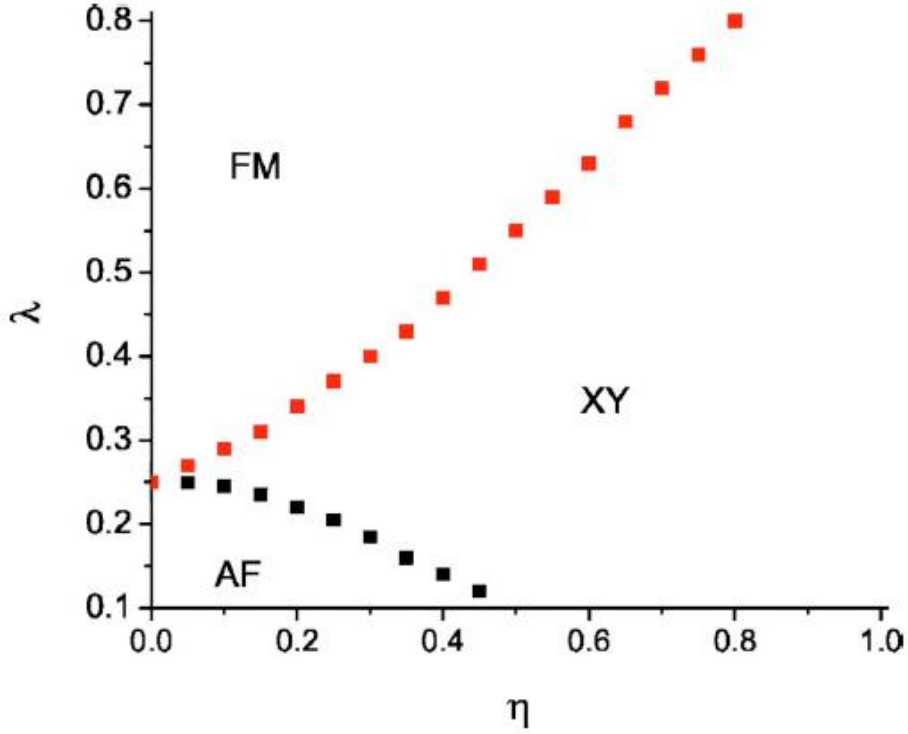


图 1.9 平均场近似下奇数占据的相图($n_0 = 1$) [65]。

为了简单令 $n_\uparrow = n_1, n_\downarrow = n_2$ ，其间 Fock 态 $|n_1, n_2\rangle$ 是在 i 格点有 n_1 个分量为 1 的原子， n_2 个分量为 2 的原子。利用微扰的办法可得到近似到二阶关联 $O(t^2/U^2)$ 的基态能量。

它是关于角度 $\theta_{A,B}$ 和 $\phi_{A,B}$ 的函数

$$E_f = -\frac{Nz t_\downarrow^2}{2U} \left\{ (1+\eta^2)n_0^2(1+\cos\theta_A\cos\theta_B) + (1-\eta^2)n_0(\cos\theta_A+\cos\theta_B) \right. \\ \left. + (1+\eta^2)(1-\cos\theta_A\cos\theta_B) \left(\frac{n_0^2}{2\lambda} + \frac{n_0^2-1}{2-\lambda} \right) \right. \\ \left. + \frac{\eta n_0^2}{\lambda} \sin\theta_A \sin\theta_B \cos(\phi_A - \phi_B) \right\}$$

其中 z 是晶格的配位数。对能量 E_f 求关于 $\theta_{A,B}$ 和 $\phi_{A,B}$ 的极小值，从而可得到如图 1.9 的相图。这个相图说明了绝缘区域存在三类相：(a) 当 $\theta_{A(B)} = 0$ ， $\theta_{B(A)} = \pi$ ，系统处于

反铁磁 AF 相；(b)当 $\theta_A = \theta_B = 0$ ，系统处于铁磁 FM 相；(c)当 $\theta_A = \theta_B \neq 0$ ，系统处于 XY 相。占据数为 1 的反铁磁相就是棋盘式的固态，每个格点被 1 分量原子占据或者被 2 分量原子占据，并且交替分布。

在第三章我们将利用两分量冷原子与两个腔模相互作用的系统来探测光晶格中两分量的超流体和绝缘体相变，以及绝缘区内奇数占据对应的这三种相—AF 相，FM 相和 XY 相[66]。

参考文献

- [1] S. N. Bose, *Z.Physil.* (1924) **26** 178.
- [2] A. Einstein, *Sitzungsber, Kgl. Preuss, Akad.Wiss* (1924), **261** 3.
- [3] D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* (1998) **81** 3108.
- [4] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hansch, and I. Bloch, *Nature (London)* (2002) **415** 39.
- [5] G. Birkl, M. Gatzke, I.H. Deutsch, S.L. Rolston, and W.D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* (1995) **75** 2823.
- [6] M. Weidemüller, A. Hemmerich, A.Görlitz, T. Esslinger, and T.W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* (1995) **75** 4583.
- [7] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* (1996) **76** 4508.
- [8] W. K. Hensinger, H. Haner, A. Browaeys, N. R. Heckenberg, K. Helmerson, C. McKenzie, G. J. Milburn, W. D. Phillips, S. L. Rolston, H. Rubinsztein-Dunlop, and B. Upcroft, *Nature* (2001) **412** 52.
- [9] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B.* (1989) **40** 546.
- [10] A. B. Kuklov and B. V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* (2003) **90** 100401.
- [11] A. Kuklov, N. Prokof'ev, and B. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* (2004) **92** 050402.
- [12] L.-M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* (2003) **91** 090402.
- [13] E. Altman, W. Hofstetter, E. Demler, and M. D. Lukin, *New J. Phys.* (2003) **5** 113.
- [14] M. A. Cazalilla, A. F. Ho, and T. Giamarchi, *Phys. Rev. Lett.* (2005) **95** 226402.
- [15] C. Wu, J. P. Hu, and S. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* (2005) **91** 186402; S. Chen, C. Wu, S. C. Zhang, and Y. Wang, *Phys. Rev. B* (2005) **72** 214428.
- [16] S. Tsuchiya, S. Kurihara, and T. Kinmura, *Phys. Rev. A* (2004) **70** 043628.
- [17] E. Demler and F. Zhou, *Phys. Rev. Lett.* (2002) **88** 163001.
- [18] S. K. Yip, *Phys. Rev. Lett.* (2003) **90** 250402;
- [19] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* (2005)

- 94** 080403.
- [20] A. F. Ho, Phys. Rev. A. (2006)**73** 061601.
- [21] A. B. Kuklov, Phys. Rev. Lett. (2006) **97** 110405.
- [22] W. V. Liu and Congjun Wu, Phys. Rev. A. (2006) **74** 013607.
- [23] F. Brennecke, T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, M. Köhl and T. Esslinger, Nature (London) (2007) **450** 268.
- [24] Y. Colombe, T. Steinmetz, G. Dubois, F. Linke, D. Hunger and J. Reichel, Nature (London) (2007) **450** 272.
- [25] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke and I. Bloch, Nature (2005) **434** 481.
- [26] E. Altman, E. Demler and M. D. Lukin, Phys. Rev. A (2004) **70** 013603.
- [27] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. (2004) **92** 130403.
- [28] V. Gritsev, E. Altman, E. Demler and A. Polkovnikov, Nature Phys. (2006) **2** 705.
- [29] M. Schellekens, et al. Science (2005) **310** 648.
- [30] I. B. Mekhov, C. Maschler, and H. Ritsch, Nature Phys. (2007) **3** 319.
- [31] I. B. Mekhov, C. Maschler, and H. Ritsch, Phys. Rev. Lett. (2007) **98** 100402.
- [32] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. opt. Soc. Am. (1989) **20** 23.
- [33] C. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips, Phys. Today. (1990) **43** 33.
- [34] I. Bloch, Nature Phys. (2005) **1** 23.
- [35] 王义道 原子的激光冷却与陷阱 北京大学出版社 (2007) Ch7-277.
- [36] W. Zhang, D. F. Wall, Phys. Rev. A. (1998) **57** 1248.
- [37] I. H. Deutsch, G. K. Brennen and P. S. Jessen, Progress of Physics, (2000) **48** 925.
- [38] C. Hooley and J. Quintanilla, Phys. Rev. Lett. (2004) **93** 080404.
- [39] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, Solid State Physics (1976) Holt, Rinehardt and Winston, New York.
- [40] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions, Cambridge Univ. Press (2001).
- [41] D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A (2001) **63** 053601.

- [42] K. Sheshadri, H. R. Krishnamurthy, R. Pandit, and T. V. Ramakrishnan, *Europhys. Lett.* (1993) **22** 257.
- [43] I. K. Freericks and H. Monien, *Europhys. Lett.* (1995) **26** 545.
- [44] T. D. Kühner and H. Monien, *Phys. Rev. B* (1998) **58** 14741.
- [45] N. Elstner and H. Monien, *Phys. Rev. B* (1999) **59** 12184.
- [46] S. Rapsch, U. Schollwöck, and W. Zwerger, *Europhys. Lett.* (1999) **46** 559.
- [47] A. A. Svidzinsky and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* (2003) **68** 043612.
- [48] J.-M. Hou and M.-L. Ge, *Phys. Rev. A* (2003) **67** 063607; S. Jin, J.-M. Hou, B.-H. Xie, L.-J. Tian, and M.-L. Ge, *Phys. Rev. A* (2004) **70** 023605.
- [49] H. Pu, W. Zhang, and P. Meystre, *Phys. Rev. Lett.* (2001) **87**, 140405.
- [50] G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen and I. H. Deutsch., *Phys. Rev. Lett.* (1999) **82** 1060.
- [51] H.-J. Briegel, T. Calarco, D. Jaksch, J. I. Cirac and P. Zoller, *J. Mod. Opt.* (2000) **47** 415.
- [52] R. Raussendorf and H.-J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* (2001) **86** 5188.
- [53] G. K. Brennen, I. H. Deutsch, and C. J. Williams, *Phys. Rev. A* (2002) **65** 022313.
- [54] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* (1999) **82** 1975.
- [55] H.-J. Briegel and R. Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* (2001) **86** 910.
- [56] A. Sørensen and K. Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* (1999) **83** 2274.
- [57] H. J. Lewandowski *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* (2002) **88** 070403; J. M. McGuirk *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* (2002) **89** 090402.
- [58] W. Dür, R. Raussendorf, V. M. Kendon and H.-J. Briegel, *Phys. Rev. A.* (2002) **66** 052319.
- [59] E. Jané, G. Vidal, W. Dür, P. Zoller and J. I. Cirac., *Quantum Information and Computation*, (2003) **3** 15/quant-ph/0207011.
- [60] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* (2002) **91** 010407.
- [61] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge and R. G. Hulet

- Science (2001) **291** 2570.
- [62] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. (2001) **87** 080403; Z. Hadzibabic, C. A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M. W. Zwierlein, A. Görlitz and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. (2002) **88** 160401; G. Modugno, G. Roati, F. Riboli, F. Ferlaino, R. J. Brecha and M. Inguscio, Science (2002) **297** 2240; G. Roati, F. Riboli, G. Modugno and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. (2002) **89** 150403.
- [63] M.-C. Cha, M. P. A. Fischer, S. M. Girvin, M. Wallin, and A. P. Young, Phys. Rev. B (1991) **44** 6883.
- [64] C. Schroll, F. Marquardt, and C. Bruder, Phys. Rev. A (2004) **70** 053609.
- [65] A. Isacsson, M. C. Cha, K. Sengupta and S. M. Girvin, Phys. Rev. B (2005) **72** 184507.
- [66] L. Guo, Y. Zhang and S. Chen, Phys. Rev. A. (2007) **75** 013622.

第二章 腔 QED 及其与原子的相互作用

基于我们工作的需要，本章简单介绍了腔的构造及其与原子的作用[1]，光与二能级原子相互作用的几个最常见的理论模型：如Jaynes-Cummings(J-C)模型、Dicke模型和Tavis-Cummings模型以及光与三能级原子相互作用的受激拉曼绝热通道。腔量子电动力学(Cavity QED)主要研究受限系统中量子化电磁场和原子之间的相互作用。该系统不仅可以检验量子物理的基本理论，有助于人们从根本上认识光与原子相互作用的过程，而且近年来作为量子信息的一种方案引起了人们的高度关注。随着实验技术的进一步提高和理论知识的不断认识，我们利用腔QED可以探测冷原子中的新奇量子相和相变。

第一节 腔量子电动力学

随着激光冷却和俘获中性原子技术发展的成熟，人们可以将一团原子甚至单个原子冷却到接近绝对零度并俘获在空间中特定的范围。光频区腔QED实验上应用极短的腔长(几十到几百微米)，超高精细度(几十万到一百万)的光学法布里—帕罗(Fabry-Perot)腔作为光子和原子相互作用的环境。由于光学F-P腔极高的精细度，内腔光场的衰减率非常小；同时极短的腔长可以增强单个原子的电场强度，增大光子与原子之间的相互作用(即拉比频率)，从而使整个系统达到强耦合。对于腔QED这样一个开放系统，只能通过微腔腔镜的透射信号获得腔内的光场与原子相互作用的信息，并通过分析透射光获得原子的一些信息。

2.1.1 腔的介绍

光共振腔在量子光学实验中应用非常广泛。最简单的腔是由直线对准的光学轴的两个镜子构成，如图2.1.(a)，在腔中回复反射入射光。更一般的情况下，腔是由一组镜子构成，它使得光以某种方式在一个闭合的路径下反射，如图2.1.(b) 在完成一个往返后光与入射光发生干涉。这些镜子的曲率与所有反射点的入射光的波前的曲率相匹配。腔中这样的一个往返的光学路径，即光程为 p 。光在腔中被多次反射，每次往返都会产生一个分波，而这些波将会干涉。

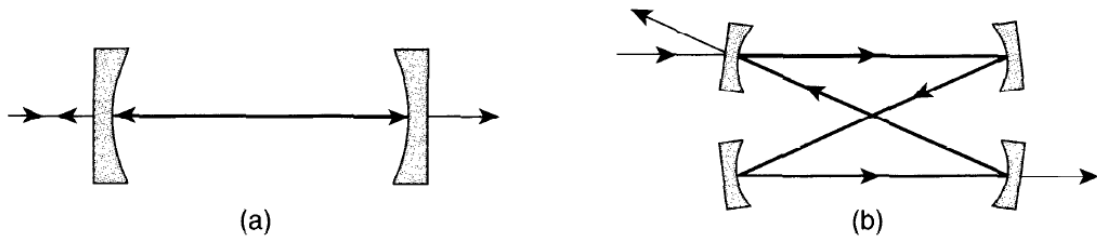


图2.1 光共振腔的装置图[1]。

当光程 p 是入射光的波长的整数倍时，由于干涉——腔达到共振，腔内将建立一个强的场。腔的共振频率满足条件：

$$\nu_{cav} = \frac{jc}{p}; \quad j = \text{integer}. \quad (2.1)$$

其中 c 是光速。对于一个线性腔光程满足 $p = 2nd_{12}$ ，其中 d_{12} 是两个腔镜之间的距离，即腔长。 n 是腔内介质的折射率。可以看到，只要腔场或波长稍有变化，腔就会从共振变得不共振。腔的共振频率是等间距的，相邻的共振频率的间距被称作自由光谱区(FSR)

$$FSR = c/p \quad (2.2)$$

场的增益的大小和共振的范围依赖于镜子的反射性和腔的损耗。

腔有很多用途：激光器也称激光共振腔，是一个具有激活媒质的腔，腔为其提供获得共振的光学反馈，因此腔的构成决定激光束的空间特点。另外它还可以选择激光的频率和分析入射光频率的分布。在这一点上，腔的长度可被调制，而透射光可看作这个长度的函数。因此腔又被称作光谱分析仪。另一方面腔能够用来作为光频率非常稳定的参照。入射光和共振频率的失谐能够被测量出来，而且激光的频率通过电子反馈能够被控制，这样腔可锁定激光的频率。在激光共振的情况下，这将决定腔模的形状、腰的位置以及尺寸。结合考虑镜子的曲率将会得到稳定共振的条件。当腔仅仅与入射光中的一个频率的光共振，内部场的模式只对应这个频率的光，其它的光将被直接反射。换言之只有入射光与腔的共振频率匹配时才能进入腔中，而且透射光具有确定的空间模式，因此腔能够被用来做空间模式的滤波器。另外对于光的涨落的影响还有一些其它的应用。腔内场不是瞬时形成的，它要求在腔中完成往返的许多波的干涉。经历时间 t_{cav} 之后获得一个稳定的态。这个时间是在没有入

射光的情况下腔内场衰减的时间。入射光中频率高于 $\gamma = 1/t_{cav}$ 的成分不能进入腔中，将被反射。这时腔就是一个关于强度涨落的低通滤光片。

除以上介绍的用途之外，腔还有一些有趣的应用，如近共振的入射光时，光的转像差、相干性或者压缩等。

2.1.2 腔与原子相互作用

腔 QED 系统最终要实现的是原子与光子的相互作用，系统除了要求腔场和原子之间有较强的耦合系数，还要求原子与腔场具有较长的相互作用时间。通过减小腔长和腔镜的曲率半径可以有效地减小腔的模体积，来增大原子与腔的耦合系数。一般光频区腔 QED 实验中用到的 F-P 腔的腔长都在几十到一百多微米，腔镜曲率半径为 5-20 厘米。如果内腔光场为驻波场，要实现光场与原子的最大耦合就能够在腔模驻波场的波腹处长时间地俘获原子。原子俘获的寿命还和背景真空度有关，高的背景真空能够减小被俘获的原子受到背景粒子碰撞的几率，增加原子在腔模中的相互作用时间，所以腔 QED 系统还要求有极高的真空环境。激光冷却和俘获中性原子技术不但使人们能够控制中性原子的空间位置，而且还可以利用光抽运控制其内部量子态。随着激光冷却和俘获原子技术的发展，目前实验上可以很容易地将巨大数目的中性原子(10^7-10^8 个)俘获在空间中的某一位置，并将其冷却到绝对零度附近(几十到几百 μK)。光学偶极阱中激光频率远离原子跃迁线，原子状态基本不受偶极俘获光的干扰，可以用来俘获和装载中性原子[2]。但是光学偶极阱为保守势阱，不和原子交换能量，没有冷却效应，而且其势阱深度往往只有十几 mK ，不能在室温下直接装载原子。所以人们先通过磁光阱的方法获得一团低温冷原子样品，然后通过光学偶极阱在磁光阱中直接装载中性原子。2007 年 Brennencke 等人研究了一团 BEC 与一个超精细的光学腔的量子场强耦合的系统，测量了能谱。这是腔 QED 研究的新领域[3]，所有的原子都处于单模的物质波场，均匀地与光场作用并且有共同激发态，这使我们可以研究量子气体与可调节腔的相互作用多体物理的许多新现象[4-6]。

腔场和原子之间的耦合系数可表示为[7]

$$g_0 = \sqrt{\frac{3c\lambda^2\gamma_{\parallel}}{8\pi V_m}} \quad (2.3)$$

其中 V_m 为腔场的模体积， γ_{\parallel} 是原子纵向弛豫的衰减率， λ 为腔场所对应的波长。因

此可以通过减小腔场的模体积 V_m 来有效提高腔场和原子的耦合系数。而对于光频区腔QED中使用的F-P腔，其模体积与腔镜曲率半径和腔长有关，腔场的衰减系数 κ 又与腔镜的反射率和腔长有关。接下来我们介绍可以通过选取适当的腔参数就得到高精度腔。

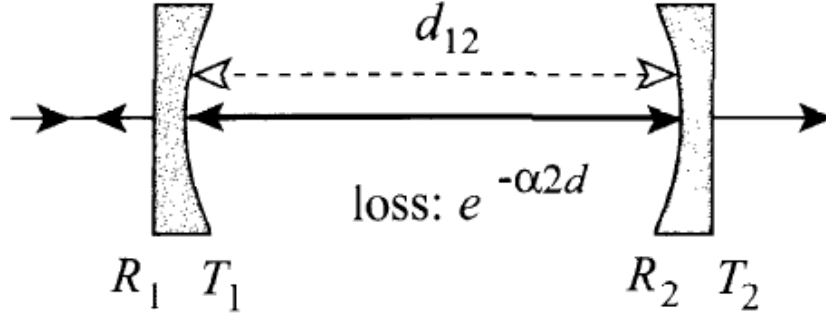


图2.2. 简单的线性腔的示意图[1]。

这是一个简单的腔，由入射镜子 M_1 和反射镜子 M_2 构成。腔内光场呈驻波结构分布[8]。振幅为 α_{in} 的入射光部分透射过 M_1 后，内腔场为 $\alpha_0 = \sqrt{T_1} \alpha_{in}$ ，它将在腔内循环往返，每循环一次它的振幅都会衰减，其衰减因子为

$$g_m = \sqrt{R_1 R_2 \exp(-\alpha p)} \quad (2.4)$$

包含了腔镜的反射损耗和内腔损耗。每次往返都引入相位差 $\delta\phi = 2\pi(\nu_L - \nu_{cav})p/c$ 。

腔内场的振幅是所有的循环项的总和

$$\alpha_{cav} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \quad (2.5)$$

其中 $\alpha_{j+1} = g_m \exp(-i\delta\phi(\nu)) \alpha_j = g(\nu) \alpha_j$ ， $g(\nu)$ 是描述一个往返腔的效应。进一步这个场表达成

$$\alpha_{cav} = \alpha_0 \left(1 + g(\nu) + g(\nu)^2 + g(\nu)^3 + \dots \right) = \frac{\alpha_0}{1 - g(\nu)} \quad (2.6)$$

腔内场的功率或强度为

$$P_{cav} \propto |\alpha_{cav}|^2 = \frac{|\alpha_0|^2}{|1 - g(v)|^2} = \frac{|\alpha_0|^2}{(1 - g_m)^2 + 4g_m \sin^2(\delta\phi/2)}$$

也可写成

$$P_{cav} = P_{max} \frac{1}{1 + (2F/\pi)^2 \sin^2(\delta\phi/2)} \quad (2.7)$$

其中 $P_{max} = \left(\frac{\alpha_0}{1 - g_m}\right)^2$ 表示峰值功率。而

$$F = \frac{\pi\sqrt{g_m}}{(1 - g_m)} \quad (2.8)$$

表示腔的精细度(Finesse)，通常用来衡量腔的品质，是量子光学实验中使用频率很高的一个重要参数。

对于同样的F-P 腔，光子在其中往返振荡的单程损耗设为 $l = -\ln\sqrt{R_1 R_2}$ ，则光子
在腔中的寿命可表示为[9]

$$t_{cav} = \frac{nd_{12}}{cl} \quad (2.9)$$

其中 n 为介质的折射率。则腔内光子数的衰减率为

$$\delta = 1/t_{cav} \quad (2.10)$$

因腔内光场振幅衰减率为光子数衰减率的一半，腔内光场振幅的衰减为

$$\kappa = \frac{\delta}{2} = \frac{c(-\ln\sqrt{R_1 R_2})}{2d_{12}} \quad (2.11)$$

由(2.11)式可以看出，要获得低的F-P 腔腔场的衰减率就必须增大腔长或增加腔镜反射率。当腔镜的反射率满足条件 $(1 - R_{1,2}) \ll 1$ 时，可利用近似：

$-\ln\sqrt{R_1 R_2} = -(\ln R_1 + \ln R_2)/2 = 1 - (R_1 + R_2)/2$ ，将腔内光场振幅衰减率表示为

$$\kappa = \frac{c}{d_{12}} \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{2}\right) = \pi \frac{FSR}{F},$$

其中FSR为腔的自由光谱区，

$$F = \frac{2\pi}{2 - (R_1 + R_2)} = \frac{2\pi FSR}{\delta} = \frac{FSR}{\Delta\nu}$$

为腔的精细常数。

通过以上介绍，我们了解了腔与原子作用时一些很重要的物理参量，为我们在理论和实验上研究腔与原子的相互作用系统时提供了指导，尤其目前比较热门的利用腔与原子耦合的系统来探测原子的量子态。

第二节 单模场与二能级原子

理论上描述单模的光场与二能级原子作用有很多模型，如 Jaynes-Cummings (J-C) 模型，Dicke 模型和 Tavis-Cummings 模型，它们从不同角度来反映光与原子作用的过程。J-C 模型是单个原子与单模的光之间的相互作用，而 Dick 模型和 Tavis-Cummings 模型是描述多个原子与单模场的作用。后两个模型的区别是前者的光场是经典近似场，后者是量子化的场。

2.2.1 Jaynes-Cummings 模型

J-C 模型是描述一个原子和单模光场的相互作用过程，而且除了旋波近似外不做任何假定的两能级原子和单模光的作用。其最引人之处是一些纯粹的量子力学的效应。在薛定谔绘景或者海森堡绘景该模型都是可以精确求解的。在旋波近似下的哈密顿量是[10]

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.12)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\nu a^\dagger a \quad (2.13)$$

$$H_1 = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (2.14)$$

其中

$$\sigma_z = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|$$

$$\sigma_+ = |a\rangle\langle b|, \quad \sigma_- = |b\rangle\langle a|$$

满足对易关系 $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$, $[\sigma_\pm, \sigma_z] = \pm 2\sigma_\pm$ 。 H_0 描述原子和光单独的能量算符， H_1

是原子和光之间的相互作用相。选择相互作用绘景来解这个系统的能量本征方程

$$H' = e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar}。$$

利用公式

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

我们比较容易得出

$$e^{iva^+at} a e^{-iva^+at} = a e^{-ivt}; \quad e^{iva^+at} a^+ e^{-iva^+at} = a^+ e^{ivt}$$

$$e^{i\omega\sigma_+t/2} \sigma_+ e^{-i\omega\sigma_+t/2} = \sigma_+ e^{i\omega t}; \quad e^{i\omega\sigma_+t/2} \sigma_- e^{-i\omega\sigma_+t/2} = \sigma_- e^{-i\omega t}$$

这样我们就可以得到相互作用绘景下的哈密顿量的形式

$$H' = \hbar g (\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^+ e^{-i\Delta t}) \quad (2.15)$$

其中 $\Delta = \omega - \nu$ 是原子跃迁频率和光频率的失谐。系统的态 $|\psi(t)\rangle$ 的运动方程是

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H' |\psi(t)\rangle。 \quad (2.16)$$

在任意时刻 t ，态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 是 $|a, n\rangle$ 和 $|b, n\rangle$ 的线性组合，其中 $|a, n\rangle$ ($|b, n\rangle$) 表示原子处于激发态 $|a\rangle$ (基态 $|b\rangle$)， n 是光场的光子数。这样我们将 $|\psi(t)\rangle$ 线性展开

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{a,n}(t) |a, n\rangle + c_{b,n}(t) |b, n\rangle] \quad (2.17)$$

$c_{a,n}(t)$ 和 $c_{b,n}(t)$ 表示在该系统中处于 $|a, n\rangle$ 和 $|b, n\rangle$ 的几率振幅。将(2.15)，(2.17)代入(2.16)，可以得到 $c_{a,n}(t)$ 和 $c_{b,n}(t)$ 时间演化方程

$$\dot{c}_{a,n} = -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{b,n+1}, \quad (2.18)$$

$$\dot{c}_{b,n+1} = -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{a,n}。 \quad (2.19)$$

解微分方程(2.18)和(2.19)，我们可以得到

$$c_{a,n}(t) = \left\{ c_{a,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{b,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2} \quad (2.20)$$

$$c_{b,n+1}(t) = \left\{ c_{b,n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{a,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2} \quad (2.21)$$

其中系统的 Rabi 频率为 $\Omega_n = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$ 。如果初始原子处于激发态 $|a\rangle$ ，则 $c_{a,n}(0) = c_n(0)$ ， $c_{b,n+1}(0) = 0$ 。 $c_n(0)$ 是初始时刻场的几率振幅。 $|c_{a,n}(t)|^2$ 和 $|c_{b,n}(t)|^2$ 表示 t 时刻系统分别处于 $|a,n\rangle$ 和 $|b,n\rangle$ 的几率。则 t 时刻场中出现 n 个光子的几率是

$$\begin{aligned} p(n) &= |c_{a,n}(t)|^2 + |c_{b,n}(t)|^2 \\ &= \rho_{nn}(0) \left[\cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \left(\frac{\Delta}{\Omega_n}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right], \\ &\quad + \rho_{n-1,n-1}(0) \left(\frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2}\right) \sin^2\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right) \end{aligned}$$

其中 $\rho_{nn}(0) = |c_n(0)|^2$ 是初始时刻出现 n 个光子的几率。另外一个很重要的物理量是原子的反转率

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_n \left[|c_{e,n}(t)|^2 - |c_{g,n+1}(t)|^2 \right] \\ &= \sum_n \rho_{nn}(0) \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

如果选择初始光场是相干态场

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \quad (2.23)$$

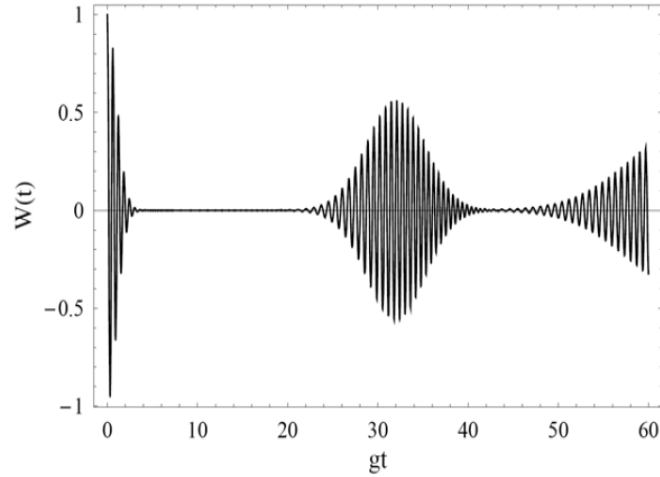


图 2.3 原子反转率随着原子-光子相互作用 gt 变化的函数关系：初始光场为相干态。

参数 $\Delta = 0$, $\langle n \rangle = 25$ 。

从图 2.3.可看出，原子的 Rabi 振荡出现了“崩塌”和“复原”现象。初始光场的光子分布函数 $\rho_m(0)$ 决定着每个确定的光子数态对应的 Rabi 振荡进行相加时的权重。因此“崩塌”和“复原”现象是由相干光场中各数态成分的内部关联决定的。如果为真空场仍然会出现 Rabi 振荡，这与半经典理论得到的结果是不同的。在这种全量子的理论中，自发辐射使得真空中原子从上能级到下能级的跃迁成为了可能。

2.2.2 单模场与 N 个二能级原子的相互作用

上一小节我们介绍了单个原子与单模光场作用的情况，接下来了解一下 N 个二能级原子与单模场的相互作用。首先介绍一下 Dicke 模型。这个模型前提假设是长波近似并忽略原子和边界的碰撞，同时把整个二能级的原子气体看作一个量子力学系统，而单模场被当作经典场。原子部分哈密顿量可写成[11]

$$H = H_0 + E \sum_{j=1}^N R_{jz} \quad (2.24)$$

其中 $E = \hbar\omega$ 是原子激发态的能量。在质心坐标系下 H_0 作用到该系统得到平移能量和原子间的相互作用能。 ER_{jz} 是第 j 个原子的内部能量，其本征值是 $\pm \frac{1}{2} E$ 。原子自旋算符满足关系式

$$\hat{R}^2 = \hat{R}_x^2 + \hat{R}_y^2 + \hat{R}_z^2,$$

$$\hat{R}_k = \sum_{j=1}^N \hat{R}_{jk} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{jk}, \quad k = x, y, z,$$

$\hat{\sigma}_k$ 为泡利矩阵。 H_0 和所有 R_{jk} 对易，所以系统的能量本征函数可选择 H_0 、 R_{1z} 、 R_{2z} 、 \dots R_{Nz} 的本征函数的连乘。这个典型的本征态被写成

$$\psi_{gm} = U_g(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_N) [++-+\cdots] \quad (2.25)$$

$U_g(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_N)$ 是 H_0 的本征态，这里的 \mathbf{r}_N 是第 N 个原子的质心坐标，符号 + 和 - 分别表示不同原子处于激发态和基态。 N_+ 和 N_- 表示处于这两个内部态的占据数。另外定义

$$m = \frac{1}{2}(N_+ - N_-),$$

总的原子数

$$N = N_+ + N_-,$$

系统的总能量

$$E_{gm} = E_g + mE \quad (2.26)$$

其中 E_g 表示原子的动能和相互作用能之和，是 H_0 的本征值。指标 m 是整数或半整数，这依赖于原子数 N 的奇偶性：偶数对应的是整数，奇数对应的是半整数。因为 + 和 - 可以取不同的数，能量 E_{gm} 的简并度是

$$\frac{N!}{N_+!N_-!} = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}N+m\right)! \left(\frac{1}{2}N-m\right)!}。 \quad (2.27)$$

这个简并度是仅考虑原子内部态时引入的。假设原子不可区分，在质心坐标下 U_g 的对称性依赖于原子内部坐标下交换引起的波函数对称性的变化。例如： U_g 对于玻色原子是对称的，而对于费米原子是反对称的。

在哈密顿量(2.24)中，在质心坐标系下算符 H_0 给出

$$H_0 U_g = E_g U_g, \quad (2.28)$$

而算符 R_{j_x} 作用在态 (2.25) 上可得到第 j 原子对应的内部能量。除了因子 $\frac{1}{2}$ ，它等价于泡里自旋算符之一。在这个展开中另外两个泡里算符也要被考虑，这三个算符满足

$$\begin{aligned} R_{j_x} [\cdots \pm \cdots] &= \frac{1}{2} [\cdots \mp \cdots], \\ R_{j_y} [\cdots \pm \cdots] &= \pm \frac{1}{2} i [\cdots \mp \cdots], \\ R_{j_z} [\cdots \pm \cdots] &= \pm \frac{1}{2} [\cdots \pm \cdots]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

而

$$R_z \psi_{gm} = m \psi_{gm}. \quad (2.30)$$

为了完成系统的动力学的描述，我们必须将辐射场以及场和原子系统之间的相互作用加入到哈密顿量中。假设原子与光场之间的相互作用是电偶极作用，第 j 个原子与电磁场的作用可写成

$$-\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \cdot \sum_{k=1(k \neq j)}^N \frac{e_k}{m_k c} \mathbf{P}_k. \quad (2.31)$$

其中第 j 原子的(组态)坐标是质心坐标和剩余的 $N-1$ 个原子质心坐标的相对坐标。

$\mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$ 是在位置 \mathbf{r}_j 的磁矢势。 \mathbf{P}_k 是与第 k 原子相对于质心坐标下位置的共轭动量。 m_k 是第 k 个粒子的质量。因为 \mathbf{P}_k 是一个奇宇称的算符，在原子的两个内态表象中仅有非对角矩阵元不为零。另外在这样 2×2 的空间中，任意算符总是可以表达成

$$\begin{aligned} \hat{O} &= q \hat{I} + e_x \hat{R}_x + e_y \hat{R}_y + e_z \hat{R}_z \\ &= \begin{pmatrix} q + \frac{1}{2} e_z & \frac{1}{2} (e_x - i e_y) \\ \frac{1}{2} (e_x + i e_y) & q - \frac{1}{2} e_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 \hat{I} 是么元， e_x ， e_y 和 e_z 是在 x, y, z 方向上的单位矢量，对所有的原子是相同的。

因此(2.31)可以进一步表示成

$$-\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{e}_x R_{jx} + \mathbf{e}_y R_{jy})。 \quad (2.32)$$

从而总的相互作用的能量是

$$H_I = -\sum_j \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{e}_x R_{jx} + \mathbf{e}_y R_{jy}) \quad (2.33)$$

因为气体中原子的尺寸相比较场的波长非常小，长波近似下矢量势对原子质心的依赖可以被忽略，相互作用能变成

$$\begin{aligned} H_I &= -\mathbf{A}(0) \cdot \sum_j (\mathbf{e}_x R_{jx} + \mathbf{e}_y R_{jy}) \\ &= -\mathbf{A}(0) \cdot (\mathbf{e}_x R_x + \mathbf{e}_y R_y) \end{aligned} \quad (2.34)$$

因此相互作用项与质心坐标无关，且选择研究原子运动的基态，即量子数 g 满足 $\Delta g = 0$ 。这样跃迁频率没有出现多普勒(Doppler)增宽。以上结论仅当这团气体尺寸很小时成立。

算符 R_x ， R_y 和 R_z 服从角动量三分量的对易关系。因此(2.34)相互作用算符满足选择定则 $\Delta m = \pm 1$ 。式(2.24)中哈密顿量 H 与角动量 R^2 对易，二者有共同本征态，选择 R^2 的本征态为稳定态(stationary states), R^2 本征值是 $r(r+1)$ 。这样新的态为

$$\psi_{gmr} \quad (2.35)$$

本征值 r 被称作“cooperation number”，是正半整数或整数，满足关系

$$|m| \leq r \leq \frac{1}{2} N。 \quad (2.36)$$

因此我们可以得到

$$H\psi_{gmr} = (E_g + mE)\psi_{gmr}， \quad (2.37)$$

$$R^2\psi_{gmr} = r(r+1)\psi_{gmr}。 \quad (2.38)$$

态 (g, m, r) 的简并度是

$$\frac{N!(2r+1)}{\left(\frac{1}{2}N+r+1\right)!\left(\frac{1}{2}N-r\right)!} \quad (2.39)$$

接下来讨论该模型一些重要的结论： $r = m = \frac{1}{2}N$ ，它对应的态是个非简并的态，

$$\psi_{g, \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}N} = U_g \cdot [++\cdots+] \quad (2.40)$$

但是 $r = \frac{N}{2}$ 的态包含不同的 m 值，它们是非简并的，可通过 $R_x - iR_y$ 作用在态(2.40)上得到，可写成[12]

$$\psi_{gm \frac{N}{2}} = \left[\left(R^2 - R_z^2 - R_z \right)^{\frac{1}{2}} (R_x - iR_y) \right]^{\frac{N}{2}-m} \psi_{g \frac{N}{2} \frac{N}{2}} \quad (2.41)$$

而相互作用的矩阵元是

$$\begin{aligned} & \langle g, r, m | \mathbf{e}_x R_x + \mathbf{e}_y R_y | g, r, m \mp 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y) [(r \pm m)(r \mp m + 1)]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

跃迁几率正比于相互作用矩阵元的平方。瞬时辐射几率是

$$I = I_0 (r+m)(r-m+1) \quad (2.43)$$

其中 $m = r = \frac{1}{2}$ 时， I_0 是处于激发态原子构成的气体的辐射率，

$$I_0 = \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{c} \left| \left(\sum_k \frac{e_k \mathbf{P}_k}{m_k c} \right)_{+-} \right|^2 = \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{c} |\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y|^2 = \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{c} (e_x^2 + e_y^2)。$$

如果 $m = r = \frac{1}{2}N$ ，即所有原子都处在激发态上，瞬时辐射几率

$$I = I_0 N。$$

当 r 很大 $|m|$ 很小时，发生相干辐射，例如， N 取偶数时，

$$r = \frac{1}{2}N, \quad m = 0, \quad I = \frac{1}{2}N \left(\frac{1}{2}N + 1 \right) I_0 \quad (2.44)$$

这是最大的辐射率，此时具有偶数原子的气体能够自发辐射，其满足 $I \sim N^2$ 。

Dicke 模型证明了多个原子与单模场作用时，原子不是独立的，当 r 很大 $|m|$ 很小时，原子自发辐射几率正比于原子数的平方。

Tavis-Cummings模型是在Dicke模型基础上，考虑单模光场是量子化的情况，其哈密顿量可写成[13]：

$$H = R_z + a^+ a - gaR^+ - g^* a^+ R^- \quad (2.45)$$

其中 a 是单模光场湮灭一个光子的算符， $g = |g|e^{i\phi}$ 是原子与光场的耦合常数。该哈密顿量是在偶极近似下得到的，并且 N 个原子被放置的空间尺度比光波长很小，也就是满足长波近似。

无相互作用的系统的态 $|n\rangle|r, m\rangle$ 是 $H_0 = R_z + a^+ a$ ， R^2 和 R_z 的本征态

$$H_0 |n\rangle|r, m\rangle = (m+n) |n\rangle|r, m\rangle,$$

$$R_z |r, m\rangle = \sum_{j=1}^N R_{jz} |r, m\rangle = m |r, m\rangle,$$

$$R_{\pm} |r, m\rangle = \sum_{j=1}^N R_{j\pm} |r, m\rangle = e^{\pm i\phi_j} [r(r+1) - m(m\pm 1)]^{1/2} |r, m\pm 1\rangle,$$

光子湮灭算符满足

$$a |n\rangle = e^{i\phi_n} \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad [a, a^+] = 1$$

其中 $R^2 \equiv R_z^2 + (R_+ R_- + R_- R_+)/2$ ， $R_{\pm} = R_x \pm iR_y$ 。因为 $[R^2, H] = [H_0, H] = 0$ ， H 的本征态可选择 R^2 和 H_0 的本征态来表示，即可通过量子数 r 和 c ($-r < c = m+n < \infty$)。

我们选择 H 的本征态是 $|r, c, j\rangle$ ，即

$$H |r, c, j\rangle = \lambda_{r,c,j} |r, c, j\rangle$$

其中当 $c \geq r$ 量子数 j 有 $2r+1$ 个取值，如 $0, 1, 2, \dots, 2r$ ；当 $c < r$ ，则有 $c+r+1$ 种可能取值，如 $0, 1, 2, \dots, c+r$ 。另外 $|r, c, j\rangle$ 是 H ， R^2 和 H_0 的共同本征态，这里我们把该本征态展开

$$|r, c, j\rangle = \sum_{n=c-r}^{c+r} A_n^{(r,c,j)} |n\rangle |r, c-n\rangle,$$

其中系数 $A_n(r, c, j)$ 满足微分方程

$$-|\kappa|e^{i\phi}n^{1/2}C_{r,c-n}A_{n-1}^{(r,c,j)} + (c - \lambda_{r,c,j})A_n^{(r,c,j)} - |\kappa|e^{-i\phi}(n+1)^{1/2}C_{r,c-n-1}A_{n+1}^{(r,c,j)} = 0$$

其中

$$\phi \equiv \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

$$C_{r,c-n} \equiv [r(r+1) - (c-n)(c-n+1)]^{1/2}$$

当 $c \geq r$ 时

$$A_{r+c+1}^{(r,c,j)} = A_{c-r-1}^{(r,c,j)} = 0,$$

当 $c < r$ 时

$$A_{r+c+1}^{(r,c,j)} = A_{-1}^{(r,c,j)} = 0。$$

利用数学迭代方法，我们可以得到系数 $A_n^{(r,c,j)}$ 。当 n 是偶数，且 $0 \leq n \leq c+r$

$$A_n = (-1)^{n/2} S_{n/2}^{(n-1)} / \sqrt{(n!) C_{c-1} C_{c-2} \cdots C_{c-n}}, \quad (2.46)$$

当 n 是奇数，且 $0 \leq n \leq c+r$

$$A_n = 0,$$

当 $n - (c - r)$ 是偶数， $c - r \leq n \leq c + r$

$$A_n = (-1)^{(r+n-c)/2} S_{(r+n-c)/2}^{(n-1)} / \sqrt{(n!) C_{r-1} C_{r-2} \cdots C_{c-n}}$$

当 $n - (c - r)$ 是奇数， $c - r \leq n \leq c + r$

$$A_n = 0。$$

A_n 可以解出，这样 Tavis-Cummings 模型的哈密顿量可精确解出， $A_n(r, c, j)$ 随粒子数 N 变化的关系详细过程参考[13]。 $j = 0, 1, \dots, 2r$ 对应基态，第一激发态，……和最高激发态。精确解为实际的物理系统可提供更多的预见，对一些近似结果提供标准的对照。量子电动力学的经典极限是量子数与不确定度一样大，光子数态不能作为自然基矢。1963年 Glauber 指出以量子数态为完备基矢也适合研究经典区域[14]。

基态光子数的散射为

$$\sigma^2 = \langle (n - n_0) \rangle = \frac{n_0}{1 + 2(\alpha^2)^{1/2} n_0 / q_0}$$

在任何情况下，该散射都小于由泊松分布获得的经典散射， $\sigma^2 = n_0$ 。在这两个模型的基础上人们又做了很多有意义的研究工作。

第三节 受激拉曼绝热通道

上一节我们介绍了单模光场与两能级原子的作用，而我们研究的主要对象是两模的光与三能级的原子相互作用的系统，重点研究其在受激拉曼绝热通道的物理意义。

在这个简单的系统中，涉及到一个三能级原子的三个态和双光子的拉曼过程，其中一个是与初始态 $|1\rangle$ 以及中间态 $|2\rangle$ 相联系的泵浦光P相互作用，另外一个与态 $|2\rangle$ 和末态 $|3\rangle$ 相联系的斯托克光S相互作用[15]，关系如图2.4。态 $|1\rangle$ 可能是一个原子或分子振动基态中的转动能级，态 $|3\rangle$ 是较高的激发的振动态。可供选择的态可能是亚稳的原子态，其寿命与激光脉冲的长度一样。

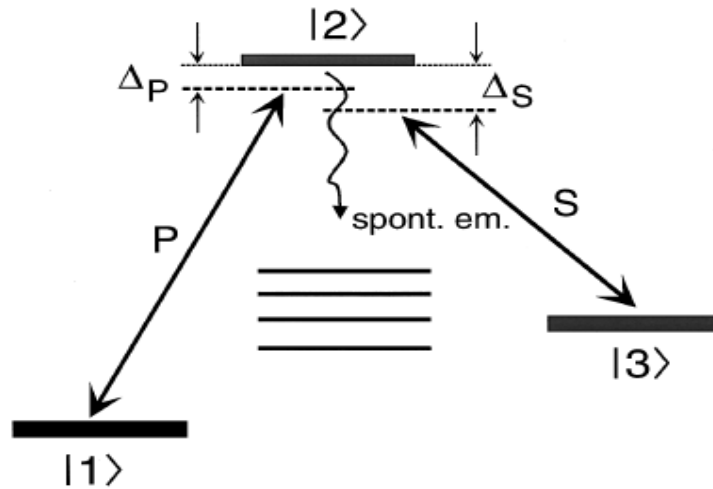


图2.4 三能级激发谱。初态为 $|1\rangle$ ，末态为 $|3\rangle$ ，二者通过斯托克光S和泵浦光P和中间态 $|2\rangle$ 耦合起来。中间态可能通过自发辐射衰变到其它的能级。泵浦光和斯托克光与跃迁频率的失谐量分别是 Δ_p 和 Δ_s [15]。

初态和末态存在，然而中间态 $|2\rangle$ 不仅能够自发辐射到 $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ ，而且可以辐射到其它态。受激拉曼绝热通道(STIRAP)就是将所有的原子从 $|1\rangle$ 都转移到 $|3\rangle$ ，而在这

个过程，要求原子几乎不占据中间态 $|2\rangle$ ，这样原子就不可能衰变到其它态。另外泵浦光和斯托克光与双光子的拉曼跃迁共振才能使得光与原子的耦合达到最强。

对于选择性激发很明显选择吸收与量子态之间能极差相匹配的一个或几个光子。粒子从一个被占据的量子态向一个空态转移，最后的占据情况依赖于光的相干特点。相干性的差异会导致激发动力学不同，这样也要求不同的方程来描述系统的时间演化[16]。

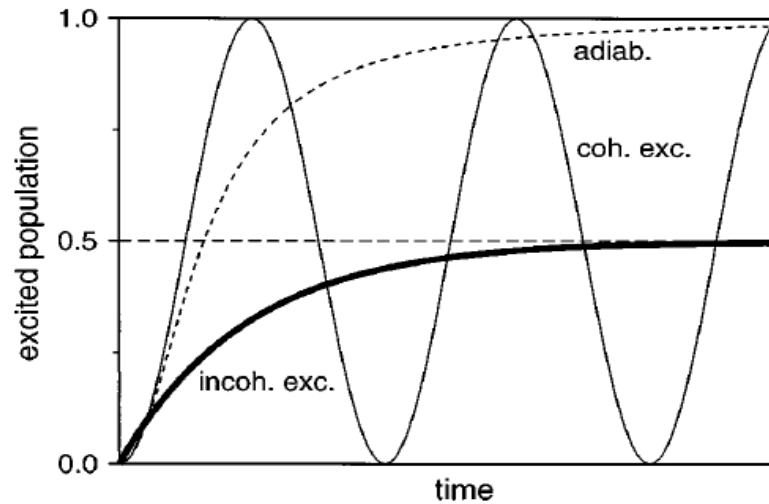


图2.5 两能级系统中、上能级占据数的演化图。分别在不同的辐射场的驱动下：(1)相干辐射场(细线)，(2)非相干辐射场(粗线)，(3)满足绝热通道的场(虚线)[15]。

从图2.5中，我们可以看出在相干辐射场作用下，上能级的占据数呈正弦函数变化，可达到100%和0%；而在饱和的非相干场作用下只有50%的粒子可以占据上能级；在绝热通道情况，所有的粒子最后都被转移到了激发态。对于最后一种情况，优点是当相干脉冲慢慢扫过共振点，即在绝热通道时，获得比前两种情况更有效均匀的激发几率。我们利用这一方法可获得如图2.5某种原子态占据数的可选择性的转换。

为了获得完全的占据数转移，一般采用先打开斯托克光 S ，使得 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 两个空态耦合成相干叠加态，接下来通过泵浦光 P 与 $|1\rangle$ 作用，这样所谓的“俘获态(trapped state)”形成。其特点是粒子不会被泵浦光作用到激发态 $|2\rangle$ ，使得中间态的衰减情况不会发生。

三能级的耦合系统在受激拉曼绝热通道的情况，其哈密顿量在旋波近似下可写成[15]

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_p(t) & 0 \\ \Omega_p(t) & 2\Delta_p & \Omega_s(t) \\ 0 & \Omega_s(t) & 2(\Delta_p - \Delta_s) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

其中态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 耦合强度由Rabi频率 $\Omega_p(t)$ 决定，而同理态 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 耦合强度由 $\Omega_s(t)$ 而定。双光子共振的失谐量出现在对角线上， $\hbar\Delta_p = (E_2 - E_1) - \hbar\omega_p$ 是泵浦光与 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的跃迁频率之间的失谐量， $\hbar\Delta_s = (E_2 - E_3) - \hbar\omega_s$ 是斯托克光与 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 的跃迁频率之间的失谐量。这个哈密顿量的瞬时本征态是

$$|a^+\rangle = \sin\Theta \sin\Phi |1\rangle + \cos\Phi |2\rangle + \cos\Theta \sin\Phi |3\rangle, \quad (2.48)$$

$$|a^0\rangle = \cos\Theta |1\rangle - \sin\Theta |3\rangle, \quad (2.49)$$

$$|a^-\rangle = \sin\Theta \cos\Phi |1\rangle - \sin\Phi |2\rangle + \cos\Theta \cos\Phi |3\rangle, \quad (2.50)$$

随时间变化的角度 Θ 由关系式

$$\tan\Theta = \frac{\Omega_p(t)}{\Omega_s(t)} \quad (2.51)$$

决定。另外一个角度 Φ 也由Rabi频率和失谐量决定[17]。本征态(2.48-50)在双光子共振的情况下 $\Delta_p = \Delta_s$ 仍然有效。本征态结合两个辐射场的光子数，被称作物质场的“缀饰态(dressed states)”。这个依赖于时间的缀饰态的本征值是

$$\omega^+ = \Delta_p + \sqrt{\Delta_p^2 + \Omega_p^2 + \Omega_s^2}, \quad \omega^0 = 0, \quad \omega^- = \Delta_p - \sqrt{\Delta_p^2 + \Omega_p^2 + \Omega_s^2}. \quad (2.52)$$

控制三个态占据数的分布，是这个工作的重点，这个作用过程，如图2.6 (1,2)所示。初始制备原子都处于 $|1\rangle$ 态，最后我们要求原子都处于 $|3\rangle$ 态，中间要避免使原子处于中间态 $|2\rangle$ 。 $|a^+\rangle$ 和 $|a^-\rangle$ 都包含中间态 $|2\rangle$ ，所以我们要避免出现这两个缀饰态。而 $|a^0\rangle$ 不包含 $|2\rangle$ 态，因此是实现从 $|1\rangle$ 至 $|3\rangle$ 转移的理想媒介。式(2.51)中的角度 Θ 实验上可通过控制Rabi频率的比值来调节。如图2.6，可分为三个阶段I, II,与III。在I阶段， $\Theta = 0$ 仅有斯托克光出现，哈密顿量的态矢量 $|\psi\rangle$ 就是 $|a^0\rangle = |1\rangle$ 。在第II阶段，斯

托克光的Rabi频率平滑衰减，而泵浦光的Rabi频率增加到最大值，角度 Θ 从 0° 变化到 90° ，而原子都占据 $|3\rangle$ ($|a^0\rangle = |3\rangle$)。如图2.6.(2) $|a^0\rangle$ 在垂直于 $|2\rangle$ 态的平面里被旋转至与基矢 $|3\rangle$ 平行的位置。因此这个过程不会出现原子占据 $|2\rangle$ 态的情况。

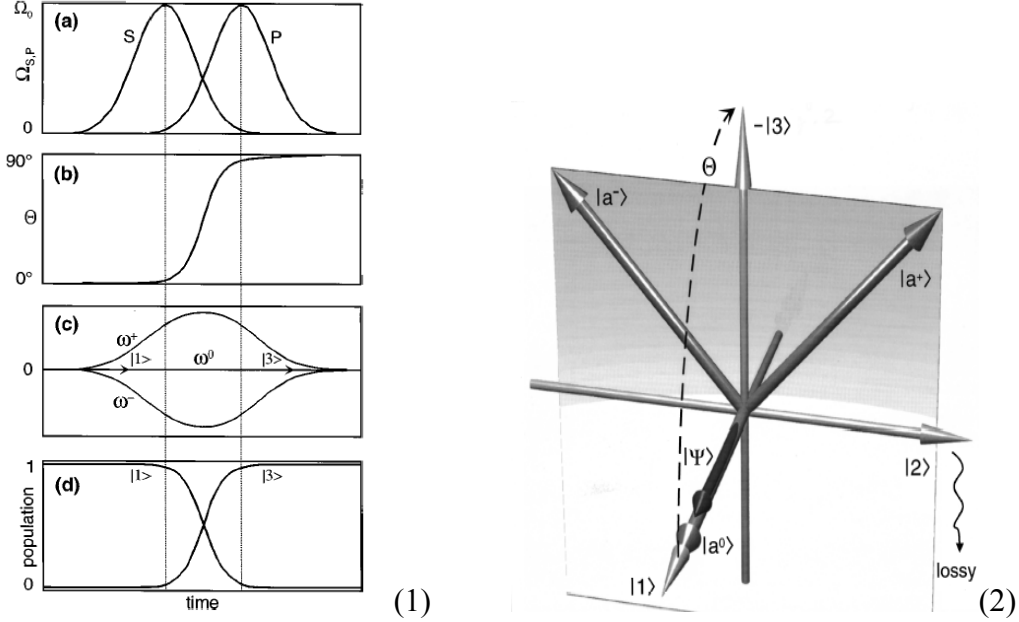


图2.6 (1) (a) 泵浦光和斯托克光的Rabi频率, (b) 角度 Θ , (c) 缀饰态的本征值, (d) 能级的占据的演化。(2) 分别以裸态 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 以及 $|a^+>$ 、 $|a^->$ 和 $|a^0>$ 为基矢, 受激拉曼绝热通道过程系统在希尔伯特空间演化的图解[15]。

在以上的过程中，与辐射场强耦合的原子态必须使得系统的态矢量绝热处于状态 $|a^0\rangle$ 。通过图2.6 (1).c我们可以看到缀饰本征态。初始时刻 $t = 0$ 两束光的Rabi频率都是零，三个态是简并态

$$\omega^+ = \omega^- = \omega^0 = 0$$

这一条件不影响后来粒子数的转移过程。在I阶段，斯托克光将 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 耦合在一起， $|1\rangle$ 并不参与这一作用，而本征值却因此发生劈裂

$$\omega^\pm = \Delta_p \pm \sqrt{\Delta_p^2 + \Omega_s^2}, \quad \omega^0 = 0。$$

初始时刻 $|a^0\rangle = |1\rangle$ ，其本征值保持不变(如图2.6.(1) c)。矢量 $|a^0\rangle$ 仍保留在起始位置，

而 $|a^+\rangle$ 和 $|a^-\rangle$ 态的简并消除了。在第II阶段，本征值 ω^+ ， ω^- 和 ω^0 分裂得最大，即耦合是最强的，两个辐射场都有贡献，态矢量从与 $|1\rangle$ 态平行的位置移至与 $|3\rangle$ 平行的位置。如果态矢量 $|\psi\rangle$ 绝热演化，该过程导致原子从 $|1\rangle$ 至 $|3\rangle$ 的完全转移。如果耦合不是足够充分，即Rabi频率太小，态矢量 $|\psi\rangle$ 落后于缀饰态的变化，将在 $|a^0\rangle$ 态附近做进动。定性上说态矢量将获得沿着 $|a^+\rangle$ 或 $|a^-\rangle$ 的分量，也就不是绝热演化，这意味着会产生一些处于中间态 $|2\rangle$ 的原子使得原子数的转移是不完全的。

通过以上解释我们比较清楚地了解了受激拉曼绝热通道的过程。

第四节 小结

本章我们介绍了腔的电动力学的一些知识，以及单模光场与二能级原子的相互作用的几个主要模型，最后我们介绍了三能级原子的受激拉曼绝热通道，为进一步了解单模腔光场和两能级原子作用得到单分量原子与光场耦合的系统，以及两模腔光场和三能级 Λ 型原子作用实现两分量原子与两模光场耦合系统作铺。

参考文献:

- [1] H.-A. Bachor and T. C. Ralph, A Guide to Experiments in Quantum Optics, Wiley-VCH, 2nd Ed., Berlin, 2004.
- [2] R. Grimm, M. Weidenmüller, and Y. B. Ovchinnikov, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, (2000) **42** 95.
- [3] F. Brennecke, T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, M. Köhl and T. Esslinger, Nature (2007) **450** 268.
- [4] D. Haubrich, H. Schadwinkel, F. Strauch, B. Ueberholz, R. Wynands and D. Meschede, Europhys. Lett. (1996) **34** 663.
- [5] S. Yoon, Y. Choi, S. Park, J. Kim, J.-H. Lee, and K. An, Appl. Phys. Lett. (2006) **88** 211104.
- [6] I. B. Mekhov, C. Maschler and H. Ritsch, Nature Phys. (2007) **3** 319.
- [7] Q. A. Turchette, Quantum optics with single atoms and single photons, PhD thesis (1997) California institute of technology.
- [8] N. Hodgson and H. Weber, Laser resonators and beam propagation - Fundamentals, advanced concepts and application (Second Edition) Springer (2005).
- [9] A. Yariv, Quantum Electronics (Third edition), John wiley & sons, (1988) p147-148.
- [10] M. O. Scully and M. S. Zubairy, Quantum Optics, (1996) Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] R. H. Dicke, Phys. Rev. (1954) **93** 99.
- [12] E. U. Condon and G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, (1935) Cambridge University Press, Cambridge, p45-49.
- [13] M. Tavis and F. W. Cummings, Phys. Rev. (1968) **170** 379.
- [14] R. J. Glauber, Phys. Rev. (1963) **131** 2766.
- [15] K. Bergmann, H. Theuer and B. W. Shore, Rev. Mod. Phys. (1998) **70** 1003.
- [16] B. W. Shore, The Theory of Coherent Atomic Excitation, (1990) Wiley, New York.
- [17] M. Fewell, B. W. Shore, and K. Bergmann, Aust. J. Phys. (1997) **50** 281.

第三章 光晶格中两分量玻色原子在Feshbach共振附近的基态转变

光晶格中的冷原子量子相变的研究在理论和实验两方面都取得了巨大的进步[1-2]，而且成为目前人们探索超冷原子系统中的物理机制所关注的问题之一。对于周期势中的单分量玻色子，超流态到绝缘态相变研究的一个重要的结论是绝缘态中每个格点粒子数的涨落受到抑制。然而光晶格中多分量的玻色子或费米子，研究发现它们在绝缘区域还具有丰富的相图。考虑最简单的两分量的玻色子时，在绝缘区域会出现相分离和超对流等新的量子态[3]。

迄今为止，很多方法用来推导并描述绝缘区里多分量粒子的自旋相关的动力学有效哈密顿量。他们大多采用了单带近似，即忽略了高能带的存在。在相同格点的相互作用远小于第一能带和第二能带的能隙时，这样的近似是合理的[3-6]。如果通过调节Feshbach共振改变原子的散射强度使得相互作用超过能隙时，单带近似的结论就不再成立。最近Köhl 等人研究了在三维的光晶格中 ^{40}K 的两个超精细态的原子通过调节Feshbach共振使其处于强相互作用区域。发现晶格中的几个低能带同时被占据[7-9]。理论方面Diener和Ho证明了两带近似下在Feshbach共振附近光晶格中的费米系统会从能带绝缘体变成Mott绝缘体[10]。我们的工作是将单带玻色-哈伯德模型推广至两带，研究其绝缘相的相变问题。

2008年Trotzky等人直接测量了光晶格中两分量超冷原子的超交换作用[11]。他们动态地改变近邻格点间的势能偏置，能够控制超交换相互作用的大小以及正负号，因此使得系统在反铁磁和铁磁自旋相互作用间转换。

第一节 自旋超交换哈密顿量

3.1.1 简并微扰法

微扰法是量子力学解定态问题应用很广泛的近似方法之一。作为例子，这儿我们介绍光晶格中两分量的玻色子在绝缘相的情况下的简并微扰法。

由于我们仅考虑最近邻的跃迁和同一格点的相互作用，玻色哈伯德模型可用两个格点的模型来简化计算过程[3]

$$H_{12} = H_{12}^{(0)} + V_{12} \quad (3.1)$$

其中

$$H_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i,\sigma,\sigma'} U_{\sigma\sigma'} : n_{i\sigma} n_{i\sigma'} : \quad (3.2)$$

$$V_{12} = - \sum_{\sigma} (t_{\sigma} b_{1\sigma}^{\dagger} b_{2\sigma} + H.c.) \quad (3.3)$$

第一项(3.2)是描述同一格点粒子间的相互作用，而第二项(3.3)是近邻格点间的跃迁。 $n_{i\sigma} = b_{i\sigma}^{\dagger} b_{i\sigma}$ 是格点*i*上自旋为 σ 的粒子数算符。参数 $U_{\sigma\sigma'} = g_{\sigma\sigma'} \int d\mathbf{x} |\varphi_{\sigma}|^2 |\varphi_{\sigma'}|^2$ ，其中 $g_{\sigma\sigma'}$ 描述自旋分别是 σ 和 σ' 的粒子间的相互作用的系数， $:\dots:$ 表示产生湮灭算符的正规乘积，规则是产生算符放在式子的最左边，由于研究对象是玻色子，每换一次位置不改变符号[12]，如

$$: n_{i\sigma} n_{i\sigma'} : := b_{i\sigma}^{\dagger} b_{i\sigma} b_{i\sigma'}^{\dagger} b_{i\sigma'} := b_{i\sigma}^{\dagger} b_{i\sigma'}^{\dagger} b_{i\sigma'} b_{i\sigma} \quad (3.4)$$

t_{σ} 是自旋为 σ 的粒子从一个格点到最近邻格点的跃迁矩阵元。一般情况下它是个正的实数，不同自旋的原子对应的跃迁矩阵元 t_{σ} 不同。

在绝缘相，也就是一个公度的(commensurate)晶格空间，每个格点的占据数 $n_i = \sum_{\sigma} n_{i\sigma} = \nu$ 为整数。当跃迁幅远远小于相互作用能量时， $|t_{\sigma}| \ll U_{\sigma\sigma'}$ ，单个粒子的跃迁会改变某些格点的占据数，因此会增加系统的能量，而交换两个不同自旋的粒子则不会。换言之，排除单个粒子的跃迁，我们只考虑不同自旋的粒子之间的隧穿，即二阶隧穿过程。选择零阶哈密顿量 $H_{12}^{(0)}$ ，将其基态能级修正至二阶。

首先简单介绍一下简并微扰的方法[12,13]，系统哈密顿量 H_{12} 的能量本征方程是

$$H_{12} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (3.5)$$

这里把微扰项是 $V_{12} = \lambda V$ ， λ 是刻画跃迁的一个参数，是个小量 $|\lambda| \ll 1$ 。 $H_{12}^{(0)}$ 的能量本征方程记作

$$H_{12}^{(0)} \sum_{n,\nu} |n, \nu\rangle = \sum_{n,\nu} E_n^{(0)} |n, \nu\rangle$$

其中 n 是描述 $H_{12}^{(0)}$ 的能级指标， ν 是 n 能级上简并态的指标。利用 $H_{12}^{(0)}$ 的能量本征态来展开 $|\psi\rangle$ ，

$$|\psi\rangle = \sum_{n,v} |n,v\rangle \langle n,v|\psi\rangle = \sum_{n,v} C_{n,v} |n,v\rangle \quad (3.6)$$

将(3.6)代入(3.5)，两边同时左乘 $\langle m,\mu|$

$$E_m^{(0)} C_{m,\mu} + \sum_{n,v} \langle m,\mu|\lambda V|n,v\rangle C_{n,v} = E C_{m,\mu} \quad (3.7)$$

然后本征态的展开系数 $C_{n,v}$ 和本征能量 E 以 $H_{12}^{(0)}$ 的本征态和能量为中心，把微扰的作用逐级考虑进来，

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \dots$$

$$C_{n,v} = C_{n,v}^{(0)} + \lambda C_{n,v}^{(1)} + \lambda^2 C_{n,v}^{(2)} + \dots$$

然后代入(3.7)，整理可得到各级的微扰近似的方程

$$(E^{(0)} - E_m^{(0)}) C_{m,\mu}^{(0)} = 0 \quad (3.8)$$

$$(E^{(0)} - E_m^{(0)}) C_{m,\mu}^{(1)} - \sum_{n,v} \langle m,\mu|V|n,v\rangle C_{n,v}^{(0)} + E^{(1)} C_{m,\mu}^{(0)} = 0 \quad (3.9)$$

$$(E^{(0)} - E_m^{(0)}) C_{m,\mu}^{(2)} - \sum_{n,v} \langle m,\mu|V|n,v\rangle C_{n,v}^{(1)} + E^{(1)} C_{m,\mu}^{(1)} + E^{(2)} C_{m,\mu}^{(0)} = 0 \quad (3.10)$$

根据这三个式子就能得到所要求的有效哈密顿量。选择基态来进行研究 $E^{(0)} = E_0^{(0)}$ ，
据(3.8)

$$(E_0^{(0)} - E_m^{(0)}) C_{m,\mu}^{(0)} = 0$$

可得

$$C_{m,\mu}^{(0)} = a_\mu \delta_{m,0}$$

将这个结果代入(3.9)，得：

$$(E^{(0)} - E_m^{(0)}) C_{m,\mu}^{(1)} - \sum_v \langle m,\mu|V|0,v\rangle a_v + E_0^{(1)} a_\mu \delta_{m,0} = 0$$

当 $m=0$ 时，

$$E_0^{(1)} \delta_{\mu,v} - \langle 0,\mu|V|0,v\rangle = 0 \quad (3.11)$$

当 $m \neq 0$ 时，

$$C_{1,\mu}^{(1)} = \frac{\sum_v \langle 1,\mu|V|0,v\rangle a_v}{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})} \quad (3.12)$$

将以上的结果都代入(3.10)，我们就可以得到能量的二阶修正

$$E_0^{(2)} \delta_{\mu,\tau} = \sum_{\nu} \frac{\langle 0, \mu | V_{12} | 1, \nu \rangle \langle 1, \nu | V_{12} | 0, \tau \rangle}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} \quad (3.13)$$

根据这个矩阵元我们可以得到建立在以上简并微扰的方法修正的有效的哈密顿量的形式[3]

$$H_{eff} = \frac{V_{12} \sum_{\nu} |1, \nu\rangle \langle 1, \nu| V_{12}}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} \quad (3.14)$$

3.1.2 有效哈密顿量

接下来我们研究对于费米和玻色两种情况的基态和微扰项作用后的虚的激发态(我们选择每个格点的占据数 $\nu=1$)

(1) 对于费米情况的哈伯德模型的零阶的哈密顿量根据(3.4)可写成

$$H_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i, \sigma \neq \sigma'} U_{\sigma\sigma'} n_{i\sigma} n_{i\sigma'} \quad (3.15)$$

根据泡里不相容原理它的基态 $|0, \nu\rangle$ 是四重简并态, $\nu=1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} |\uparrow, \downarrow\rangle &= b_{1\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ |0\rangle, & |\downarrow, \uparrow\rangle &= b_{1\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ |0\rangle, \\ |\uparrow, \uparrow\rangle &= b_{1\uparrow}^+ b_{2\uparrow}^+ |0\rangle, & |\downarrow, \downarrow\rangle &= b_{1\downarrow}^+ b_{2\downarrow}^+ |0\rangle; \end{aligned} \quad (3.16)$$

我们考虑的是两种粒子, 第一种用“ \uparrow ”来表示, 另一种用“ \downarrow ”表示, $|0\rangle$ 是真空态。其中 $|\uparrow, \downarrow\rangle$ 表示第一格点上有一个自旋 \uparrow 的粒子, 第二格点有一个自旋 \downarrow 的粒子。

据 $H_{12}^{(0)}|0, \nu\rangle = 0|0, \nu\rangle$, 基态的能量为 0, 而虚的激发态 $|1, \nu\rangle$ ($\nu=1, 2$ 是二重简并)是

$$|1, \nu\rangle = \begin{cases} |\uparrow\downarrow, 0\rangle = b_{1\uparrow}^+ b_{1\downarrow}^+ |0\rangle \\ |0, \downarrow\uparrow\rangle = b_{2\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ |0\rangle \end{cases} \quad (3.17)$$

它的能量是 $H_{12}^{(0)}|1, \nu\rangle = U_{\uparrow\downarrow}|1, \nu\rangle$ 。在此基础上我们根据简并微扰所得到的哈伯德模型的有效哈密顿量是

$$H_{eff} = -\frac{1}{U_{\uparrow\downarrow}} \left[(t_{\uparrow}^2 + t_{\downarrow}^2) (b_{1\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ b_{2\uparrow} b_{1\downarrow} + b_{1\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ b_{2\downarrow} b_{1\uparrow}) - 2t_{\uparrow} t_{\downarrow} (b_{1\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ b_{2\uparrow} b_{1\downarrow} + b_{1\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ b_{2\downarrow} b_{1\uparrow}) \right] \quad (3.18)$$

(2)对于玻色子的情况, 玻色哈伯德模型的零阶哈密顿量是

$$H_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i,\sigma} U_{\sigma\sigma} n_{i\sigma} (n_{i\sigma} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{i,\sigma \neq \sigma'} U_{\sigma\sigma'} n_{i\sigma} n_{i\sigma'} \quad (3.19)$$

它的基态同费米子的相同，也用 (3.16) 的表示，它的能量本征方程是 $H_{12}^{(0)}|0, \nu\rangle = 0|0, \nu\rangle$ 。然而虚的激发态 $|1, \nu\rangle$ 与 (3.17) 不同，是 6 重简并态

$$\begin{aligned} |\uparrow\downarrow, 0\rangle &= b_{1\uparrow}^+ b_{1\downarrow}^+ |0\rangle, & |0, \downarrow\uparrow\rangle &= b_{2\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ |0\rangle, & |\uparrow\uparrow, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} b_{1\uparrow}^+ b_{1\uparrow}^+ |0\rangle, \\ |0, \uparrow\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} b_{2\uparrow}^+ b_{2\uparrow}^+ |0\rangle, & |\downarrow\downarrow, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} b_{1\downarrow}^+ b_{1\downarrow}^+ |0\rangle, & |0, \downarrow\downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} b_{2\downarrow}^+ b_{2\downarrow}^+ |0\rangle. \end{aligned}$$

它们对应的能量本征方程分别为，

$$\begin{aligned} H_{12}^{(0)}|\uparrow\downarrow, 0\rangle &= U_{\uparrow\downarrow}|\uparrow\downarrow, 0\rangle & H_{12}^{(0)}|0, \uparrow\downarrow\rangle &= U_{\uparrow\downarrow}|0, \uparrow\downarrow\rangle \\ H_{12}^{(0)}|\uparrow\uparrow, 0\rangle &= U_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow, 0\rangle & H_{12}^{(0)}|0, \uparrow\uparrow\rangle &= U_{\uparrow\uparrow}|0, \uparrow\uparrow\rangle \\ H_{12}^{(0)}|\downarrow\downarrow, 0\rangle &= U_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow, 0\rangle & H_{12}^{(0)}|0, \downarrow\downarrow\rangle &= U_{\downarrow\downarrow}|0, \downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

在此基础上我们根据简并微扰所得到的玻色哈伯德模型的有效哈密顿量是

$$\begin{aligned} H_{eff} &= -\frac{t_{\uparrow}^2 + t_{\downarrow}^2}{U_{\uparrow\downarrow}} (b_{1\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ b_{2\uparrow} b_{1\downarrow} + b_{1\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ b_{2\downarrow} b_{1\uparrow}) - \frac{2t_{\downarrow}t_{\uparrow}}{U_{\uparrow\downarrow}} (b_{1\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ b_{2\uparrow} b_{1\downarrow} + b_{1\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ b_{2\downarrow} b_{1\uparrow}) \\ &\quad - \frac{4t_{\uparrow}^2}{U_{\uparrow\uparrow}} b_{1\uparrow}^+ b_{2\uparrow}^+ b_{2\uparrow} b_{1\uparrow} - \frac{4t_{\downarrow}^2}{U_{\downarrow\downarrow}} b_{1\downarrow}^+ b_{2\downarrow}^+ b_{2\downarrow} b_{1\downarrow}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中超交换过程中 $b_{1\uparrow}^+ b_{2\downarrow}^+ b_{2\uparrow} b_{1\downarrow} + b_{1\downarrow}^+ b_{2\uparrow}^+ b_{2\downarrow} b_{1\uparrow}$ 就对应图 3.1[11]。

下一步我们要把这两个有效的哈密顿量转换成泡里矩阵的形式。这个矩阵也叫同位旋(isospin)算符，

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} b_{i\sigma}^+ \vec{\sigma}_{\sigma\sigma'} b_{i\sigma'},$$

其中 $\vec{\sigma}_{\sigma\sigma'}$ 是泡里矩阵， $k = x, y, z$

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

所以同位旋算符可写成：

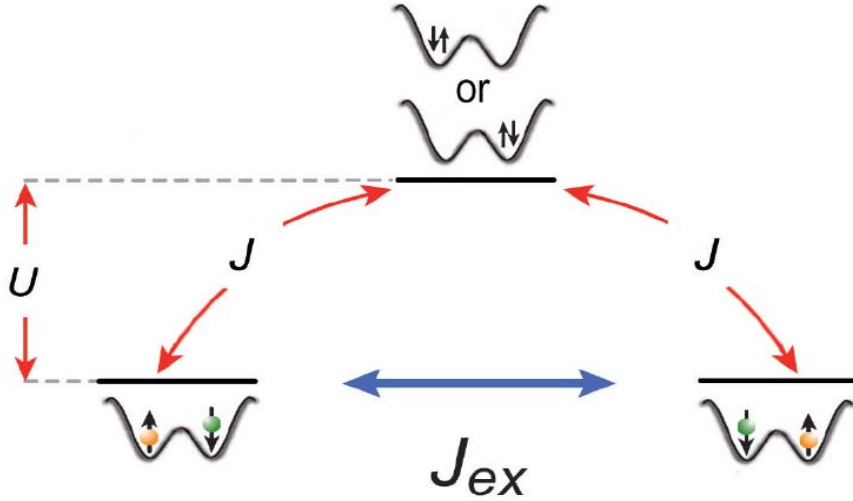


图 3.1 超交换过程。

$$S_i^z = \frac{1}{2}(b_{i\uparrow}^+ b_{i\uparrow} - b_{i\downarrow}^+ b_{i\downarrow}) \quad (3.21)$$

$$S_i^x = \frac{1}{2}(b_{i\uparrow}^+ b_{i\downarrow} + b_{i\downarrow}^+ b_{i\uparrow}) \quad (3.22)$$

$$S_i^y = \frac{i}{2}(b_{i\uparrow}^+ b_{i\downarrow} - b_{i\downarrow}^+ b_{i\uparrow}) \quad (3.23)$$

根据这三个式子以及占据数

$$b_{i\uparrow}^+ b_{i\uparrow} + b_{i\downarrow}^+ b_{i\downarrow} = 1$$

我们可以反解出产生湮灭算符用自旋算符的表达形式：

$$b_{i\uparrow}^+ b_{i\downarrow} = S_i^x + iS_i^y = S_i^+$$

$$b_{i\downarrow}^+ b_{i\uparrow} = S_i^x - iS_i^y = S_i^-$$

$$b_{i\uparrow}^+ b_{i\uparrow} = S_i^z + \frac{1}{2}$$

$$b_{i\downarrow}^+ b_{i\downarrow} = \frac{1}{2} - S_i^z$$

以上公式对玻色子和费米子都成立。这样我们就可以得到推广到整个格点空间的巨正则系综下的哈伯德模型在绝缘区域的有效哈密顿量分别是

$$H_{eff}^{FF} = J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J' \sum_{\langle ij \rangle} S_i^z S_j^z - B \sum_i S_i^z \quad (3.24)$$

其中系数是 $J = \frac{2t_{\uparrow}t_{\downarrow}}{U_{\uparrow\downarrow}}$ ， $J' = \frac{(t_{\uparrow} - t_{\downarrow})^2}{U_{\uparrow\downarrow}}$ 和 $B = \mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}$ ， μ_{σ} 是 σ 分量的原子的化学势。

当 $|B| > B_c \approx \sqrt{J'(2J+J')}$ [14-16], 系统的基态是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的易平面的反铁磁。由于每个分量的原子是守恒的, 奈尔矢(Néel vector)不能附着于易平面的任意方向。这就保证了精确 U(1)对称性。这种易平面 U(1)对称性仅仅通过形成超对流而发生自发破缺。

对于玻色哈伯德模型, 单占据时的有效哈密顿量是

$$H_{eff}^{BB} = -J' \sum_{\langle ij \rangle} S_i^z S_j^z - J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - B \sum_i S_i^z \quad (3.25)$$

其中系数是 $J' = -\frac{(t_\uparrow + t_\downarrow)^2}{U_{\uparrow\downarrow}} + \frac{2t_\uparrow^2}{U_{\uparrow\uparrow}} + \frac{2t_\downarrow^2}{U_{\downarrow\downarrow}}$, $J = \frac{2t_\uparrow t_\downarrow}{U_{\uparrow\downarrow}}$, $B = \mu_\uparrow - \mu_\downarrow + 2p \left(\frac{t_\uparrow^2}{U_{\uparrow\uparrow}} - \frac{t_\downarrow^2}{U_{\downarrow\downarrow}} \right)$ (其

中 p 是最近邻的格点数)。如果格点占据数大于 1, 相互作用还依赖原子的不同而不同, 会导致问题很复杂。但是在一个假设的条件下它会变得简单: 令 $U_{\uparrow\uparrow} = U_{\downarrow\downarrow} \equiv U$, $U_{\sigma\sigma'} = U + \delta U_{\sigma\sigma'}$, 且 $|\delta U_{\sigma\sigma'}| \ll U$, 这样我们可以近似认为 $U_{\uparrow\downarrow} = U$, 二阶修正的能量的表达式变成了

$$E_0^{(2)} \delta_{\mu,\tau} = -\frac{\langle 0, \mu | V_{12} \sum_v |1, v\rangle \langle 1, v | V_{12} | 0, \tau \rangle}{U} = -\frac{\langle 0, \mu | V_{12} \left(1 - \sum_v |0, v\rangle \langle 0, v| \right) V_{12} | 0, \tau \rangle}{U}$$

由于 $\langle 0, v | V_{12} | 0, \tau \rangle = 0$, 则有效哈密顿量算法与单占据有所不同,

$$H_{eff} = -\frac{V_{12} V_{12}}{U} \quad (3.26)$$

利用同上的方法, 我们可以得到占据数大于 1 的海森堡自旋交换的模型

$$H_{eff}^{12} = -2J' S_1^z S_2^z - 2J \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - B_{12} (S_1^z + S_2^z) \quad (3.27)$$

系数是 $J' = -\frac{(t_\uparrow - t_\downarrow)^2}{U}$, $J = \frac{2t_\uparrow t_\downarrow}{U}$, $B_{12} = (1+v) \frac{t_\uparrow^2 - t_\downarrow^2}{U}$ 。当占据数大于 1 时, 零阶的哈密

顿量的本征能量不等于零, 所以这里需要把零阶哈密顿量考虑进来

$$H_{12}^{(0)} = \left(-U_{\uparrow\downarrow} + \frac{1}{2}(U_{\uparrow\uparrow} + U_{\downarrow\downarrow}) \right) \left((S_1^z)^2 + (S_2^z)^2 \right) + \frac{1}{2}(U_{\uparrow\uparrow} - U_{\downarrow\downarrow})(v-1)(S_1^z + S_2^z) \quad (3.28)$$

将 (3.26) 和 (3.27) 加在一起, 并拓展到所有格点就可得到占据数大于 1 的有效哈密顿量

$$\begin{aligned}
 H_{eff}^{BB} = & -J' \sum_{\langle i,j \rangle} S_1^z S_2^z - J \sum_{i,j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \left(\frac{-2U_{\uparrow\downarrow} + U_{\uparrow\uparrow} + U_{\downarrow\downarrow}}{2} \right) \sum_i (S_i^z)^2 \\
 & - \left(\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} - \frac{1}{2}(v-1)(U_{\uparrow\uparrow} - U_{\downarrow\downarrow}) + pB_{12} \right) \sum_i S_i^z
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

比较(3.24)和(3.28)，我们发现自旋超交换作用的系数，对费米子是正的，而对玻色子是负的，这说明对于费米哈伯德模型来说，当跃迁能量比较小的时候，格点间的粒子自旋为反铁磁，而玻色子则对应铁磁相互作用。这些哈密顿量的形式为 XXZ 的海森堡自旋模型。

第二节 两带近似下两分量玻色哈伯德模型

上一节我们介绍了单带近似下的两分量的费米哈伯德模型和玻色哈伯德模型 $t \ll U$ 情况下可以得到的海森堡自旋模型。由本章引言我们知道在 Feshbach 共振附近，相互作用可以变得很大，而 Ho 将单带的费米哈伯德模型推广到了两带[8]，发现绝缘条件下，当相互作用超过某个临界值时系统会发生量子相变，即，能带绝缘相到 Mott 绝缘相。由于费米子的哈伯德模型与玻色子的模型满足的量子统计不一样，所以研究两带近似下的玻色哈伯德模型对我们理解玻色子在光晶格中的微观性质很重要。首先我们来研究其哈密顿量。

3.2.1 两带近似下的玻色哈伯德模型哈密顿量

我们研究一维的光晶格中两分量的玻色子等量混合，即其化学势 $\mu_{\uparrow} = \mu_{\downarrow} = \mu$ ，并且其每个格点的占据数是 2。哈密顿量可写成[9]

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\sigma} \int_0^L dx \frac{\hbar^2}{2m_a} (\partial_x \psi_{\sigma}^+(x)) (\partial_x \psi_{\sigma}(x)) \\
 & + \sum_{\sigma} \int_0^L dx (V_{0x} \sin^2 kx - \mu) \psi_{\sigma}^+(x) \psi_{\sigma}(x) \\
 & + \frac{g}{4} \sum_{\sigma, \sigma'} \int_0^L dx \psi_{\sigma}^+(x) \psi_{\sigma'}^+(x) \psi_{\sigma}(x) \psi_{\sigma'}(x)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中 m_a 是原子的质量， V_{0x} 是一维光晶格势的振幅。 $g > 0$ 为两个玻色子间的相互作用常数，在这里我们假设同种及异种原子间的相互作用强度相同。因为我们感兴趣的是最多两个布洛赫能带被占据，因此场算符

$$\psi_\sigma(x) = \sum_{i,\alpha} w_{i\alpha}(x) b_{i\sigma\alpha} \quad (3.31)$$

其中能带指标 $\alpha = 1, 2$ 。湮灭算符 $b_{i\sigma\alpha}$ 表示在 i 格点湮灭 α 能带上一个自旋为 σ 的粒子。

而 $w_{i\alpha}(x)$ 表示在 α 能带上的 Wannier 函数。这里近似取为谐振子基态和第一激发态的轨道波函数

$$w_{i1}(x) = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2a_0^2}\right] \quad (3.32)$$

$$w_{i2}(x) = \frac{(-1)^i}{(\pi a_0^2)^{1/4}} \frac{\sqrt{2}(x-x_i)}{a_0} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2a_0^2}\right] \quad (3.33)$$

为两带的 Wannier 函数。其中 $a_0 = \sqrt{\hbar/m_a\omega_T}$ 是局域谐振子基态的大小，这里振荡频率 $\omega_T = \sqrt{4V_{0x}E_R}/\hbar$ 和反冲能量 $E_R = \hbar^2 k^2 / 2m_a$ 。这些 Wannier 函数是实函数，满足 $w_{i\alpha}(x) = w_{i\alpha}^*(x)$ 。将(3.31)代入(3.30)，我们可得到

$$\begin{aligned} H = & -\sum_{i\sigma} \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} b_{i+1\sigma\alpha}^\dagger b_{i\sigma\beta} + H.c. - \sum_{i\alpha} \mu_\alpha b_{i\sigma\alpha}^\dagger b_{i\sigma\alpha} \\ & + \frac{g}{4} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_i \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \int_0^L dx w_{i\alpha}(x) w_{i\gamma}(x) w_{i\delta}(x) w_{i\beta}(x) b_{i\sigma\alpha}^\dagger b_{i\sigma'\gamma}^\dagger b_{i\sigma'\delta} b_{i\sigma\beta} \end{aligned} \quad (3.34)$$

其中跃迁矩阵元

$$t_{\alpha\beta} = -\frac{\hbar^2}{2M} \int_0^L dx \partial_x w_{i+1\alpha}(x) \partial_x w_{i\beta}(x) \quad (3.35)$$

描述了 α 到 β 能带的跃迁，而在 α 能带上的化学势我们定义做

$$\mu_\alpha = \int_0^L dx (V_{0x} \sin^2 kx - \mu) w_{i\alpha}^2(x) \quad (3.36)$$

所以两能带的化学势差 $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$ 是两能带的带隙。哈密顿量的跃迁项是：

$$H_t = - \sum_{i,\sigma,\alpha,\beta} t_{\alpha\beta} b_{i+1\sigma\alpha}^\dagger b_{i\sigma\beta} + H.c. \quad (3.37)$$

描述了原子从 i 格点到最近邻格点 $i+1$ 跃迁。(3.34) 最后一项是描述相互作用能，能带指标 $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ 。它们取相同的值将对应同一能带上的相互作用 (**intraband interaction**)，而如果其中两个取 1，另外两个取 2 将对应不同能带之间的相互作用 (**interband interaction**)，反之则反。但如果其中的三个取 1 而剩下的一个取 2，将不

会贡献任何能量，因为 $w_{i\alpha}^3(x)w_{i\beta}(x)$ 为奇函数

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \int_0^L dx w_{i\alpha}^3(x) w_{i\beta}(x) = 0 \quad (3.38)$$

这样我们可以把包括化学势和相互作用项简单写成两部分，总的哈密顿量由这三部分构成

$$H = H_t + H_{intra} + H_{inter} \quad (3.39)$$

其中

$$H_{intra} = - \sum_{i,\sigma,\alpha} \mu_\alpha b_{i\sigma\alpha}^+ b_{i\sigma\alpha} + \sum_{i,\alpha} U_{\alpha\alpha} n_{i\downarrow\alpha} n_{i\uparrow\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{i\sigma\alpha} U_{\alpha\alpha} n_{i\sigma\alpha} (n_{i\sigma\alpha} - 1) \quad (3.40)$$

$$H_{inter} = - \sum_{i,\alpha \neq \beta} U_{\alpha\beta} (n_{i\uparrow\alpha} n_{i\downarrow\beta} + S_{i\alpha}^+ S_{i\beta}^- + \Delta_{i\alpha}^+ \Delta_{i\beta}) + \frac{1}{2} \sum_{i\sigma,\alpha \neq \beta} U_{\alpha\beta} (n_{i\sigma\alpha} n_{i\sigma\beta} + \Delta_{i\sigma\alpha}' \Delta_{i\sigma\beta}') \quad (3.41)$$

相互作用参数有两类

$$U_{\alpha\alpha} = \frac{g}{2} \int_0^L dx w_{i\alpha}^4(x) \quad (3.42)$$

$$U_{12} = \frac{g}{2} \int_0^L dx w_{i1}^2(x) w_{i2}^2(x) = U_{21} \quad (3.43)$$

如果将轨道函数代入，我们很容易发现 $U_{11} = U$ ， $U_{22} = 0.75U$ ， $U_{12} = 0.5U$ ，

$U = g/4\sqrt{2\pi}a_0$ 。由于我们考虑了两带问题，引入了新的算符：自旋升降算符

$$S_{i\alpha}^+ = b_{i\uparrow\alpha}^+ b_{i\downarrow\alpha} \quad (3.44)$$

表示在 α 能带上湮灭一个自旋 \downarrow 的粒子产生一个自旋 \uparrow 的粒子，使得 i 格点能带上的自旋发生了转换，其共轭项是 $S_{i\alpha}^- = (S_{i\alpha}^+)^+$ 。注意不同能带间相互作用项 (3.41) 中 $S_{i\alpha}^+ S_{i\beta}^-$ 描述了上能带和下能带之间的轨道耦合，我们得到了与费米子双带模型相反的符号 (见附录 A)，在费米系统中这种 Hund-like 的轨道耦合倾向于不同能带自旋平行分布，而玻色子模型自旋则倾向于在不同能带反平行分布。另外对算符

$$\Delta_{i\beta}' = b_{i\downarrow\beta} b_{i\uparrow\beta}, \quad \Delta_{i\sigma\beta}' = b_{i\sigma\beta} b_{i\sigma\beta} \quad (3.45)$$

表示在 β 能带上同时湮灭两个不同自旋的粒子和相同自旋的两个粒子。由于包含了新的物理过程，所以会有一些新的现象出现。下面我们将具体分析绝缘相

的性质。

3.2.2 两带近似下在绝缘区的相变

在得到哈密顿量以后，我们着重研究一下绝缘相的情况。首先考虑没有跃迁项， $t_{\alpha\beta} = 0$ ，所以每个格点只占据两个粒子，有 10 个基矢，如 $|\uparrow, \downarrow\rangle$ ， $|\downarrow, \uparrow\rangle$ ， $|\uparrow\downarrow, 0\rangle$ ， $|0, \uparrow\uparrow\rangle$ ， $|\uparrow, \uparrow\rangle$ ， $|\downarrow, \downarrow\rangle$ ， $|\uparrow\uparrow, 0\rangle$ ， $|0, \uparrow\uparrow\rangle$ ， $|\downarrow\downarrow, 0\rangle$ ，和 $|0, \downarrow\downarrow\rangle$ 。表示基矢的符号中逗号的左边是能带 1 占据粒子的情况，而右边是能带 2 的情况。例如 $|\uparrow\uparrow, 0\rangle = (1/\sqrt{2})(b_{\uparrow 1}^{\dagger})^2 |0\rangle$ 表示能带 1 中有两个自旋向上的粒子占据，而能带 2 却没有粒子占据， $|\uparrow, \downarrow\rangle = b_{\uparrow 1}^{\dagger} b_{\downarrow 2}^{\dagger} |0\rangle$ 表示能带 1 中有一个自旋向上的粒子占据，而能带 2 有一个自旋向下的粒子占据。在这样的基矢空间我们可以求得哈密顿量精确的能量本征值和对应的本征态。经过计算，发现有 5 个本征值

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= -2\mu_1 + \Delta + \frac{7U}{8} - \sqrt{\left(\Delta - \frac{U}{8}\right)^2 + \left(\frac{U}{2}\right)^2} \\
 \varepsilon_2 &= -2\mu_1 + \Delta \\
 \varepsilon_3 &= -2\mu_1 + \Delta + \frac{U}{2} \\
 \varepsilon_4 &= -2\mu_1 + \Delta + U \\
 \varepsilon_5 &= -2\mu_1 + \Delta + \frac{7U}{8} + \sqrt{\left(\Delta - \frac{U}{8}\right)^2 + \left(\frac{U}{2}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

对于能级 ε_1 有三个简并的态对应

$$\begin{aligned}
 |+\rangle &= -e|\uparrow\uparrow, 0\rangle + f|0, \uparrow\uparrow\rangle \\
 |0\rangle &= -e|\uparrow\downarrow, 0\rangle + f|0, \uparrow\uparrow\rangle \\
 |-\rangle &= -e|\downarrow\downarrow, 0\rangle + f|0, \downarrow\downarrow\rangle
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

而能级 ε_2 对应一个不同粒子占据两个能带的形成的单态

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) \tag{3.48}$$

ε_3 对应的态是：

$$\begin{aligned} |t+\rangle &= |\uparrow, \uparrow\rangle \\ |t-\rangle &= |\downarrow, \downarrow\rangle \end{aligned} \quad (3.49)$$

ε_4 对应的态是：

$$|t0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) \quad (3.50)$$

最后 ε_5 对应的也是一个三重简并的态：

$$\begin{aligned} |+\rangle &= f|\uparrow\uparrow, 0\rangle + e|0, \uparrow\uparrow\rangle \\ |0'\rangle &= f|\uparrow\downarrow, 0\rangle + e|0, \downarrow\uparrow\rangle \\ |-\rangle &= f|\downarrow\downarrow, 0\rangle + e|0, \downarrow\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (3.51)$$

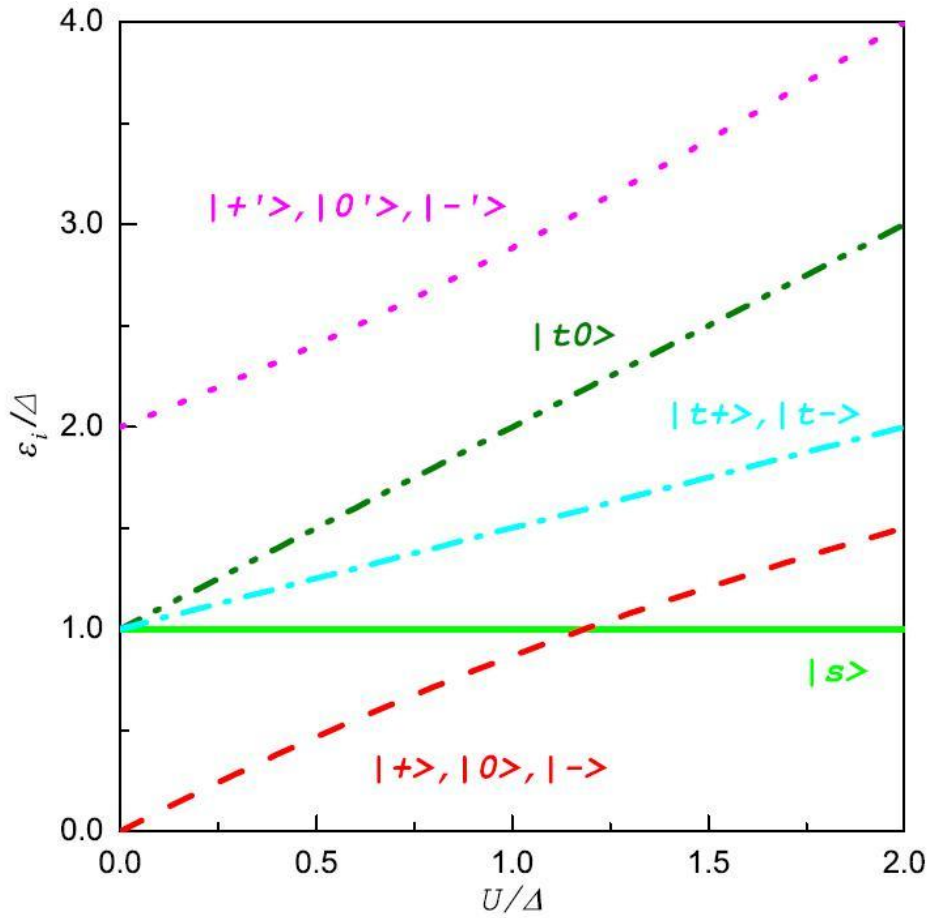


图 3.2 同一格点的能量随 U/Δ 的能级图。

我们用一个能级图来简单清楚的描述这个结果，很容易发现 ε_1 和 ε_2 是能量最低的两个能级，其余三个能级的能量始终比它们高。这两个能级竞争，在 $U/\Delta = 1.19$ 的地方能级 ε_1 和 ε_2 相交，也就是发生了相变[3]。在 $U > U_c$ 的情况下，格点上的基态是单态 $|s\rangle$ ——两个不同自旋的粒子占据不同能带形成的。当 $U < U_c$ ，基态是由 $|+\rangle$ ， $|0\rangle$ 和 $|-\rangle$ 三个简并的态。如图 3.2 所示。

对于 ε_1 和 ε_2 对应的本征态中的参数是

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\Delta/U - 1/4}\right)^2}}}}$$

和

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\Delta/U - 1/4}\right)^2}}} \quad (3.52)$$

它们满足归一的条件 $e^2 + f^2 = 1$ 。其中 e^2 和 f^2 分别描述两个粒子同时待在最低能带 1 和上能带 2 的几率。当 $0 < U < \Delta$ ， $0 < f^2 \leq 0.0659$ ，然而在 $U/\Delta \rightarrow 0$ 时， $f^2 \rightarrow 0$ 说明在相互作用 U 比较小的时候，这两个粒子占据上能级的几率几乎是 0，因此系统回归到单带的模型。举两个简单的例子， $U/\Delta = 0.1$ ， $f^2 = 0.0006$ ，而当 $U/\Delta = 0.5$ 时， $f^2 = 0.0169$ 。所以在较弱相互作用区域 $U < U_c$ ，两个粒子主要待在最低的能带。

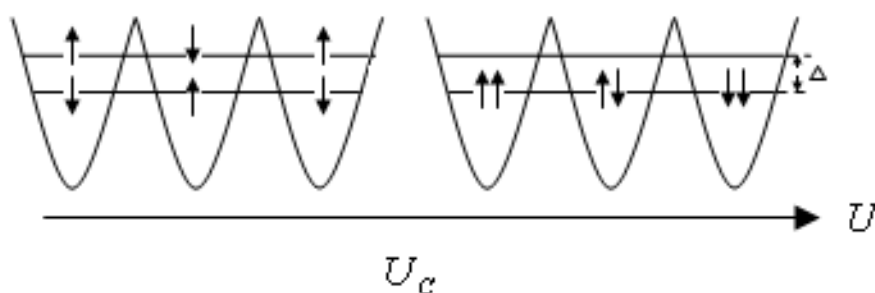


图 3.3 相变的示意图

尽管我们选取两分量的粒子等量混合 $N_\uparrow = N_\downarrow$ ，也就是 $\langle S_z^{total} \rangle = 0$ ，但是每个格点粒子数可以不是等量混合。所以当 $t_{\alpha\beta} = 0$ 以及 $U < U_c$ 的情况下，整个系统的基态

是高度简并的，而每个格点的粒子的自旋是三个简并的态中任意的一个。只要总的格点的自旋之和等于零即可。事实上当格点间的跃迁存在时，情况并不是这样的。

在 $U < U_c$ ，每个格点的两个粒子占据最低的能带，对应三个简并态，等价于自旋为 1 的三重态。现在我们考虑格点间跃迁存在的情形，即 $t_{\alpha\beta} \neq 0$ 。如果只考虑单个粒子从一个格点跃迁到最近邻的格点上，将会改变格点上的粒子数的占据情况。格点上如果放置 3 个粒子需要更多的能量，所以这样的过程会受到抑制。然而如果跃迁到一个中间态，然后再跃迁回一个粒子，这等效于把一个弱的作用以微扰考虑进来，也就是近似到二阶的微扰近似，修正后的能量比之前的能量还低。这样保证了每个格点上有两个粒子，不损耗系统的能量。但是它能够交换近邻格点上不同的原子。这样的虚的交换过程都能够用二阶微扰理论得到的有效哈密顿量描述

$$H_{eff} = \sum_{i,m} \frac{\langle \mu_{i,i+1} | H_t | m \rangle \langle m | H_t | \nu_{i,i+1} \rangle}{E_0 - E_m} | \mu_{i,i+1} \rangle \langle \nu_{i,i+1} | \quad (3.53)$$

其中 $\{ | \mu_{i,i+1} \rangle, | \nu_{i,i+1} \rangle = | g \rangle_i \otimes | g \rangle_{i+1} \}$ 是 i 格点和 $i+1$ 格点的粒子数相等 $n_i = n_{i+1} = 2$ ，它们的基态能量都是 E_0 。当 $U < U_c$ ，在孤立的格点上可能的三重简并态是 $| g \rangle_i = | + \rangle_i$ ， $| 0 \rangle_i$ 或者 $| - \rangle_i$ ，那么 $| \mu_{i,i+1} \rangle$ 是一个九重简并的态，其对应的能量是 $E_0 = 2\varepsilon_2$ 。中间的虚态是两个近邻格点所有的跃迁一个粒子所对应的态。这些态分别是一个格点占据 3 个粒子，另一个格点占据 1 个粒子，其对应的能量是 E_m 。

跃迁项的二阶微扰计算能够使我们辨认由于 Feshbach 共振引起的自旋关联的相变。利用本章第一节介绍的方法我们研究如图 3.3 在相变点左端，即 $U < U_c$ ，可得到关于自旋 $S=1$ 的各向同性的有效海森堡模型

$$H_{eff} = -\lambda \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (3.54)$$

其中 \mathbf{S}^α 是在 α ($\alpha = x, y, z$) 是方向上自旋 $S=1$ 的算符，其系数

$$\lambda = e^4 \frac{2(t_{11})^2}{U} + 2e^2 f^2 \left(\frac{(t_{12})^2}{\Delta + U} + \frac{(t_{12})^2}{3\Delta + \frac{U}{4}} \right) \quad (3.55)$$

在计算过程中，我们忽略了包含 f^4 小量的项。从这个哈密顿量我们发现系统是一个

自旋为 1 的铁磁的海森堡模型。当能隙 $\Delta \gg U$ ，也就是上能带远远高于最低能带时，我们可以发现系数

$$\lambda = 2 \frac{(t_{11})^2}{U} \quad (3.56)$$

在这个极限下，两个粒子占据最低能带的几率 e^2 接近于单位 1。所以我们的结果和单带近似下的模型的结果是一致的[3,6]。而且这个各向同性的模型有 $2S^{total} + 1$ 重简并， $S^{total} = N/2$ ($N/2 = N_{\uparrow} = N_{\downarrow}$)。基态对应 $S_z^{total} = 0$ ，没有空间自发破缺发生。这就意味着对于 SU(2) 对称的模型的基态没有发生相分离。

在相变点右端， $U > U_c$ ，单个格点的基态就是一个单态。在这种情况下，虚的跃迁不会改变单个格点的自旋分布。整个格点空间的基态是单个格点单态的乘积。我们可以通过微扰法对这个基态能量作修正

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \delta\varepsilon \quad (3.57)$$

其中二阶微扰近似的能量是：

$$\delta\varepsilon = -\frac{3}{2} \left(\frac{(t_{11})^2}{2U} + \frac{(t_{22})^2}{\frac{7U}{4}} + \frac{(t_{12})^2}{\Delta + \frac{7U}{4}} + \frac{(t_{12})^2}{2U - \Delta} \right) \quad (3.58)$$

很明显，这样的修正是负的，使得系统的基态能量降低了。

一维的费米系统和玻色系统有很大的差别。根据 Haldane 的猜想，SU(2) 对称的自旋为 1 的反铁磁的哈密顿量的基态是有能隙的。所以哈密顿量中从 SU(2) 对称约化到 U(1) 对称的小的偏置不会导致定量的不同的结果。另一方面铁磁的哈密顿量的基态是有序的，因此为了了解基态性质具有易轴还是易平面，考虑一个一般非 SU(2) 对称的模型是非常重要的。首先跃迁矩阵元 $t_{\alpha\beta}^{\sigma}$ 不仅依赖于能带指标 α, β 而且依赖于原子的种类 σ 。进一步同种粒子间的相互作用相等 $U = U_{\uparrow\uparrow} = U_{\downarrow\downarrow}$ ，但与不同的原子间的相互作用不同，令 $U' = U_{\uparrow\downarrow}$ 。这样就破坏了之前系统的 SU(2) 对称性。在强相互作用区域因为基态由单态构成，SU(2) 对称的偏置不会导致定性的基态性质的变化。而在弱相互作用区间，SU(2) 对称被破缺，有效哈密顿量能够被表示成对应于易轴或易平面的基态形式。对于一般的情况 $U \neq U'$ ，有效哈密顿量不能够表示成简单的自

旋交换模型[3]。然而如果 $|U'-U| \ll U, U'$ ，我们能够把不同的同格点的相互作用归结到零阶的哈密顿量。可以表示成

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} [\lambda' \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \delta\lambda'_z S_{iz} S_{jz}] + B \sum_i S_{iz} + D \sum_i (S_{iz})^2 \quad (3.59)$$

其中系数

$$\begin{aligned} \lambda' &= 2e^4 \frac{t_{11}^\downarrow t_{11}^\uparrow}{U} + 2e^2 f^2 t_{12}^\uparrow t_{12}^\downarrow \left(\frac{1}{3\Delta + \frac{U}{4}} + \frac{1}{\Delta + U} \right) \\ \delta\lambda'_z &= e^4 \frac{(t_{11}^\uparrow - t_{11}^\downarrow)^2}{U} + e^2 f^2 (t_{12}^\uparrow - t_{12}^\downarrow)^2 \left(\frac{1}{3\Delta + \frac{U}{4}} + \frac{1}{\Delta + U} \right) \\ B &= -e^{42} \left(3 \frac{(t_{11}^\uparrow)^2 - (t_{11}^\downarrow)^2}{U} + \frac{(t_{12}^\uparrow)^2 - (t_{12}^\downarrow)^2}{\Delta} \right) - e^2 f^2 \left(\frac{(t_{11}^\uparrow)^2 - (t_{11}^\downarrow)^2}{2\Delta - \frac{U}{4}} + \frac{(t_{22}^\uparrow)^2 - (t_{22}^\downarrow)^2}{2\Delta} \right) \\ &\quad - 3e^2 f^2 \left[(t_{12}^\uparrow)^2 - (t_{12}^\downarrow)^2 \right] \left(\frac{1}{3\Delta + \frac{U}{4}} + \frac{1}{\Delta + U} \right) \\ D &= \frac{7}{8}(U - U') - \sqrt{\left(\Delta - \frac{U}{8} \right)^2 + \left(\frac{U}{2} \right)^2} + \sqrt{\left(\Delta - \frac{U'}{8} \right)^2 + \left(\frac{U'}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

在极限情况 $\Delta \gg U$ ，很容易证明上面的哈密顿量能够和单带的对应 $\lambda' = 2t_{11}^\downarrow t_{11}^\uparrow / U$ ， $\delta\lambda'_z = (t_{11}^\uparrow - t_{11}^\downarrow)^2 / U$ ， $B = -3 \left[(t_{11}^\uparrow)^2 - (t_{11}^\downarrow)^2 \right] / U$ 和 $D \approx U - U'$ 。很明显在 $t_{\alpha\beta}^\uparrow \neq t_{\alpha\beta}^\downarrow$ 有一个很小的正的各向异性的参数 $\delta\lambda'_z$ ，这暗示着这个有效的 XXZ 模型描述了一个易轴的铁磁模型。在 $\delta\lambda'_z \gg D$ 条件，自旋系统的基态是一个具有自旋筹的相。它对应于两分量的相分离的情况。进一步说明依赖不同自旋的粒子而对应不同的跃迁能量会导致相分离。当 $t_{\alpha\beta}^\uparrow = t_{\alpha\beta}^\downarrow$ ， $\delta\lambda'_z = 0$ 和 $B = 0$ ，这里考虑了零阶哈密顿量 D 外，其他与前边的结论一致[8]。在各向同性的 SU(2) 对称的条件下 $D = 0$ 。这里引入的这一项正的 D 比较大时，易平面的基态可以得到。易平面的铁磁模型意味着超对流。简单的说正的 D 约化成每个格点的自旋在 S_z 方向上的分量。当 $D > 0$ 足够大，所有的自旋本质上被束缚在 $\langle S_{iz} \rangle = 0$ 的态上，它说明足够大的同种粒子间的相互作用

$U \gg U'$ 引起两个不同种类的原子占据每个格点。另一方面对于足够小的 $D < 0 (U \ll U')$, 基态将是具有 $\langle S_{iz} \rangle = \pm 1$ 特点的态, 并且 D 会导致不同分量的相分离。

第三节 小结

本章简单介绍了利用简并微扰法计算单带近似下两分量 Hubbard model 和 Bose-Hubbard model 在绝缘区的有效哈密顿量, 主要研究了两带近似下在光晶格中两分量玻色原子等量混合系统的哈密顿量, 且每个格点占据数为 2 的基态特点。通过研究绝缘相单个格点的能谱, 发现存在相变, 即由于基态竞争系统存在三重态到单态的相变。当相互作用比较弱时 ($U < U_c$), 两个粒子都处在最低能带且格点间隧穿非常小, 系统可表示成自旋为 1 的铁磁自旋交换模型。在相互作用远小于能带带隙的时候, 这个自旋交换模型和单带情况下得到的完全相同。当相互作用变得足够大时, 即 $U > U_c$, 将有粒子占据高的能带。由于哈密顿量中轨道耦合相 $S^+ S^-$, 占据两轨道的两原子在格点中将形成自旋为 0 的单态。最后我们还考虑了一般非 SU(2) 的情况, 得到了一个 XXZ 铁磁自旋模型的有效哈密顿量, 进一步发现了绝缘区域的相分离和超对流特性[9]。

参考文献

- [1] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. (1998) **81** 3108.
- [2] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, Nature, (London) (2002) **415** 39.
- [3] A. B. Kuklov and B. V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. (2003) **90** 100401.
- [4] A. Kuklov, N. Prokof'ev, and B. Svistunov, Phys. Rev. Lett. (2004) **92** 050402.
- [5] L.-M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. (2003) **91** 090402.
- [6] E. Altman, W. Hofstetter, E. Demler, and M. D. Lukin, New J. Phys. (2003) **5** 113.
- [7] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. (2005) **94** 080403.
- [8] A. F. Ho, Phys. Rev. A (2006) **73** 061601(R).
- [9] L. Guo, Y. Zhang, and S. Chen, Phys. Rev. A (2007) **75** 013622.
- [10] R. B. Diener and T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. (2006) **96** 010402.
- [11] S. Trotzky, P. Cheinet, S. Fölling, M. Feld, U. Schnorrberger, A. M. Rey, A. Polkovnikov, E. A. Demler, M. D. Lukin, I. Bloch, ScienceExpress, Science (2008) **319** 295.
- [12] 曾谨言, 《量子力学》, (卷I)464, 科学出版社 (1990)。
- [13] 张永德、吴盛俊、侯广、黄民信, 《量子信息论》, 华中师范大学出版社(2002)。
- [14] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999), Ch13.4.3
- [15] G. Schmid, S. Todo, M. Troyer, and A. Dorneich., Phys. Rev. Lett. (2002) **88** 167208;
- [16] F. Hébert, J. Boronat, and J. Casulleras, Phys. Rev. B (2002) **65** 014513.

第四章 光晶格中冷原子自旋序的腔 QED 探测

光晶格中冷原子气体的研究为人们探测凝聚物质中可控原子系统的基本的量子多体问题提供了方法[1]，例如强关联相和量子信息的过程。研究玻色爱因斯坦凝聚体特征的标准方法是观察从阱中释放出的原子间物质波的干涉[2,3,4,5,6]。

量子测量理论指出，当对某一微观物体的可观测物理量进行精密测量时，将不可避免地对其共轭量产生一个扰动(测量噪声)，这一扰动通常又反作用于原可观测物理量，从而限制了测量精确度。而且这种方法会造成破坏性测量，测量过程最终会导致被测系统状态的改变。

70 年代，Braginsky 等人首先提出了量子非破坏性(QND)测量原理，克服了“测量噪声”，达到了经典测量无法实现的超高精度，同时也满足了量子测不准原理。近年来，人们已经实现了几种不同类型的量子非破坏性测量。1996 年，Walls 等人利用两腔镜组成的非简并光学参量振荡腔(NOPO)，提出一种强度差量子非破坏性测量的理论方案，在阈值以上可由探针光的信息来推知待测物理量。在上述基础上，一种通过非简并光学参量放大腔(NOPA)实现真正意义上的强度差起伏量子非破坏性测量的实验方案[7]。

本章中，我们将利用将被测系统和腔中光的耦合，通过腔电动力学的一些性质特点来观测光晶格中原子的量子态。目前人们理论上提出了非破坏性测量单分量的相变方法，将在前两节作介绍，我们的目的是把这种方法推广到两分量的相变的测量中。

第一节 利用腔探测单分量原子在光晶格中的量子态

用来刻画原子量子统计的所有光学方法会涉及到各向同性的玻色爱因斯坦凝聚体[8-12]。玻色爱因斯坦凝聚体所导致一些光谱特性的修正是由于集体激发[9,10]，反冲平移[13]或者局域场效应[11]。腔模的色散平移依赖于原子态，能反映原子量子统计性质，换言之，原子数的变化影响了腔模的色散平移。如果在一些晶格区域原子的涨落使得腔模的频谱平移涨落，在腔的透射光谱中，能直接反映原子数分布函数的不同频率出现共振。这样探测能够使我们计算原子态的统计量，例如：光谱特点——诸如中心频率和宽度等，反映原子系统物理量的期待值和方差[14]。

不同相位的简并气体具有相同的平均场密度，但是具有不同的量子振幅，这导致不同的透射谱的叠加，例如超流态观测到的透射谱就是由许多峰值构成，这一现象反映了物质场的离散性。类似原子和光相互作用形成的离散光谱，反映电磁场的光子结构。这些可以用里德堡原子和固态的超导环的腔量子电动力学来解释[15]。超流态向绝缘态转变的量子相变使得多个峰值向一个共振峰值趋势变化，因为原子数涨落受到了抑制[16-17]。

探测装置如图 4.1 所示，

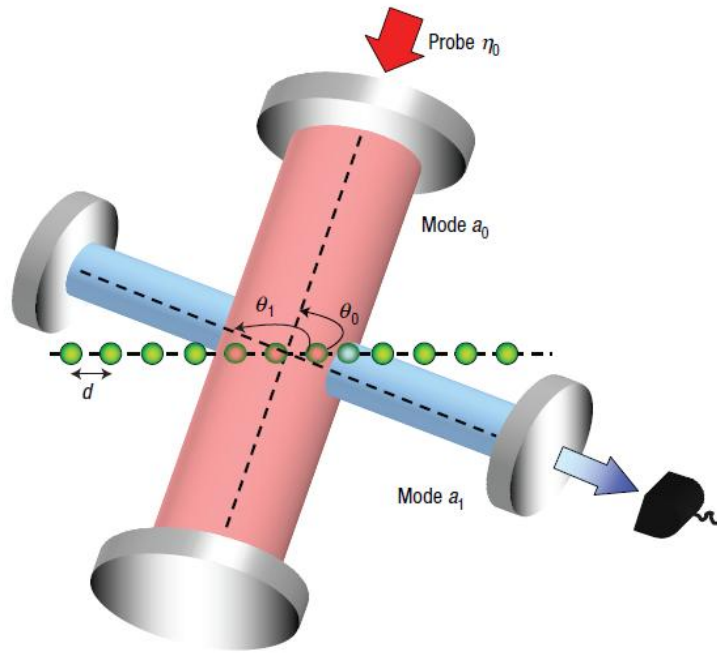


图 4.1 原子被束缚在周期的光晶格中，并被两个腔模分别以和晶格轴向 θ_0 和 θ_1 的角度照亮[14]。

研究对象是在一个很深的 M 个格点的光晶格中 N 个两能级的原子，晶格势是由远离共振的激光形成的驻波[1]。在 $K \leq M$ 的晶格区域原子与两个腔中的光场相互作用，其中被照亮的格点数 K 可以通过调节腔的位置来改变。两个腔和一维的晶格构成了势阱原子线。这一探测系统建立在原子间的相互作用基础上，与原子内部能级结构无关，进而研究对象可换作分子。

4.1.1 系统的哈密顿量

类似于玻色哈伯德模型的哈密顿量的推导，图 4.1 的装置中多体系统的哈密顿量是

$$H = \sum_{l=0,1} \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l + \int \Psi^\dagger(\mathbf{r}) H_{al} \Psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (4.1)$$

其中： $H_{al} = \mathbf{p}^2 / 2m_a + V_{cl}(\mathbf{r}) + \hbar g^2 \sum_{l,m=0,1} (u_l^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r}) / \Delta_{ml}) a_l^\dagger a_m$ 是单个原子与两模光作用的有效哈密顿量。 $a_{0,1}$ 是两个腔场中光子的湮灭算符，频率为 $\omega_{0,1}$ ，波矢为 $\mathbf{k}_{0,1}$ 。光场模函数是 $u_{0,1}(\mathbf{r})$ ，原子系统的场算符是 $\Psi(\mathbf{r})$ 。在这个有效的单原子的哈密顿量 H_{al} ， \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 分别是束缚在经典的势阱 $V_{cl}(\mathbf{r})$ 质量为 m_a 的原子动量和位置算符， g 是原子和光的耦合系数。我们考虑的散射是远离共振的，即光场频率和原子跃迁频率的失谐 $\Delta_{la} = \omega_l - \omega_a$ 远大于瞬时激发和 Rabi 频率，因此上能级在哈密顿量 H_{al} 中可绝热消失。

对于束缚在一维周期为 d 晶格中的原子，位置记为 $x_j = jd$ ($j=1,2,\dots,M$)，光场模函数：当腔中光场是行波时

$$u_{0,1}(\mathbf{r}_j) = \exp(ijk_{0,1x}d + i\phi),$$

而对于驻波

$$u_{0,1}(\mathbf{r}_j) = \cos(jk_{0,1x}d + \phi)。$$

其中的波矢 $k_{0,1x} = |\mathbf{k}_{0,1}| \cos \theta_{0,1}$ ， $\theta_{0,1}$ 是腔中光场中轴线与晶格轴的夹角， ϕ 是空间相位平移。

假设光场 $a_{0,1}$ 相比束缚原子的光场非常弱，可用局域的 Wannier 函数来展开原子的场算符 $\Psi(\mathbf{r})$ ，决定 Wannier 函数的势是 $V_{cl}(\mathbf{r})$ ，并且只考虑最低的振动能带：场算符 $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M b_i w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ ，其中 b_i 是原子在格点 i 及位置 \mathbf{r}_i 上的湮灭算符。把这个展开式代入哈密顿量(4.1)中，就可以得到二次量子化的哈密顿量形式。由于我们重点考虑的是在几个特定的量子态下光和原子作用后光的散射情况，所以格点间的遂穿项我们忽略掉，哈密顿量变为

$$H = \sum_{l=0,1} \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l + \hbar g^2 \sum_{l,m=0,1} \frac{a_l^\dagger a_m}{\Delta_{ml}} \left(\sum_{i=1}^K J_{i,i}^{lm} \hat{n}_i \right) \quad (4.2)$$

其中粒子数算符 $\hat{n}_i = b_i^\dagger b_i$ 。很深的晶格势使我们可忽略掉原子的扩散，则

$J_{i,i}^{lm} = \int d\mathbf{r} w^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) u_l^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r})$ 简化为 $J_{i,i}^{lm} = u_l^*(\mathbf{r}_i) u_m(\mathbf{r}_i)$ ，这点具有经典散射的特点。在

得到系统的哈密顿量的形式后，一些其它的物理量就可以进行研究。

4.1.2 半经典近似下的噪声特性

海森堡方程

$$i\hbar\dot{A} = [A, H] \quad (4.3)$$

是量子研究动力学行为的一个重要的方程。对于海森堡方程选择旋转参考系 $B = \omega_0 a_1^+ a_1$ 作旋转变换，

$$\dot{a}_1 = i \left[\Delta_{01} - \frac{g_0^2}{\Delta_{1a}} \sum_{i=1}^K |u_1(\mathbf{r}_i)|^2 \hat{n}_i \right] a_1 - i \frac{g_0^2 a_0}{\Delta_{0a}} \sum_{i=1}^K u_1^*(\mathbf{r}_i) u_0(\mathbf{r}_i) \hat{n}_i - \kappa a_1 \quad (4.4)$$

最后一项是考虑到腔的损耗引入的， κ 是腔的弛豫率。把两模光场中的一个作为经典场，换言之把 a_0 看作一个常数。在这种意义下，选择它作为系统的探测光。其中失谐量 $\Delta_{01} = \omega_0 - \omega_1$ 。腔模的色散平移对原子数的分布较敏感，假设它远远小于弛豫率 κ 和失谐量 Δ_{01} ，则方程(4.4)的稳态解是

$$a_1 = CD, \quad n_{ph} = a_1^+ a_1 = |C|^2 \hat{D}^+ \hat{D}, \quad \hat{D} = \sum_{i=1}^K A_i \hat{n}_i \quad (4.5)$$

其中常数项 $C \equiv ig_0 a_0 / [\Delta_{0a} (i\Delta_{01} - \kappa)]$ 和系数 $A_i(\theta_0, \theta_1) \equiv u_1^*(\mathbf{r}_i) u_0(\mathbf{r}_i)$ 。这个方程是接下来研究的重点。

对原子量子态,假设: (I)在格点 i 平均原子数是 $\langle \hat{n}_i \rangle = n = N/M$ ($\langle \hat{N}_K \rangle = N_K \equiv nK$), (II) $\langle \hat{n}_i \hat{n}_j \rangle$ 在任意 $i \neq j$ 的情况都是相同的。这对于很深的晶格势是有效近似, 记作 $\langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle (a \neq b)$ 。

根据以上假设 $\langle a_1 \rangle \sim \langle \hat{D} \rangle = \sum_{i=1}^K A_i \langle \hat{n}_i \rangle = nA$ 表明场振幅仅依赖原子的平均密度 n , 并且依赖具有衍射极大和极小性质的衍射角度分布函数 $A(\theta_0, \theta_1) \equiv \sum_{i=1}^K A_i(\theta_0, \theta_1)$ 。根据方程(4.5)光子数不是简单的振幅平方, 因

$$\langle \hat{D}^+ \hat{D} \rangle = \langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle |A|^2 + (\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle) \sum_{i=1}^K |A_i|^2 \quad (4.6)$$

$$R(\theta_0, \theta_1) \equiv \langle \hat{D}^+ \hat{D} \rangle - \left| \langle \hat{D} \rangle \right|^2 = \langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle |A|^2 + \left(\langle \delta \hat{n}^2 \rangle - \langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle \right) \sum_{i=1}^K |A_i|^2 \quad (4.7)$$

其中 $\delta \hat{n}_i \equiv \hat{n}_i - n$ ，则 $\langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle = \langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle - n^2$ ， $\langle \delta \hat{n}^2 \rangle = (\Delta \hat{n}_i)^2 = \langle \hat{n}_i^2 \rangle - n^2$ 。通过某些特殊原子态密度-密度关联 $\langle \hat{n}_i \hat{n}_j \rangle$ 的差异，光强对原子量子统计是很敏感的。除了经典角度关系(classical angle dependence) $|A|^2$ ，方程(4.6)第二项反映了粒子数的涨落，以及完全不同的角度关系。如在晶格中，散射不仅对周期分布的密度敏感，而且周期分布的涨落也很敏感，这会导致局域关联性态与非局域关联态之间观测量的差异。方均差的分析可给出类似于噪声 R 的结果

当两个腔光场都是行波时，方程(4.6)是均匀BECs结构因子[11]。另外包括驻波在内的更一般形式可提供除了结构因子外新的可测量。散射光强起伏依赖于原子数算符的四阶矩和四格点上密度-密度关联，例如：光子数的差分是

$$(\Delta n_{\text{ph}}) = \langle n_{\text{ph}}^2 \rangle - \langle n_{\text{ph}} \rangle^2 = |C|^4 \left(\langle |\hat{D}|^4 \rangle - \langle |\hat{D}|^2 \rangle^2 \right) + |C|^2 \langle |\hat{D}|^2 \rangle \quad (4.8)$$

在表格4.1总结了三种原子态统计的物理量。

表4.1 三种原子态下的物理量[18]

	MI	SF	Coherent
$ \Psi\rangle$	$\prod_{i=1}^M n_i\rangle_i$	$\frac{1}{\sqrt{M^N N!}} \left(\sum_{i=1}^M b_i^+ \right)^N 0\rangle$	$e^{-(N/2)} \prod_{i=1}^M e^{\sqrt{(N/M)b_i^+} b_i^+} 0\rangle_i$
$\langle \hat{n}_i^2 \rangle$	n^2	$n^2(1-1/N) + n$	$n^2 + n$
$(\Delta n_i)^2$	0	$n(1-1/M)$	n
$\langle \hat{N}_K^2 \rangle$	N_K^2	$N_K^2(1-1/N) + N_K$	$N_K^2 + N_K$
$(\Delta N_K)^2$	0	$N_K(1-K/M)$	N_K
$\langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle$	n^2	$n^2(1-1/N)$	n^2
$\langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle$	0	$-N/M^2$	0

绝缘态MI是对应点状原子的最经典态。每个格点原子数不涨落而且也没有原子对关联，因此从(4.6)可发现经典衍射零点($A(\theta_0, \theta_1) = 0$)是光强的零点。这不同于超流态的情况，超流态中每个原子在整个晶格是非局域的，这导致在一特定格点上和 $K < M$ 格点区间上粒子数涨落，即在不同格点的原子是反关联的(anti-correlated)。在经典衍射零点处仍然能够发现光子数是正比于原子数 N 。相干态近似于超流态，但没有对关联。在 $N, M \rightarrow \infty$ 的极限下，在 $K \ll M$ 的小区间内它能够很好的描述部分被照亮的超流态的散射。然而在同样的极限下，相干态不能描述从 $K \sim M$ 的大区间布洛赫衍射极大的角度的散射[18]。

当探测光垂直于晶格轴时，如图 4.1 $\theta_0 = 0$ ，这个模型就能够给出很重要的发现。同时一个腔的散射光沿着晶格轴的方向 $\theta_1 = \pi/2$ ，原子将被束缚在晶格势波腹 $d = \lambda/2$ [19-21]。算符 $\hat{D} = \sum_{k=1}^K (-1)^{k+1} \hat{n}_k$ ，不论原子处于何种态算符对平均场振幅贡献为零。这反映了在衍射极小的角度，从相距 $\lambda/2$ 的原子被散射的光具有相反的相位。然而腔中的光子数是正比于 $\langle \hat{D}^\dagger \hat{D} \rangle = (\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle) K$ ，这是由特定原子态决定的。因此在绝缘态，原子不会散射光子，而在超流态散射的光子数与原子数成正比。

$$\langle a_1 \rangle_{\text{MI}} = \langle a_1 \rangle_{\text{SF}} = 0$$

而

$$\langle a_1^\dagger a_1 \rangle_{\text{MI}} = 0, \quad \text{而} \quad \langle a_1^\dagger a_1 \rangle_{\text{SF}} = |C|^2 N_K$$

光子数的涨落 $(\Delta n_{\text{ph}})^2$ 对于不同的原子态也是不同的，在绝缘态

$$(\Delta |D|^2)_{\text{MI}}^2 = \langle |\hat{D}|^4 \rangle_{\text{MI}} - \langle |\hat{D}|^2 \rangle_{\text{MI}}^2 = 0$$

而超流有很强的噪声

$$(\Delta |D|^2)_{\text{SF}}^2 \approx 2N_K^2。$$

在腔中光和物质耦合能够形成self-organized phase[20-21]，如原子束缚在每两个格点(every second site)中第二格点的位置，即原子布局晶格周期 $d = \lambda$ ，算符 $\hat{D} = \sum_{k=1}^K \hat{n}_k = \hat{N}_K$ 。这样即使在绝缘态，光子数是 $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle_{\text{Self-org}} = |C|^2 N_K^2$ ，正比于原子

数的平方，具有超辐射的特点。

下面我们讨论角度分布的情况。为了讨论对于两列行波的散射强度随角度的分布情况，首先简化方程(4.7)为

$$R = \langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle \frac{\sin^2(K\alpha_-/2)}{\sin^2(\alpha_-/2)} + (\langle \delta \hat{n}^2 \rangle - \langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle) K \quad (4.9)$$

其中，第一项 $|A|^2$ 再现了经典衍射，其中 $\alpha_- = k_{0x}d \sin \theta_0 - k_{1x}d \sin \theta_1$ ，第二项是简单各向同性的情况。因此绝缘态的噪声是零， $R_{\text{MI}} = 0$ ，对于各向同性的相干态噪声是非零的， $R_{\text{Coh}} = N_K$ ，而对于超流态噪声是与角度有关的分布函数。在超流态即使是很小的密度对关联 $\langle \delta \hat{n}_a \delta \hat{n}_b \rangle = -N/M^2$ ，在靠近衍射极大处 $\alpha_- = 2\pi l$ ， $l = 0, 1, \dots$ ，会产生很大的贡献。其中几何因子是 K^2 ，这对于相干态近似是无效的。

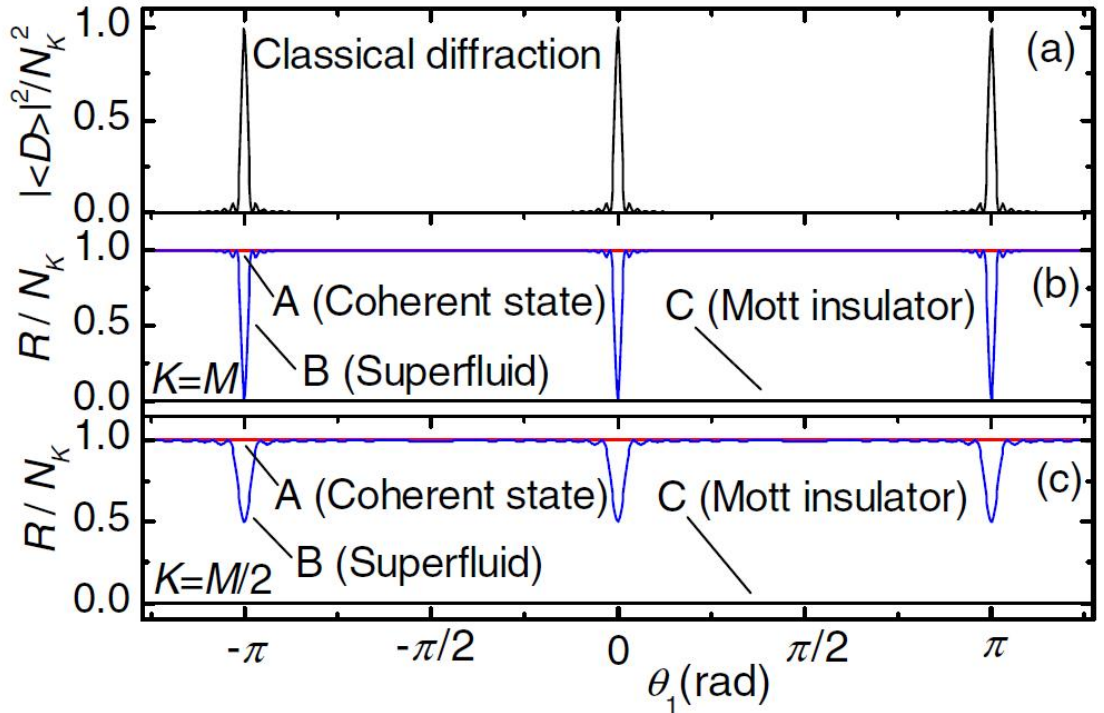


图 4.2 对于两个腔中光场为行波时，光场强度随角度变化分布图 ($N = M = 30, \theta_0 = 0$)。 (a) 经典衍射的强度分布； (b) 在 $K = M$ 噪声随角度 θ_1 变化的分布图，其中 A 所标记的线描述相干态、而曲线 B 是超流态的情况，C 线是绝缘相时噪声 ($R = 0$)。 (c) 情况与 (b) 相同，但是仅部分被照亮 $K = M/2$ [18]。

图 4.2 中描述了散射光角度分布的情况。(a)中经典衍射 $|\langle D \rangle|^2$ 仅有零阶最大,出现在 $\theta_1 = 0, \pi$ ($d = \lambda_{0,1}/2$, $\theta_0 = 0$)。相干态和超流态的噪声如图 4.2 中的((b、c)。对于绝缘态 $R = 0$, 而超流态在衍射极大处受到抑制。图中分别给出了整个晶格 $K = M$ 都被照亮和部分 $K = M/2$ 照亮两种情况。在衍射极大处 \hat{D} 约等于 \hat{N}_K , 因此场的振幅由 $N_K = nK$ 决定, 强度依赖于 $\langle \hat{D}^+ \hat{D} \rangle = \langle \hat{N}_K^2 \rangle$, 然而噪声 $R = (\Delta N_K)^2$ 描述了 K 个格点上原子数的差分。在图 4.2 的(b)和(c)它反映了因为粒子数 $\langle \hat{N}_K \rangle$ 在 $K < M$ 区涨落, 整体和部分的噪声被抑制。在衍射极小处, 场为零, 但强度正比于 $\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle$ 。空间非相干光的散射作用下, 光强是各向同性的, 且正比于 $\langle \hat{n}^2 \rangle$ 。

在光学实验中, 通过改变几何结构, 如 K 个格点的整体统计和局部单个格点的统计以及对关联, 即使没有单个格点的过程都能获得。因此光的散射为区分原子态提供的一种方法。如方程(4.8)和图 4.2 所描述, 在衍射极小处且非相干光的情况, 绝缘态和超流态是不同的。在衍射极大处它们是不可区分的, 仅超流态和相干态是可以区分的。而绝缘态和相干态在 θ_1 取任意角都可区分出来。

对于不同的原子态, 噪声或光子统计对应于 N_K 的不同阶数。但是在 N_K 很大时, 在衍射极大处能够减去一个最大值, 参考[22-23]中提到这会导致利用强度测量不能分辨态的结果。与均匀的 BECs 比较, 在周期晶格中, 除了衍射极大处类似经典部分的散射不作测量外, 噪声能直接反映物理量的涨落。

不同光散射的经典模拟是由不同的密度涨落构成的, 量子的方法给出更深的理解。超流态是 N 个原子在 M 格点所有可能的多格点的 Fock 态叠加的态, 不同的 Fock 态和不同相位、振幅散射光纠缠在一起。由于 Fock 态的正交性, 与经典情况或绝缘态比较, 不同原子分布纠缠的光场彼此不干涉。它解释了超流态在衍射极小处观测到振幅为零, 但光子数不为零的现象。

另外, 如果两个腔中一个是驻波, 光场强度的角度分布变得更加丰富。除了函数 $\alpha_{\pm} = k_{0,x}d \sin \theta_0 \pm k_{1,x}d \sin \theta_1$ 决定的新经典极大, 方程(4.6)和(4.7)的二阶噪声也不是各向同性的。它包括几何系数平方的求和, 等价于有效的两倍晶格周期或者两倍的光频率, 从而引起光强角度分布的新特点的产生, 但经典衍射是零。图 4.3 给出了两

个腔中光场都是驻波的情况。由 $2\alpha_{0,1} = 2k_{0,1x}d \sin \theta_{0,1}$ 和 $2\alpha_{\pm}$ 可知有效周期变成两倍，尽管经典意义上仅有零阶衍射极大可能存在，但新的特性仍然在有效的一阶衍射极大处的角度出现。

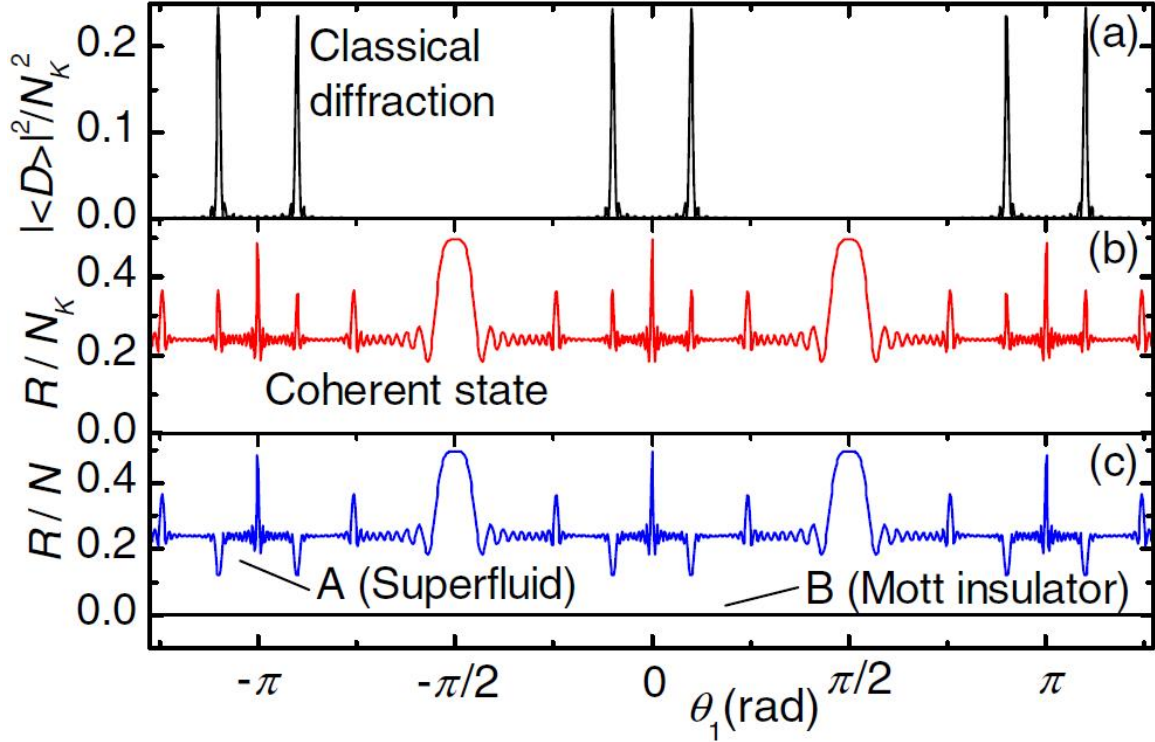


图 4.3 两腔模场都是驻波的情况下光强随角度分布的情况 ($N = M = K = 30$, $\theta_0 = 0.1\pi$)。(a)经典衍射的强度；(b)相干态的噪声量以及(c)曲线 A 是对应超流态的噪声分布，而线 B 描述绝缘态的噪声，其为常数 0 [18].

光子数差分 $(\Delta n_{\text{ph}})^2$ 的角度分布依赖于 $(\Delta |D|^2)^2$ ，证明了由于两倍周期所引起的各向异性，即使对于两个腔都是行波情况也是如此。对于相干态，衍射极大处光的噪声很大。

总的来说，原子的量子态能够通过散射光这种非破坏测量的办法来探测。与均匀的 BECs 比较，从晶格中的散射展示了有利的特点：在布拉格衍射极小处经典散射受到的抑制，可获得局域和非局域的关联以及比经典的衍射更加丰富的噪声随角度分布函数。其它依赖原子数算符非线性的光学现象和物理量将反映量子的原子统计，如媒介的色散将是研究量子态特点的光谱方法 [14].

4.1.3 全量子理论下的透射光谱

在这里我们首先要研究全量子理论下透射光子的分布情况，需要计算的是两个光场的算符 a_l 的含时方程。根据海森堡方程(4.3)我们可得到

$$\dot{a}_l = -i(\omega_l + \delta_l \hat{D}_{ll})a_l - i\delta_m \hat{D}_{lm} a_m \quad |_{m \neq l}, \quad (4.10)$$

其中 $\hat{D}_{lm} = \sum_{i=1}^K u_l^*(\mathbf{r}_i) u_m(\mathbf{r}_i) \hat{n}_i$ ， $\delta_l = g^2 / \Delta_{la}$ (g 腔中光场与原子的耦合常数)。考虑腔的

损耗，这里加上腔的弛豫项，另外沿腔 1 加一束探测光，方程可变成

$$\dot{a}_l = -i(\omega_l + \delta_l \hat{D}_{ll})a_l - i\delta_m \hat{D}_{lm} a_m - \kappa a_l + \eta_l(t) \quad (4.11)$$

κ 是腔的弛豫率，而 $\eta_l(t) = \eta_l e^{-i\omega_p t}$ 描述外加频率为 ω_p 的探测光。

当我们仅仅考虑只有一个腔 a_0 ($a_l \equiv 0$) 的时候，根据方程(4.11)，计算得到不随时间变化的光子数：

$$a_0^+ a_0 = \frac{\eta_0^2}{(\Delta_p - \delta_0 \hat{D}_{00})^2 + \kappa^2} \quad (4.12)$$

其中 $\Delta_p = \omega_{0p} - \omega_0$ 是探测光和腔的失谐量。

对于 1D 光晶格且两个腔中光场都是行波时， θ_0 取任意角都满足条件

$$u_0^*(\mathbf{r}_i) u_0(\mathbf{r}_i) = 1$$

而对于驻波，只有垂直($\theta_0 = \pi/2$)或平行于晶格轴($\theta_0 = 0$)时才能满足这一条件。在绝缘相，根据附录 B 可得 $\langle \hat{D}_{00} \rangle = N_K$ ，(4.6)的平均值是失谐量 Δ_p 的函数形式

$$\langle a_0^+ a_0 \rangle = \frac{\eta_0^2}{(\Delta_p - \delta_0 N_K)^2 + \kappa^2} \quad (4.13)$$

它是单个洛伦兹线型，宽度为 κ ，频率平移了 $\delta_0 \langle \hat{D}_{00} \rangle_{MI}$ ，我们可分别得到透射谱(如图 4.4 所示)。在绝缘相，由于色散光谱发生了一个简单的经典洛伦兹线型平移。

超流相是所有原子分布 $|q_1, \dots, q_K\rangle$ 对应的不同色散平移的洛伦兹线型的求和。因此，如果每个线型都可分辨，我们就能通过扫描失谐量 Δ_p 测量到梳状结构。在图 4.4(a、c)洛伦兹线型的不同色散平移和 K 个格点上可能的不同的原子数对应，这是

由于超流相中原子数涨落造成的。线型之间间隔为 δ_0 。原子数的涨落导致腔模平移的涨落，因而光谱中出现多个共振峰。

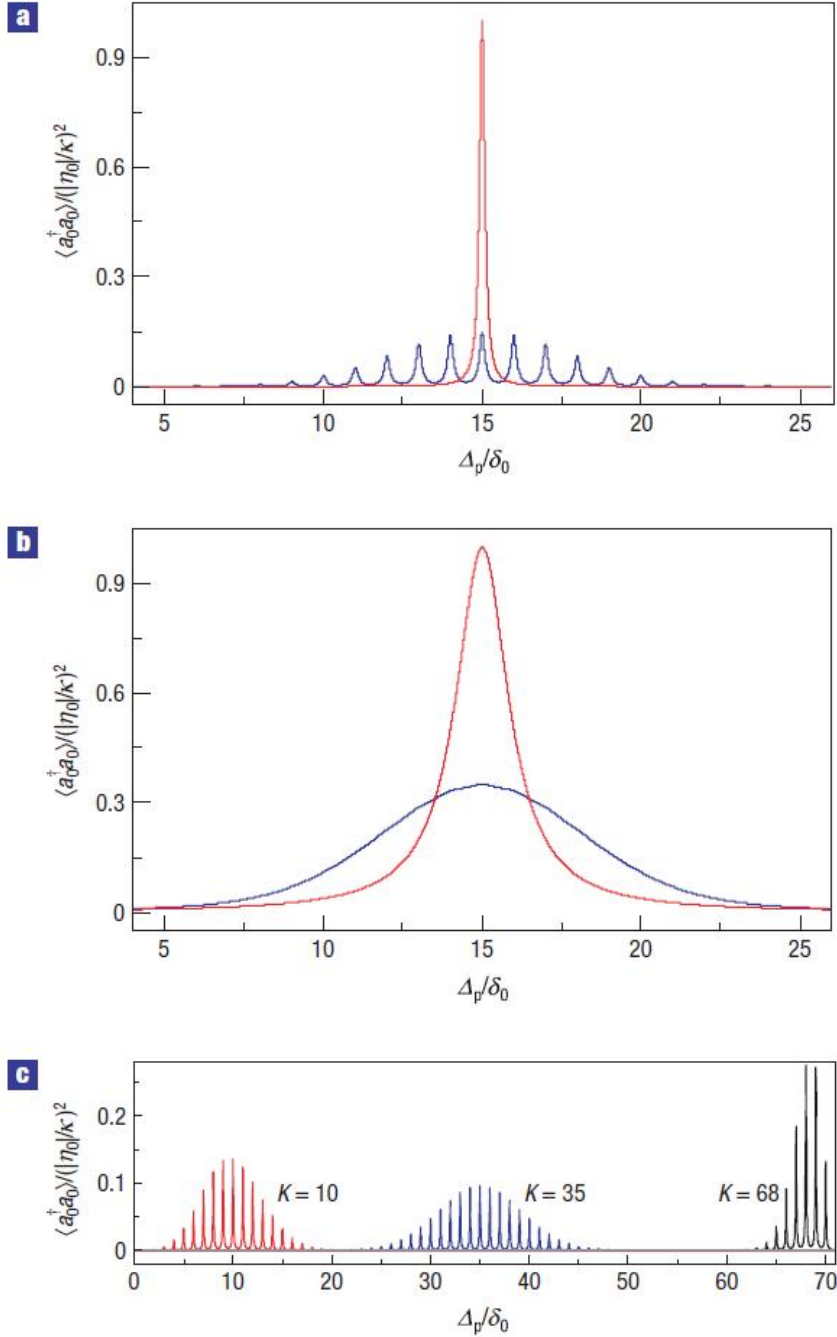


图 4.4 单模光场的光子数分布。a, 单个的洛伦兹线型折射出绝缘相原子数不发生涨落，而多个窄的共振峰的超流相恰恰说明了原子数的涨落 ($\kappa = 0.1\delta_0$, $N = M = 30$, $K = 15$)。b, 描述 $\kappa = \delta_0$ 但其他条件与 a 相似的情况。这一调节对于超流相展宽变得光滑。c, 描述了在 $N = M = 70$, 且分别 $K = 10, 35, 68$ 对应的光子数分布。从图中可以看出不同的 K 对应不同的原子数分布 ($\kappa = 0.05\delta_0$) [14]。

从图 4.4(a、b)可看出，当 κ 取值较大时，光谱变得连续，且光谱在超流态较绝缘态宽。弱光场的散射不会影响原子数的分布，超流态是 K 个格点上不同原子数叠加态，一次测量是将这个态投影到某个固定的 N_K 对应的子空间中。

如果将两个腔都考虑进来，且频率相同 $\omega_0 = \omega_1$ ，探测光只加载至腔 1 中 a_0 ，并调节光场使得 $\hat{D}_{00} = \hat{D}_{11} = \hat{N}_K$ 。从方程(4.11)可以得到从另一个腔透射出来光子数算符

$$a_1^\dagger a_1 = \frac{\delta_1^2 \hat{D}_{10}^+ \hat{D}_{10}}{\left(\kappa^2 - (\Delta'_p)^2 + \delta_1^2 \hat{D}_{10}^+ \hat{D}_{10} \right) + 4\kappa (\Delta'_p)^2} \quad (4.14)$$

其中 $\hat{\Delta}'_p = \Delta_p - \delta_1 \hat{D}_{10}$ 。在绝缘相，(4.14)式给出两个等高的曲线，如图4.5 (a)、(b)。它们反映了原子与两模光作用后简正模式的分裂，是由一个腔模在另一个腔模的衍射造成的。因此结果能够被看作从一个量子衍射栅的散射，即布洛赫散射。在衍射极大处($u_1^*(\mathbf{r}_i)u_0(\mathbf{r}_i)=1$)， $\hat{D}_{10} = \hat{N}_K$ ，分裂也最大。在衍射极小处， $\hat{D}_{10} = \sum_{i=1}^K (-1)^{i+1} \hat{n}_i$ 。此时光子数几乎为零。

据附录B公式(B4)，超流态散射的光子数 $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle_{SF}$ 是所有可能简正模劈裂的求和。如图4.5(a、b)在衍射极大处，右边的satllite被分成对应所有 N_K 取值的多个峰。剩下两个图(c、d)反映了衍射极小处，劈裂是由原子数在奇数格点和偶数格点原子数之差决定的，即 $\sum_{i=1}^K (-1)^{i+1} q_i$ 。在最衍射极小处，绝缘态奇数格点和偶数格点原子数之差为零，所以透射光谱为零。图4.5(c、d)仅有超流态光子数分布谱线。因此在衍射极小处两个耦合的腔，在超流态和绝缘态之间光谱的差别是非常大的。人们在超流态可以获得一个有结构的光谱，而绝缘态观测到信号为零。

在图 4.4、4.5 中光子数仅依赖于一个统计的物理量 q ， $f(q_1, \dots, q_M) = f(q)$ 。在衍射极大处，对于单模或两模光场， q 是处于腔中 K 个格点上的原子数；而在衍射极小处，两模光场共存情况下， q 是在奇数格点或者偶数格点的原子数。因此在某个态 $|\Psi\rangle$ 上期待值被约化成 $\langle f \rangle_\Psi = \sum_{q=0}^N f(q) p_\Psi(q)$ ，其中 $p_\Psi(q)$ 是该态下 q 的分布函数。

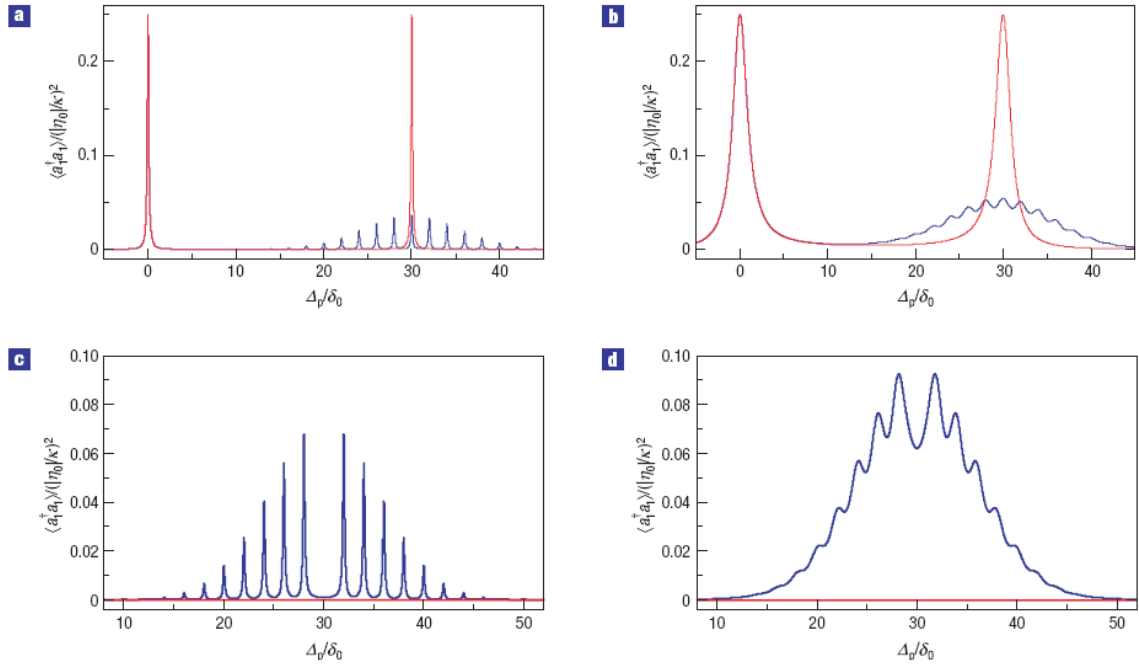


图 4.5. (a)光谱在衍射极大处，对于绝缘态有两个洛伦兹线型，而超流态出现在右边梳状结构分布的谱线。在零失谐处绝缘态和超流态的线型完全重合。而超流态结构性线型体现了原子数的涨落，而绝缘态窄谱线说明了原子数涨落消失。这里弛豫率 $\kappa = 0.1\delta_0$ ， $K = 15$ 。(b), 情形与(a) 类似，而 $\kappa = \delta_0$ ，这样在超流态会得到较宽的峰。(c),在衍射极小处，绝缘相从腔 1 衍射出的光子数为零，而超流态仍存在梳状结构谱线。对于超流态分布说明了即使在衍射极小处奇数格点和偶数格点原子数分布也存在涨落。 $K = M$ ， $\kappa = 0.1\delta_0$ 。(d),除了 $\kappa = \delta_0$ 情况与(c) 相似 $N = M = 30$ [14]。

在high-Q腔， $\kappa \ll \delta_0$ ， $f(q)$ 是一个窄洛伦兹线型、峰宽为 κ 的峰值出现在正比于 q ($q = 0, 1, \dots, N$) 的位置。但洛伦兹线型的高度与 q 值无关。因此，以 Δ_p 为变量的函数 $\langle f \rangle_\psi$ 描述振幅正比于 $p_\psi(q)$ 的梳子结构洛伦兹线型。

第二节 两分量冷原子自旋序的探测

在了解借助腔的原理研究单分量原子的相变问题的基础上，我们把它做了相应的拓展，并和目前的研究热点——多分量的冷原子联系起来。多分量的冷原子在光晶格中的相图如我们第一章中介绍是非常丰富的，所以实验上如果得以观测会提高

我们对微观物理的更深的认识。

4.2.1 三能级原子与两模光场相互作用

我们首先从一个三能级 Λ 型的原子与两束光频率分别为 ω_1 和 ω_2 作用的系统入手，该系统的哈密顿量可写成[24-25]

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} + \hbar\omega_1 a_1^{\dagger} a_1 + \hbar\omega_2 a_2^{\dagger} a_2 + \hbar g_1 (a_1 \sigma_{31} + a_1^{\dagger} \sigma_{13}) + \hbar g_2 (a_2 \sigma_{32} + a_2^{\dagger} \sigma_{23})$$

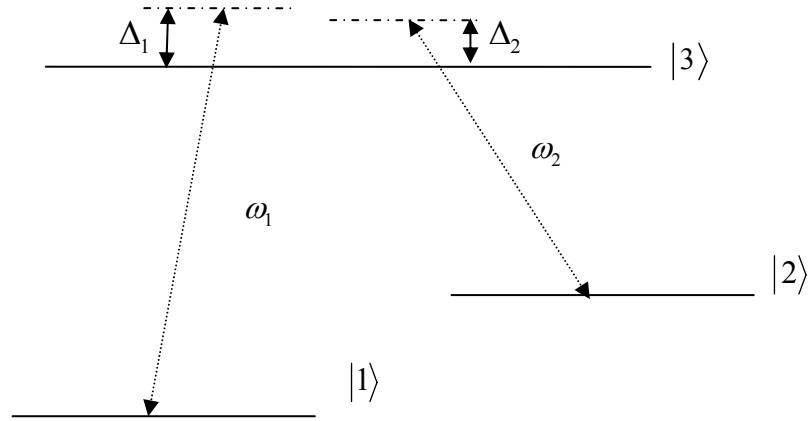


图 4.6 三能级原子的能级图(蓝失谐 $\Delta_{1,2} > 0$)

其中 $\sigma_{\alpha\beta} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ 是原子的算符， $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ 是原子的三个能级指标。 a_1 和 a_2 分别是两束光 1, 2 的湮灭算符。 $a_1^{\dagger} a_1$ 和 $a_2^{\dagger} a_2$ 是两束光的光子数算符。相互作用项 $a_1 \sigma_{31}$ ($a_2 \sigma_{32}$) 描述吸收频率为 ω_1 (ω_2) 的一个光子使得原子从 $|1\rangle$ 态 ($|2\rangle$ 态) 跃迁到 $|3\rangle$ 态，如图 4.6 所示。它们之间耦合强度用参量 g_1 (g_2) 来描述。

为了方便，把原子的能量重新写成

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} = & \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3) + \frac{1}{3}(2E_2 - E_1 - E_3)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \\ & - \frac{1}{3}(E_2 + E_1 - 2E_3)(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

这样哈密顿量就变成

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3) + \frac{1}{3}(2E_2 - E_1 - E_3)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \\
 & - \frac{1}{3}(E_2 + E_1 - 2E_3)(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 \\
 & + \hbar g_{13}(a_1 \sigma_{31} + a_1^\dagger \sigma_{13}) + \hbar g_{23}(a_2 \sigma_{32} + a_2^\dagger \sigma_{23})
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

然后对上面的哈密顿量作么正变换，选择么正变换算符

$$U = \exp(-S) \tag{4.17}$$

其中的 $S = \frac{g_1}{\Delta_1}(a_1 \sigma_{31} - a_1^\dagger \sigma_{13}) + \frac{g_2}{\Delta_2}(a_2 \sigma_{32} - a_2^\dagger \sigma_{23})$ ， $\Delta_{1,2}$ 是两束光与原子的能级 $1 \leftrightarrow 3$ 和

$2 \leftrightarrow 3$ 跃迁频率的失谐量，其定义是：

$$\hbar\Delta_1 = \hbar\omega_1 - (E_3 - E_1), \quad \hbar\Delta_2 = \hbar\omega_2 - (E_3 - E_2)$$

将(4.17)这个算符作用在原子或光子的算符上将产生一个缀饰(dressed)算符。这对于描述密度场更合理。这个变换需要用微扰的方法将变换后的哈密顿量的耦合常数近似到二阶，用公式

$$X' = e^{-S} X e^S = X - [S, X] + \frac{1}{2!}[S, [S, X]] + \dots$$

可得到一系列算符的变换

$$a_1' = a_1 - \frac{g_1}{\Delta_1} \sigma_{13} + \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{\Delta_1} \right)^2 a_1 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - \frac{1}{2} \frac{g_1 g_2}{\Delta_1 \Delta_2} a_2 \sigma_{12} \tag{4.18}$$

$$a_2' = a_2 - \frac{g_2}{\Delta_2} \sigma_{23} - \frac{1}{2} \frac{g_1 g_2}{\Delta_1 \Delta_2} a_1 \sigma_{21} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_2}{\Delta_2} \right)^2 a_2 (\sigma_{33} - \sigma_{22}) \tag{4.19}$$

$$\sigma_{13}' = \sigma_{13} - \frac{g_1}{\Delta_1} a_1 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \frac{g_2}{\Delta_2} a_2 \sigma_{12} \tag{4.20}$$

$$\sigma_{32}' = \sigma_{32} + \frac{g_1}{\Delta_1} a_1^\dagger \sigma_{12} + \frac{g_2}{\Delta_2} a_2^\dagger (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}' - \sigma_{11}' = & \sigma_{33} - \sigma_{11} + 2 \frac{g_1}{\Delta_1} (a_1 \sigma_{31} + a_1^\dagger \sigma_{13}) + \frac{g_2}{\Delta_2} (a_2 \sigma_{32} + a_2^\dagger \sigma_{23}) - \left(2 \frac{g_1^2}{(\Delta_1)^2} + \frac{g_2^2}{(\Delta_2)^2} \right) \sigma_{33} \\
 & - 2 \frac{g_1^2}{(\Delta_1)^2} a_1^\dagger a_1 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \frac{g_2^2}{(\Delta_2)^2} a_2^\dagger a_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})
 \end{aligned}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{g_1}{\Delta_1}\frac{g_2}{\Delta_2}(a_2^+a_1\sigma_{21}+a_1^+a_2\sigma_{12}) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{22}-\sigma'_{11} &= \sigma_{22}-\sigma_{11}+\frac{g_1}{\Delta_1}(a_1\sigma_{31}+a_1^+\sigma_{13}) \\ &-\frac{g_2}{\Delta_2}(a_2\sigma_{32}+a_2^+\sigma_{23})+\left(\frac{g_2^2}{(\Delta_2)^2}-\frac{g_1^2}{(\Delta_1)^2}\right)\sigma_{33} \\ &-\frac{g_1^2}{(\Delta_1)^2}a_1^+a_1(\sigma_{33}-\sigma_{11})-\frac{g_2^2}{(\Delta_2)^2}a_2^+a_2(\sigma_{22}-\sigma_{33}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

在以上推导的基础上我们还可以得到它们的共轭的变换结果。这儿 σ'_{13} 和 σ'_{23} 只近似到耦合常数的一阶，经过这样的变换，我们发现哈密顿量关于 g_1/Δ_1 和 g_2/Δ_2 的一阶的算符都消失了。在这样的么正变换下，哈密顿量进一步可写成

$$\begin{aligned} H' &= \sigma_{11}E_1+\sigma_{22}E_2+\hbar\omega_1a_1^+a_1+\hbar\omega_2a_2^+a_2 \\ &+\sigma_{33}\left[E_2+\hbar\frac{g_1^2}{\Delta_1}+\hbar\frac{g_2^2}{\Delta_2}\right]+\hbar\frac{g_1}{\Delta_1}a_1^+a_1(\sigma_{33}-\sigma_{11}) \\ &+\hbar\frac{g_2}{\Delta_2}a_2^+a_2(\sigma_{33}-\sigma_{22})-\hbar\frac{g_1g_2}{2}\left(\frac{1}{\Delta_1}+\frac{1}{\Delta_2}\right)(a_1^+a_2\sigma_{12}+a_2^+a_1\sigma_{21}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

假设两束光和两个跃迁频率是远离共振的，即在大失谐条件下，我们只研究 $\Delta_1=\Delta_2=\Delta$ 这一简单情况，哈密顿量可以化简成

$$\begin{aligned} H' &= \sigma_{11}E_1+\sigma_{22}E_2-\hbar\frac{g_1^2}{\Delta}a_1^+a_1\sigma_{11}-\hbar\frac{g_2^2}{\Delta}a_2^+a_2\sigma_{22} \\ &+\hbar\omega_1a_1^+a_1+\hbar\omega_2a_2^+a_2-\hbar\frac{g_1g_2}{\Delta}(a_1^+a_2\sigma_{12}+a_2^+a_1\sigma_{21}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

在以上条件下原子不会占据三能级态 $|3\rangle$ ，即 $\sigma_{33}=0$ ，这儿用到了三能级原子的受激拉曼绝热通道的物理过程。其优点如第二章第三节所述将可引起原子自发衰变的激发态 $|3\rangle$ 绝热消除。 $\hbar\frac{g_1^2}{\Delta}a_1^+a_1\sigma_{11}$ 和 $\hbar\frac{g_2^2}{\Delta}a_2^+a_2\sigma_{22}$ 是与强度有关的 Stark 效应项。

通过以上的么正变换和近似，我们操控三能级原子与两束光近似得到两种不同能级的原子与两束光相互作用的哈密顿量。这里两种不同能级的原子可被当作两种不同的原子。

4.2.2 光晶格中两分量冷原子在两模光场作用下的哈密顿量

在上一小节的基础上将 N 个这样与两模的光作用的两种原子置于光晶格中。利用第一章背景介绍中推到光晶格中冷原子哈密顿量的方法，以及在本章第一节单分量的原子与光场作用的哈密顿量推导过程，这里我们把它们的方法应用到我们的模型中。

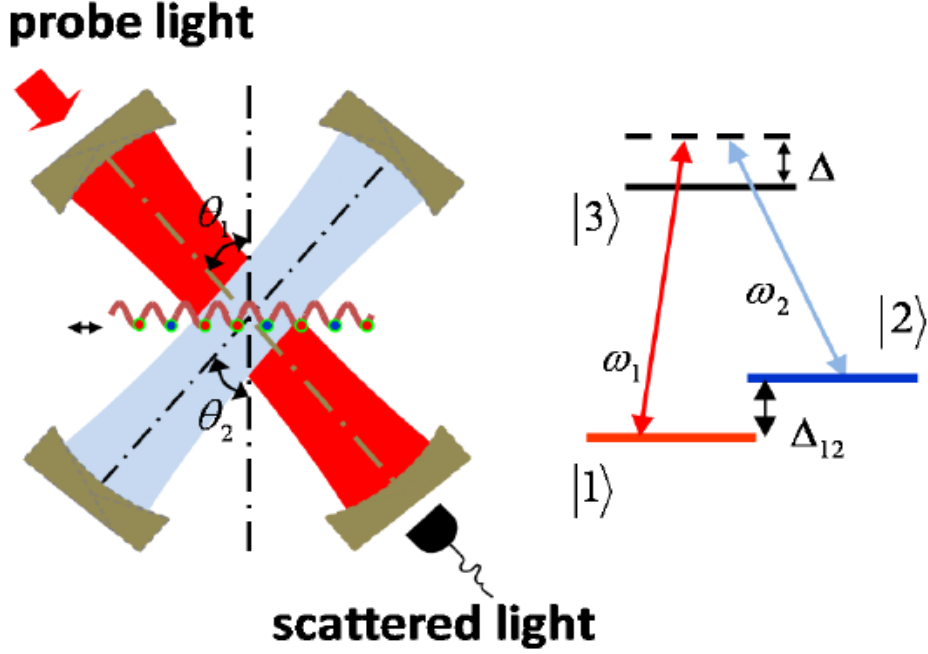


图 4.7 装置示意图(蓝失谐)

对于光晶格中的两分量的原子系统是多体问题，而且我们研究光和原子作用后的透射光的光子数以及其他的一些特性，所以光对原子内部的相互作用的影响被忽略。这里我们首先研究在光晶格中单个原子和光场作用的哈密顿量，如下

$$H_{al} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} + V_{cl}(r) + \hbar \sum_{l,m=1,2} \frac{g_l g_m}{\Delta} u_l^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r}) a_l^\dagger a_m \quad (4.26)$$

其中腔场模函数是 $u_m(\mathbf{r})$ ，光晶格的势函数是 $V_{cl}(r)$ 。将其拓展到 N 个原子系统

$$H' = \sum_{l=1,2} \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l + \int d^3\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) H_{al} \Psi(\mathbf{r}) \quad (4.27)$$

其中假设腔场对于束缚原子晶格场来说比较弱，原子的场算符用局域的 Wannier 函数作展开 $\Psi(r) = \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha} b_{i\alpha} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ ，指标 $\alpha = 1, 2$ 是系统中的两分量的原子。将场算符代入上面的哈密顿量表达式中，

$$\begin{aligned}
 H' = & \sum_{l=1,2} \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l \\
 & + \sum_{i=1}^M \int d^3 \mathbf{r} w^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) w(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \left[\begin{aligned} & \sum_{\alpha,\beta} b_{i\alpha}^+ \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} + V_{cl}(\mathbf{r}) \right) b_{j\beta} \\ & + \hbar \left(\frac{g_1^2}{\Delta} u_1^*(\mathbf{r}) u_1(\mathbf{r}) b_{i1}^+ a_1^\dagger a_1 b_{j1} + \frac{g_2^2}{\Delta} u_2^*(\mathbf{r}) u_2(\mathbf{r}) b_{i2}^+ a_2^\dagger a_2 b_{j2} \right. \\ & \left. + \frac{g_1 g_2}{\Delta} (u_1^*(\mathbf{r}) u_2(\mathbf{r}) b_{i1}^+ a_1^\dagger a_2 b_{j2} + u_2^*(\mathbf{r}) u_1(\mathbf{r}) b_{i2}^+ a_2^\dagger a_1 b_{j1}) \right) \end{aligned} \right] \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

哈密顿量第一项是两模光量子化的场算符，第二项中除了原子的动能和晶格势外，还有两模光与原子的相互作用：分量 1 的原子与频率为 ω_1 的光作用，分量 2 的原子与频率为 ω_2 的光作用，剩下是两模光使得两种原子之间发生转换项。忽略格点间原子的隧穿及同一格点原子间的相互作用，两分量原子和两模光作用的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H' = & \sum_{l=1,2} \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l \\
 & + \hbar \sum_i^K \left(\begin{aligned} & \frac{g_1^2}{\Delta} u_1^*(\mathbf{r}_i) u_1(\mathbf{r}_i) b_{i1}^+ b_{i1} a_1^\dagger a_1 + \frac{g_2^2}{\Delta} u_2^*(\mathbf{r}_i) u_2(\mathbf{r}_i) b_{i2}^+ b_{i2} a_2^\dagger a_2 \\ & + \frac{g_1 g_2}{\Delta} (u_1^*(\mathbf{r}_i) u_2(\mathbf{r}_i) b_{i1}^+ a_1^\dagger a_2 b_{i2} + u_2^*(\mathbf{r}_i) u_1(\mathbf{r}_i) b_{i2}^+ a_2^\dagger a_1 b_{i1}) \end{aligned} \right) \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

这个哈密顿量是我们问题研究的出发点，也是很关键的部分。如前面介绍我们只研究物质波的散射因为我们只研究原子系统基态的性质——相变问题。在(4.29)基础上我们做了两个方面的工作来研究探测光晶格中两分量的原子的相变的问题[26-27]。

4.2.3 半经典近似下的噪声特性

我们调节频率为 ω_2 的场强，使其能被看作经典的光。这样我们的哈密顿量只有原子和频率为 ω_1 的光是量子化的。根据(4.29)式的哈密顿量可以得到 a_1 随时间的海森堡演化方程，同时对这个系统的做旋转变换

$$\dot{a}_1 = - \left[i \left(\Delta_{12} + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_{i=1}^K |u_1(\mathbf{r}_i)|^2 \hat{n}_i \right) + \kappa \right] a_1 - i \frac{g_1 g_2}{\Delta} a_2 \sum_{i=1}^K u_1^*(\mathbf{r}_i) u_2(\mathbf{r}_i) b_{i1}^+ b_{i2} \quad (4.30)$$

其中 $\Delta_{12} = \omega_1 - \omega_2$ 。因为 a_2 是经典光，可以被看做常数。尽管腔模色散平移对原子数

的统计很敏感，但我们假设它远小于弛豫率 κ 和失谐量 Δ_{12} (即 $\frac{g_1^2}{\Delta} \sum_{i=1}^K |u_1(\mathbf{r}_i)|^2 \hat{n}_i \ll \kappa$ 或 Δ_{12})，这样这个微分方程可以得到如下近似的形式

$$a_1 = -\frac{ig_1g_2a_2}{\Delta(i\Delta_{12} + \kappa)} \sum_{i=1}^K u_1^*(\mathbf{r}_i)u_2(\mathbf{r}_i)b_{i1}^+b_{i2} \quad (4.31)$$

通过求解可以得到光子数的表达形式

$$a_1^+a_1 = |C|^2 \hat{D}^+\hat{D} \quad (4.32)$$

系数 $C = -\frac{ig_1g_2a_2}{\Delta(i\Delta_{12} + \kappa)}$ 和跃迁算符 $\hat{D} = \sum_{i=1}^K A_i(\theta_1, \theta_2)b_{i1}^+b_{i2}$ ，其中的系数是

$A_i(\theta_1, \theta_2) = u_1^*(\mathbf{r}_i)u_2(\mathbf{r}_i)$ 。方程(4.32)是我们这一小节研究的重点。

对于占据数为 1 的两分量的绝缘态[31]

$$|\Psi\rangle = \prod_{i \in A, j \in B} |\psi_A\rangle_i |\psi_B\rangle_j \quad (4.33)$$

其中

$$|\psi_{A,B}\rangle = \cos \frac{\theta_{A,B}}{2} |1, 0\rangle_i + \exp(i\phi_{A,B}) \sin \frac{\theta_{A,B}}{2} |0, 1\rangle_i \quad (4.34)$$

在 θ_A 和 θ_B 取三种不同值对应绝缘态的三种相，而超流态的形式是

$$|\Psi_{SF}\rangle = \left(1/\sqrt{M^{N_1}N_1!M^{N_2}N_2!}\right) \left(\sum_i b_{i1}^+\right)^{N_1} \left(\sum_i b_{i2}^+\right)^{N_2} |0\rangle \quad (4.35)$$

如第一章所介绍的我们定义赝自旋算符为 $S_i^+ = b_{i2}^+b_{i1}$ ， $S_i^- = (S_i^+)^+$ 。这样我们来计算

$\hat{D}^+\hat{D}$ 的期待值是

$$\langle \hat{D}^+\hat{D} \rangle = \sum_{i=1}^K |A_i|^2 \langle S_i^+ S_i^- \rangle + \sum_{i \neq j=1}^K A_i^* A_j \langle S_i^+ S_j^- \rangle \quad (4.36)$$

它由两部分组成，第一部分是同一个格点原子自旋的作用，第二部分是不同格点间的自旋关联。在(4.61)的基础上我们可以得到透射光的光子数，同时定义一个噪声函数

$$R(\theta_1, \theta_2) \approx \left(\langle \delta S_a^+ \delta S_a^- \rangle - \langle \delta S_a^+ \delta S_b^- \rangle \right) \sum_{i=1}^K |A_i|^2 - \langle \delta S_a^+ \delta S_b^- \rangle \left| \sum_{i=1}^K A_i \right|^2 \quad (4.37)$$

噪声函数不仅与格点上的自旋关联有关，而且与两个腔与晶格法线夹角决定的系数 $A_i(\theta_1, \theta_2) = u_1^*(\mathbf{r}_i)u_2(\mathbf{r}_i)$ 有很大关系。这样我们可以得到在不同的角度观测到透射的光子数的性质。

我们来看一些有关的算符的期待值，如果晶格中的原子处于绝缘相，

$$\sum_i |A_i|^2 \langle S_i^+ S_i^- \rangle = \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta_A}{2} + \sin^2 \frac{\theta_B}{2} \right) \sum_i |A_i|^2 \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j}^K A_i^* A_j \langle S_i^+ S_j^- \rangle &= \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos^2 \frac{\theta_A}{2} \sum_{i \neq j \in A} A_i^* A_j + \sin^2 \frac{\theta_B}{2} \cos^2 \frac{\theta_B}{2} \sum_{i \neq j \in B} A_i^* A_j \\ &+ 2 \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \sum_{i \in A, j \in B} A_i^* A_j \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\sum_i A_i \langle S_i^+ \rangle = \exp(-i\phi_A) \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_A}{2} \sum_{i \in A} A_i^* + \exp(-i\phi_B) \sin \frac{\theta_B}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \sum_{j \in B} A_j^* \quad (4.40)$$

$$\sum_i A_i \langle S_i^- \rangle = \left(\sum_i A_i^* \langle S_i^+ \rangle \right)^* \quad (4.41)$$

而当系统处于超流态

$$\sum_i |A_i|^2 \langle S_i^+ S_i^- \rangle = n_2 (n_1 + 1) \sum_i |A_i|^2 \quad (4.42)$$

$$\sum_{i \neq j}^K A_i^* A_j \langle S_i^+ S_j^- \rangle = n_2 n_1 \sum_{i \neq j}^K A_i^* A_j \quad (4.43)$$

$$\sum_i A_i \langle S_i^+ \rangle = \sum_i A_i \langle S_i^- \rangle = 0 \quad (4.44)$$

另外我们关注一下腔场模函数的取值。首先我们固定一个腔的位置，如探测光 a_2 沿着晶格的法线方向 $\theta_2 = 0$ ，具体操作中我们改变 a_1 的腔与晶格的法线的夹角 θ_1 。一维的光晶格的周期常数 $d = \lambda/2$ 原子束缚在 $x_m = md$ 的位置上， $m = 1, 2, \dots, M$ 。而腔模的函数有两种，一个是行波的形式 $u_{1,2}(\mathbf{r}_m) = \exp(ik_{1,2x}d)$ ，另一种是驻波的形式 $u_{1,2}(\mathbf{r}_m) = \cos(k_{1,2x}d)$ 。波矢是 $k_{1,2x} = |\mathbf{k}_{1,2}| \sin \theta_{1,2}$ ，其中 θ_1 和 θ_2 分别是腔和晶格法线的夹角。

首先我们考虑两个特殊的情况：衍射极大 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ，和衍射极小 $\theta_2 = 0$ 、 $\theta_1 = \pi/2$ 。这里我们在这两个情况下计算湮灭算符和光子数的期待值，如表4.2所示：

表4.2 湮灭算符和光子数的期待值

	$\langle a_1 \rangle_M$	$\langle a_1^\dagger a_1 \rangle_M$
AF ($\theta_1 = 0, \pi/2$)	0	$K C ^2/2$
FM ($\theta_1 = 0, \pi/2$)	0	0
XY ($\theta_1 = 0$)	$\sqrt{3}KC/4$	$(K + 3K^2) C ^2/16$
XY ($\theta_1 = \pi/2$)	0	$K C ^2/16$
SF ($\theta_1 = 0$)	0	$n_2(n_2 + 1)K C ^2$
SF ($\theta_1 = \pi/2$)	0	$n_2K C ^2$

从上面的表格可以看出绝缘相中的FM和AF在两种情况观测到的光子数相同，但XY相在两处观测到的不同，而对于超流相观测到的光子数也不同。所以通过这两个位置的探测我们可以把铁磁和反铁磁与XY和超流态分辨开。但是它们各自不太分得开，所以需要进一步研究。之前我们定义了噪声函数，结合实验中腔中的模函数我们讨论一下噪声函数随角度变化的特性。

那么首先看 $\sum_i |A_i|^2$ 和 $\sum_{i \neq j} A_i A_j$ 的一些性质特点：

对于行波

$$A_m = u_1^*(\mathbf{r}_m) u_2(\mathbf{r}_m) = \exp[im(|\mathbf{k}_2| \sin \theta_2 - |\mathbf{k}_1| \sin \theta_1) d] \quad (4.45)$$

$$|A_m|^2 = u_2^*(\mathbf{r}_m) u_1(\mathbf{r}_m) u_1^*(\mathbf{r}_m) u_2(\mathbf{r}_m) = 1 \quad (4.46)$$

定义

$$A = \sum_m A_m \quad (4.47)$$

则

$$\sum_{m \neq n} A_m A_n = |A|^2 - \sum_m |A_m|^2 \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
 |A|^2 &= \left| \sum_m A_m \right|^2 \\
 &= \left| \frac{\sin(K\alpha_-)}{\sin\frac{\alpha_-}{2}} \left(-\cos(K+1)\frac{\alpha_-}{2} - i\sin(K+1)\frac{\alpha_-}{2} \right) \right|^2 = \frac{\sin^2(K\alpha_-)}{\sin^2\frac{\alpha_-}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

其中 $\alpha_- = d(|\mathbf{k}_1|\sin\theta_1 - |\mathbf{k}_2|\sin\theta_2)$ 。在两腔光场都是行波时，噪声函数化简成

$$R(\theta_1, \theta_2) \approx \left(\langle \delta S_a^+ \delta S_a^- \rangle - \langle \delta S_a^+ \delta S_b^- \rangle \right) K + \langle \delta S_a^+ \delta S_b^- \rangle \frac{\sin^2(K\alpha_-)}{\sin^2\frac{\alpha_-}{2}} \tag{4.50}$$

它随 θ_1 的变化如图4.8左边所示。

对于绝缘态的三个不同相，它们的噪声不随 θ_1 的变化而变化。而超流态在衍射极大和极小的地方探测到的光子数明显不同。这种噪声不随角度变化的性质体现了绝缘态粒子数的涨落很小，粒子被局域在格点上的物理行为。而超流态相反，由于粒子数不能被束缚在某个格点上，在整个晶格空间可以无耗散的流动，所以噪声较大，且和光的相互作用比较强。这一特性只在衍射极大的地方可以观测到。结合上面表格中给出的光子数的特性我们可以分辨出光晶格中的两分量的一些量子态。

如果腔中的光换作是驻波，如第一节所述会有很多的新的特性出来。而对于驻波模函数参量

$$\begin{aligned}
 A_m &= u_1^*(\mathbf{r}_m) u_2(\mathbf{r}_m) \\
 &= \cos(mk_{1x}d) \cos(mk_{2x}d) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\cos md (|\mathbf{k}_1|\sin\theta_1 + |\mathbf{k}_2|\sin\theta_2) \right. \\
 &\quad \left. + \cos md (|\mathbf{k}_1|\sin\theta_1 - |\mathbf{k}_2|\sin\theta_2) \right]
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\sum_m^K A_m = \frac{1}{2} \sum_m^K \cos m\alpha_+ + \frac{1}{2} \sum_m^K \cos m\alpha_- \tag{4.52}$$

其中 $\alpha_+ = d(|\mathbf{k}_1|\sin\theta_1 + |\mathbf{k}_2|\sin\theta_2)$ ，则

$$\left| \sum_m^K A_m \right|^2 = \left(\frac{1}{2} \sum_m^K \cos m\alpha_+ + \frac{1}{2} \sum_m^K \cos m\alpha_- \right)^2 \quad (4.53)$$

$$|A|^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_m^K \cos m\alpha_+ + \sum_m^K \cos m\alpha_- \right)^2 \quad (4.54)$$

根据驻波情况模函数随角度变化的关系，我们很容易得到在该情况下的噪声函数

$$\begin{aligned} R(\theta_1, \theta_2) \approx & \left(\langle \delta S_a^+ \delta S_a^- \rangle - \langle \delta S_a^+ \delta S_b^- \rangle \right) \sum_{m=1}^K (\cos m\alpha_+ + \cos m\alpha_-)^2 \\ & + \langle \delta S_a^+ \delta S_b^- \rangle \left(\sum_m^K \cos m\alpha_+ + \sum_m^K \cos m\alpha_- \right)^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

而它对应的关系图如图4.8所示：

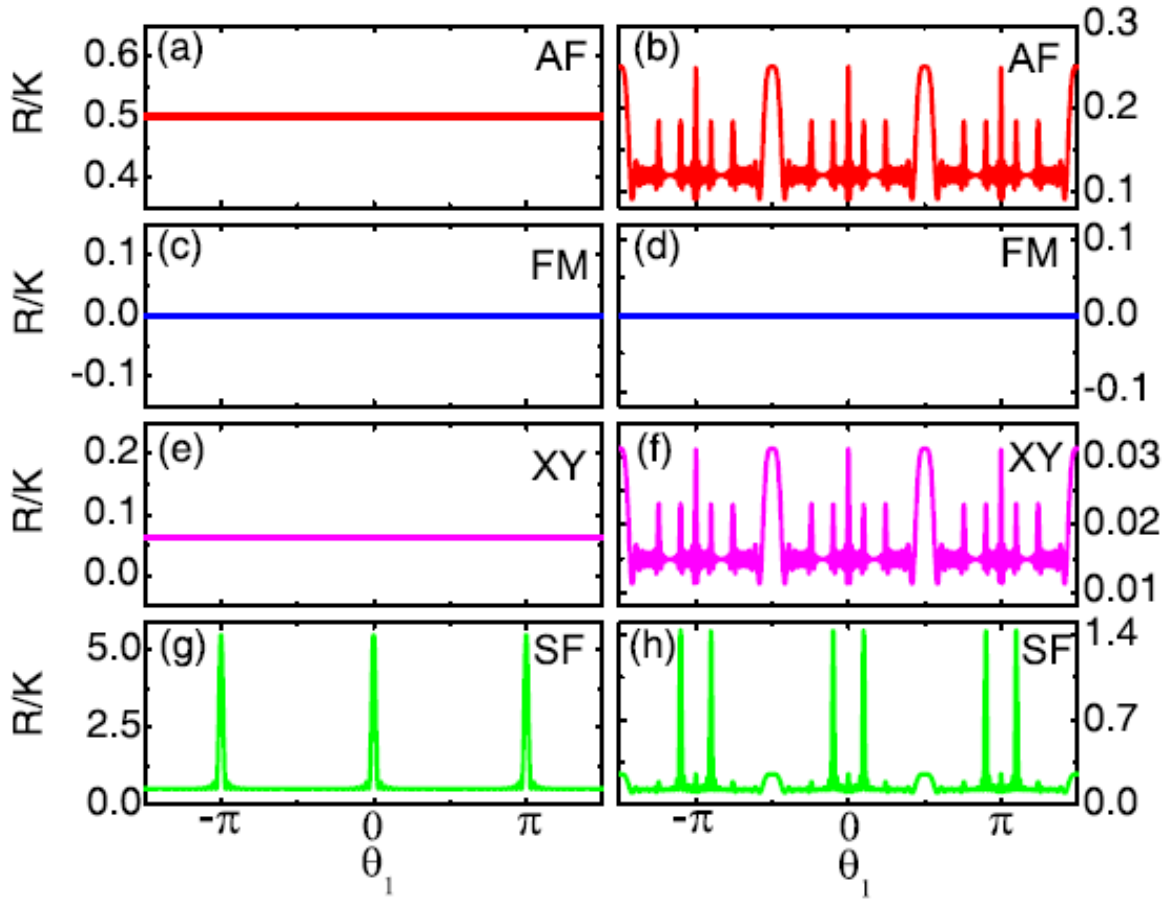


图4.8 该图是两模光分别取行波(左边)和驻波(右边)并且选择 $\theta_2 = 0$ 时噪声随 θ_1 的分布。超流在 $\theta_1 = 0, \pm\pi, \dots$ 处或附近有极大值。 $K = M/2$, $M = N = 40$ $n_1 = n_2 = 1/2$ 。

从图4.8可以看出对于驻波除了在衍射最大处 $\theta_1 = 0$ 和行波的情况有相似之处，

在衍射极小的地方 $\theta_1 = \pi/2$ 处也有光子数的涨落出现。反铁磁的尤其明显。而超流在衍射最大附近出现了两个较大的峰值。对于铁磁和XY两个相噪声还是很小，仅仅XY稍有些涨落。

根据以上的分析我们能够较清楚的分辨出光晶格中的两分量的玻色子的相图。这样为我们制备比较理想的两分量在光晶格中的量子态提供了一定的理论依据。

4.2.4 全量子理论下的透射光谱

在哈密顿量(4.29)的基础上，为了能够探测到原子和光场的作用，我们向腔内注入一个探测光，它只激发腔中频率为 ω_1 一个模，这里用 ω_{1p} 来做标记探测光的频率。

这束光能够相干的驱动腔内的原子，其振幅是 η ，哈密顿量可写成

$$\begin{aligned}
 H' = & \sum_{l=1,2} \hbar \omega_l a_l^\dagger a_l - i\hbar \eta (a_1 \exp(i\omega_{1p}t) - a_1^\dagger \exp(-i\omega_{1p}t)) \\
 & + \hbar \left(\frac{g_1^2}{\Delta} \sum_{i=1}^K b_{i1}^\dagger b_{i1} a_1^\dagger a_1 + \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_{i=1}^K b_{i2}^\dagger b_{i2} a_2^\dagger a_2 \right) \\
 & + \hbar \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_{i=1}^K (A_i b_{i1}^\dagger b_{i2} a_1^\dagger a_2 + A_i^* b_{i2}^\dagger b_{i1} a_2^\dagger a_1)
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

将(4.29)中取系数 $u_1^*(\mathbf{r}_i)u_1(\mathbf{r}_i) = u_2^*(\mathbf{r}_i)u_2(\mathbf{r}_i) = 1$ ， $u_1^*(\mathbf{r}_i)u_2(\mathbf{r}_i) = A_i$ 。在量子光学中，选取旋转参考系是一个非常重要的方法，它可以将方程、公式和算符变成比较简单'的形式。选择参考系 $A = \omega_{1p}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)$ ，则旋转后的哈密顿量是

$$\begin{aligned}
 H = & \exp(iAt)(H' - \hbar A)\exp(-iAt) \\
 = & H' - \hbar \omega_{1p}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) \\
 = & \sum_{l=1,2} \hbar \Delta_{lp} a_l^\dagger a_l - i\hbar \eta (a_1 - a_1^\dagger) + \hbar \left(\frac{g_1^2}{\Delta} \sum_i b_{i1}^\dagger b_{i1} a_1^\dagger a_1 + \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_i b_{i2}^\dagger b_{i2} a_2^\dagger a_2 \right) \\
 & + \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \sum_i (A_i a_1^\dagger b_{i1}^\dagger b_{i2} a_2 + A_i^* a_2^\dagger b_{i1} b_{i2}^\dagger a_1)
 \end{aligned} \quad (4.57)$$

其中 $\Delta_{lp} = \omega_l - \omega_{1p}$ 是腔模与探测光的失谐量。

两模光场光子湮灭算符的海森堡方程

$$\dot{a}_1 = -(iX + \kappa)a_1 - iZa_2 + \eta e^{-i\omega_{1p}t} \quad (4.58)$$

$$\dot{a}_2 = -(iY + \kappa)a_2 - iZ^+ a_1 \quad (4.59)$$

其中

$$X = \omega_1 + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_i^K u_1^*(\mathbf{r}_i) u_2(\mathbf{r}_i) b_{i1}^+ b_{i2}$$

$$Y = \omega_2 + \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_i^K u_2^*(\mathbf{r}_i) u_1(\mathbf{r}_i) b_{i2}^+ b_{i1}$$

$$Z = \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K u_1^*(\mathbf{r}_i) u_2(\mathbf{r}_i) b_{i1}^+ b_{i2}$$

令 $a_i = \tilde{a}_i e^{-i\omega_{ip}t}$, 方程(4.58)和(4.59)变成

$$\frac{d\tilde{a}_1}{dt} - i\omega_{1p}\tilde{a}_1 = -(iX + \kappa)\tilde{a}_1 - iZ\tilde{a}_2 + \eta \quad (4.60)$$

$$\frac{d\tilde{a}_2}{dt} - i\omega_{2p}\tilde{a}_2 = -(iY + \kappa)\tilde{a}_2 - iZ^+\tilde{a}_1 \quad (4.61)$$

对上面两方程求解, 可得到

$$\langle a_1^+ \rangle \langle a_1 \rangle = \frac{|\eta|^2 (\kappa^2 + \langle \zeta_2^2 \rangle)}{(\langle \zeta_1 \rangle + \langle \zeta_2 \rangle)^2 \kappa^2 + (\langle Z \rangle \langle Z^+ \rangle - \langle \zeta_1 \rangle \langle \zeta_2 \rangle + \kappa^2)^2} \quad (4.62)$$

$$\langle a_2^+ \rangle \langle a_2 \rangle = \frac{|\eta|^2 \langle Z \rangle \langle Z^+ \rangle}{(\langle \zeta_1 \rangle + \langle \zeta_2 \rangle)^2 \kappa^2 + (\langle Z \rangle \langle Z^+ \rangle - \langle \zeta_1 \rangle \langle \zeta_2 \rangle + \kappa^2)^2} \quad (4.63)$$

其中 $\zeta_{1,2} = \Delta_{1,2p} + \frac{g_{1,2}^2}{\Delta} \sum_i^K n_{i1,2}$ 。

另外我们还用主方程的方法分析透射光子数。首先定义一个密度函数 $\rho_{a_1, a_2, b_1, b_2} = \rho = \rho_{a_1, a_2}(t) \otimes \rho_{b_1, b_2}(0)$, 其中假设原子的态密度是不随时间变化的。则系统的 Liouville 方程是

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + L\rho \quad (4.64)$$

其中

$$L\rho = \kappa (2a_1 \rho a_1^+ - a_1^+ a_1 \rho - \rho a_1^+ a_1 + 2a_2 \rho a_2^+ - a_2^+ a_2 \rho - \rho a_2^+ a_2) \quad (4.65)$$

(4.65)这一项是描述腔的损耗, κ 是衰减率, 忽略其它损耗。在(4.64-65)基础上我们

可以得到了一些运动方程

$$i \frac{d\langle a_1^+ a_1 \rangle}{dt} = -2i\kappa \langle a_1^+ a_1 \rangle + \frac{g_1 g_2}{\Delta} \langle a_1^+ a_2 \rangle \sum_i^K A_i \langle S_i^- \rangle - \frac{g_1 g_2}{\Delta} \langle a_2^+ a_1 \rangle \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle + i\eta (\langle a_1^+ \rangle + \langle a_1 \rangle) \quad (4.66)$$

$$i \frac{d\langle a_2^+ a_2 \rangle}{dt} = -\frac{g_1 g_2}{\Delta} \langle a_1^+ a_2 \rangle \sum_i^K A_i \langle S_i^- \rangle + \frac{g_1 g_2}{\Delta} \langle a_2^+ a_1 \rangle \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle - 2i\kappa \langle a_2^+ a_2 \rangle \quad (4.67)$$

$$i \frac{d\langle a_1^+ a_2 \rangle}{dt} = \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle \langle a_1^+ a_1 \rangle - \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle + i\eta \langle a_2 \rangle - \left[\Delta_{1p} - \Delta_{2p} + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i1} \rangle - \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle + 2i\kappa \right] \langle a_1^+ a_2 \rangle \quad (4.68)$$

$$i \frac{d\langle a_2^+ a_1 \rangle}{dt} = -\frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i \langle S_i^- \rangle \langle a_1^+ a_1 \rangle + \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i \langle S_i^- \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle + i\eta \langle a_2^+ \rangle + \left[\Delta_{1p} - \Delta_{2p} + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i1} \rangle - \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle - 2i\kappa \right] \langle a_2^+ a_1 \rangle \quad (4.69)$$

我们发现在一些非齐次项里含有光子数的湮灭算符的期待值，所以需要同样的办法来计算它们的含时演化方程，

$$i \frac{d\langle a_1 \rangle}{dt} = \left[\Delta_{1p} + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i1} \rangle - i\kappa \right] \langle a_1 \rangle + \frac{g_1 g_2}{\Delta} \langle a_2 \rangle \sum_i^K A_i \langle S_i^- \rangle + i\eta \quad (4.70)$$

$$i \frac{d\langle a_2 \rangle}{dt} = \left[\Delta_{2p} + \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle - i\kappa \right] \langle a_2 \rangle + \langle a_1 \rangle \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle \quad (4.71)$$

接下来第一步我们先计算这两个方程的解，然后再带入四个的方程组(4.66-69)。为了方便计算我们做了一些代换

$$\rho_{ij} = a_i^+ a_j, \quad \gamma = \zeta_1 - \zeta_2$$

$$\alpha = \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle, \quad \alpha^* = \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i \langle S_i^- \rangle$$

$$\zeta_1 = \Delta_{1p} + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i1} \rangle, \quad \zeta_2 = \Delta_{2p} + \frac{g_2^2}{\Delta} \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle$$

所以(4.40-43)和(4.44-45)两组方程组可写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} i \frac{d\langle a_1^+ a_1 \rangle}{dt} \\ i \frac{d\langle a_1^+ a_2 \rangle}{dt} \\ i \frac{d\langle a_2^+ a_1 \rangle}{dt} \\ i \frac{d\langle a_2^+ a_2 \rangle}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\kappa & \alpha^* & -\alpha & 0 \\ \alpha & -\gamma - 2i\kappa & 0 & -\alpha \\ -\alpha^* & 0 & \gamma - 2i\kappa & \alpha^* \\ 0 & -\alpha^* & \alpha & -2i\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1^+ a_1 \rangle \\ \langle a_1^+ a_2 \rangle \\ \langle a_2^+ a_1 \rangle \\ \langle a_2^+ a_2 \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\eta(\langle a_1 \rangle + \langle a_1^+ \rangle) \\ i\eta \langle a_2 \rangle \\ i\eta \langle a_2^+ \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

$$\begin{pmatrix} i \langle \dot{a}_1 \rangle \\ i \langle \dot{a}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\zeta_1 - i\kappa) & \alpha^* \\ \alpha & (\zeta_2 - i\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1 \rangle \\ \langle a_2 \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

利用微分方程组的办法我们得到(4.73)的解

$$\begin{aligned} \langle a_1 \rangle &= -\alpha^* C_1 \exp\left[-t\left(\kappa + \frac{i}{2}(p-q)\right)\right] - \alpha^* C_2 \exp\left[-t\left(\kappa + \frac{i}{2}(p+q)\right)\right] \\ &\quad - \frac{\eta(\gamma-q)[2\kappa - i(p-q)]}{q[4\kappa^2 + (p-q)^2]} \left\{ 1 - \exp\left[-t\kappa - \frac{it}{2}(p-q)\right] \right\} \\ &\quad + \frac{\eta(\gamma+q)[2\kappa - i(p+q)]}{q[4\kappa^2 + (p+q)^2]} \left\{ 1 - \exp\left[-t\kappa - \frac{it}{2}(p+q)\right] \right\} \\ \langle a_2 \rangle &= \frac{1}{2}(\gamma+q)C_1 \exp\left[-t\left(\kappa + \frac{i}{2}(p-q)\right)\right] + \frac{1}{2}(\gamma-q)C_2 \exp\left[-t\left(\kappa + \frac{i}{2}(p+q)\right)\right] \\ &\quad + \frac{\eta(\gamma^2 - q^2)[2\kappa - i(p-q)]}{2\alpha^* q[4\kappa^2 + (p-q)^2]} \left\{ 1 - \exp\left[-t\kappa - \frac{it}{2}(p-q)\right] \right\} \\ &\quad - \frac{\eta(\gamma^2 - q^2)[2\kappa - i(p+q)]}{2\alpha^* q[4\kappa^2 + (p+q)^2]} \left\{ 1 - \exp\left[-t\kappa - \frac{it}{2}(p+q)\right] \right\} \end{aligned}$$

其中： $p = \zeta_1 + \zeta_2$ ， $q = \sqrt{4\alpha^* \alpha + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}$ 。将以上结果直接代入(4.72)中计算会很麻烦，由于我们最后测量的光子数是稳定输出的结果，所以取极限 $t \rightarrow \infty$ 时，会发现有很多项被衰减掉了，这样我们的结果将大大简化，如下：

$$\langle a_1^+ a_1 \rangle = \frac{\eta^2(\kappa^2 + \zeta_2^2)}{\kappa^4 + \kappa^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\alpha^* \alpha) + (\zeta_1 \zeta_2 - \alpha^* \alpha)^2} \quad (4.74)$$

$$\langle a_1^+ a_2 \rangle = \frac{i\alpha\eta^2(\kappa - i\zeta_2)}{\kappa^4 + \kappa^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\alpha^* \alpha) + (\zeta_1 \zeta_2 - \alpha^* \alpha)^2} \quad (4.75)$$

$$\langle a_2^+ a_1 \rangle = \frac{i\alpha^* \eta^2 (\kappa + i\zeta_2)}{\kappa^4 + \kappa^2 (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\alpha^* \alpha) + (\zeta_1 \zeta_2 - \alpha^* \alpha)^2} \quad (4.76)$$

$$\langle a_2^+ a_2 \rangle = \frac{\eta^2 \alpha^* \alpha}{\kappa^4 + \kappa^2 (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\alpha^* \alpha) + (\zeta_1 \zeta_2 - \alpha^* \alpha)^2} \quad (4.77)$$

我们会发现以上四个结果中 $\langle a_1^+ a_1 \rangle$ 和 $\langle a_2^+ a_2 \rangle$ 与解海森堡方程得到的(4.62-63)相似，即 $\langle a_1^+ a_1 \rangle = \langle a_1^+ \rangle \langle a_1 \rangle$ ，说明主方程得到的光子数等价于振幅的平方。通过两种方法我们证明得到的结果在平均场近似下是正确的。

从(4.74-77)四个式子，我们发现当 $\alpha = 0$ 时， $\langle a_2^+ a_2 \rangle$ ， $\langle a_1^+ a_2 \rangle$ 和 $\langle a_2^+ a_1 \rangle$ 都等于零。其中 $\langle a_2^+ a_2 \rangle = 0$ 说明从腔 2 测不到频率为 ω_2 的光子数。那么 $\alpha = 0$ 的物理意义是什么呢？先从 α 说起

$$\alpha = \frac{g_1 g_2}{\Delta} \sum_i^K A_i^* \langle S_i^+ \rangle \quad (4.78)$$

它描述吸收频率为 ω_1 的一个光子放出 ω_2 ，同时 i 格点处于 $|1\rangle$ 态的原子被湮灭同时产生了处于状态为 $|2\rangle$ 的原子，它的逆过程就是 α^* 。 α 和 α^* 是两分量的原子在两模光作用下从而引发的原子间的转换 $1 \leftrightarrow 2$ 。所以在 $\alpha = 0$ 我们探测不到频率为 ω_2 的光子输出的稳定的信号。根据第一章两分量的介绍，选择简单情况--占据数为 1 的情况，腔里制备了两模光并且垂直于光晶格的轴线方向，所以只对应前边介绍的衍射极大的测量。

据绝缘态(4.33)和(4.34)，我们计算得到三种不同相 α 和 α^* 的期待值，如：

(1)反铁磁(AF) $\theta_A (\theta_B) = 0 (\pi)$ ， $\theta_B (\theta_A) = \pi (0)$

$$\alpha = \alpha^* = 0$$

(2)铁磁(FM) $\theta_A = \theta_B = 0$

$$\alpha = \alpha^* = 0$$

(3)XY 相 $\theta_A = \theta_B \neq 0$ (我们取 $\theta_A = \theta_B = \frac{\pi}{3}$)

$$\alpha = \exp(i\phi) \frac{g_1 g_2}{\Delta} K \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = \exp(i\phi) \frac{g_1 g_2 \sqrt{3}}{\Delta} K$$

根据超流态(4.35),

$$\alpha = \alpha^* = 0.$$

在两分量相图中几个特殊态中, 频率为 ω_2 的光子数只在绝缘态的 XY 相有输出。我们可通过频率为 ω_1 的光子数分布情况来区分这些原子态,

(i) $\alpha = \alpha^* = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\langle a_1^+ a_1 \rangle}{\eta^2 / \kappa^2} &= \frac{1}{\delta^2 / \kappa^2 (\kappa^2 + \zeta_1^2) / \delta^2} \\ &= \frac{1}{\delta^2 / \kappa^2 (\kappa^2 / \delta^2 + (\Delta_{1p} / \delta + n_1 K)^2)} \end{aligned} \quad (4.79)$$

(ii) $\alpha \neq 0$

$$\frac{\langle a_1^+ a_1 \rangle}{\eta^2 \kappa^2} = \frac{\left(\kappa^2 / \delta^2 + \left(\Delta_{2p} / \delta + \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle \right)^2 \right)}{(\eta^2 / \delta^2) \Xi} \quad (4.80)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi &= \kappa^4 / \delta^4 + \left(\left(\Delta_{1p} / \delta + \sum_i^K \langle n_{i1} \rangle \right) \left(\Delta_{2p} / \delta + \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle \right) - |\alpha|^2 / \delta^2 \right) \\ &\quad + \kappa^2 / \delta^2 \left[\left(\Delta_{1p} / \delta + \sum_i^K \langle n_{i1} \rangle \right)^2 + \left(\Delta_{2p} / \delta + \sum_i^K \langle n_{i2} \rangle \right)^2 + 2|\alpha|^2 / \delta^2 \right] \end{aligned}$$

假设 $g_1^2 / \Delta = g_2^2 / \Delta = g_1 g_2 / \Delta = \delta$, 参数 $\Delta_{2p} \approx \Delta_{1p}$, 分别讨论 $\kappa / \delta = 0.1$ 和 $\kappa / \delta = 1$ 两种情况下的光子数分布,

如图 4.9 所示, 因 $\delta > 0$, 透射光谱出现在 $\Delta_{1p} \leq 0$ 的区域, 换言之我们考虑了腔模频率大于原子跃迁频率 ($\Delta > 0$, 蓝失谐情况), 否之则反。从图中可以看出参数 $\kappa / \delta = 1$ 得到的曲线比 $\kappa / \delta = 0.1$ 得到的共振区域宽一些。超流态的峰值比绝缘的低一些。更明显的特征是在 $\kappa / \delta = 0.1$ 的情况下有许多洛伦兹线型。根据(4.79)超流态的输

出光谱依赖 $|1\rangle$ 态的原子数涨落，以及另一种原子的影响。因此它的透射谱 $|1\rangle$ 态原子所有可能的取值分布。

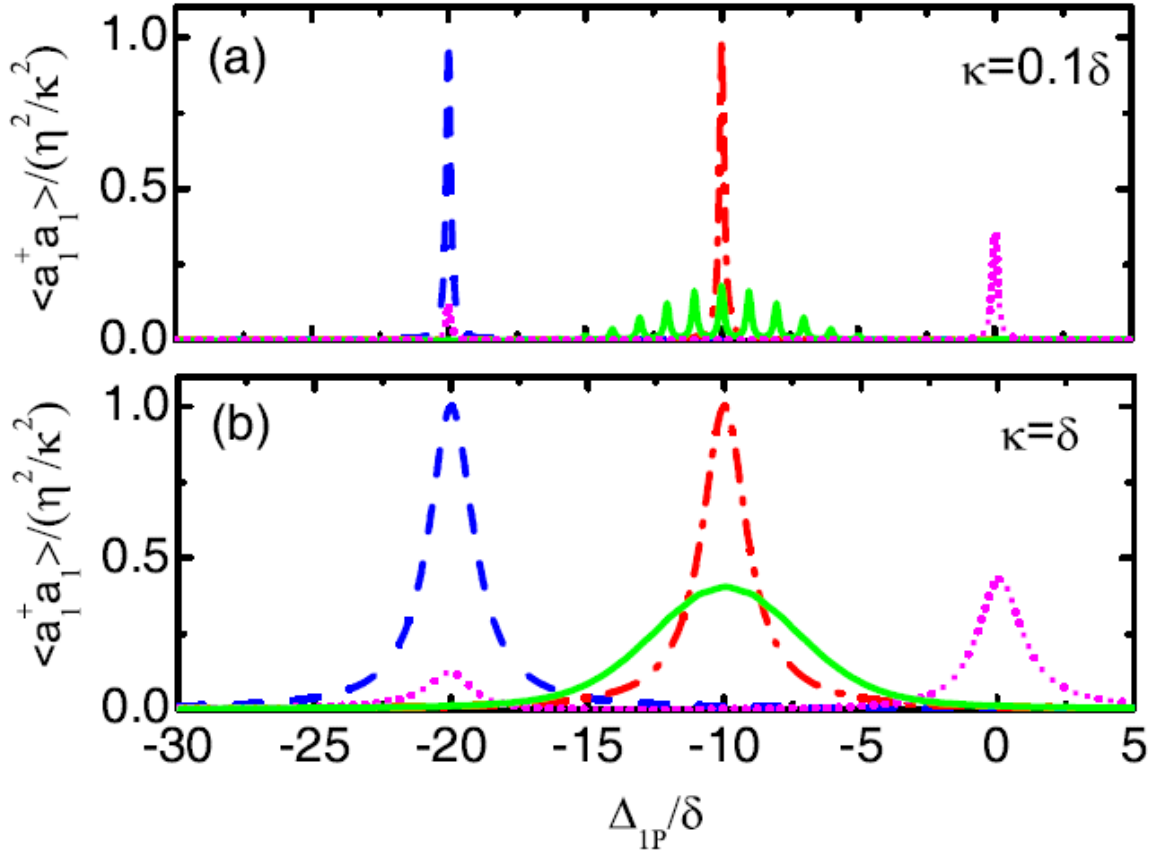


图 4.9 Cavity-1 的散射光子数的分布：蓝色的点线是描述铁磁的，红色的点虚线是反铁磁的。而黑色的实线是 XY 相的(有两个峰)，而绿色的实线是对应超流态的谱线。 $K = M / 2$ ， $M = N = 40$ ， $n_1 = n_2 = 1/2$ 。

综上所述，利用探测光来扫描光晶格中与两模光场耦合的两分量冷原子得到透射光谱，根据它们的差异来判断晶格中两分量原子的量子态，且目前实验技术的发展也支持我们这个方案的可行性，受激拉曼绝热过程和相干布局陷俘可在不改变两分量冷原子的布局的情况下做我们设计的探测工作。这为我们研究微观世界打开了新的一扇门，为我们实验上制备和操控晶格中的原子态以新的启示。

第三节 小结

本章主要介绍了目前利用腔探测光晶格中单分量玻色哈伯德模型的量子相变，着重于我们自己的工作——将其拓展到两分量相图研究上，利用相干布局陷阱以及受激拉曼绝热的性质巧妙将两分量玻色子与两模光结合，推导其哈密顿量以及通过研究透射谱分析其原子相图。首先利用半经典近似我们分析噪声来区分不同的相，然后介绍了全量子化的方法，进一步分析不同原子态对应不同的透射光谱。这为探索光晶格中两分量冷原子的相图提供了很好的理论工具。

参考文献

- [1] I. Bloch, *Nature Phys.* (2005) **1** 23.
- [2] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke and I. Bloch, *Nature* (2005) **434** 481.
- [3] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* (2004) **70**, 013603.
- [4] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* (2004) **92** 130403.
- [5] V. Gritsev, E. Altman, E. Demler, and A. Polkovnikov, *Nature Phys.* (2006) **2** 705.
- [6] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, C. I. Westbrook, *Science* (2005) **310** 648.
- [7] 苏红, 张为俊, 王世兴, 非理想强度差起伏量子非破坏性测量的实验方案. *光学学报*, 2001-7, 第21卷第7期857-860.
- [8] L. You, M. Lewenstein, and J. Cooper, *Phys. Rev. A* (1994) **50** R3565.
- [9] J. Javanainen, *Phys. Rev. Lett.* (1994) **72** 375.
- [10] L. You, M. Lewenstein, and J. Cooper, *Phys. Rev. A* (1995) **51** 4712.
- [11] J. Javanainen, and J. Ruostekoski, *Phys. Rev. A* (1995) **52** 3033.
- [12] A. S. Parkins, and D. F. Walls, *Phys. Rep.* (1998) **303** 1.
- [13] O. Morice, Y. Castin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. A* (1995) **51** 3896.
- [14] I. B. Mekhov, C. Maschler, and H. Ritsch, *Nature Phys.* (2007) **3** 319.
- [15] J. Gambetta, A. Blais, D. I. Schuster, A. Wallraff, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* (2006) **74** 042318.
- [16] G. K. Campbell, J. Mun, M. Boyd, P. Medley, A. E. Leanhardt, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Science* (2006) **313** 649.
- [17] F. Gerbier, S. Fölling, A. Widera, O. Mandel, and I. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* (2006) **96** 090401.
- [18] I. B. Mekhov, C. Maschler, H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* (2007) **98** 100402.
- [19] C. Maschler, I. B. Mekhov, H. Ritsch, *Eur. Phys. J. D* (2008) **46** 545.
- [20] P. Domokos and H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* (2002) **89** 253003.
- [21] A. Black, J. Thompson, and V. Vuletic, *J. Phys. B* (2005) **38** S605.

- [22] J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* (1994) **72** 2977.
- [23] Z. Idziaszek, K. Rzazewski, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. A* (2000) **61** 053608.
- [24] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press (1997).
- [25] M. Alexanian and S. K. Bose, *Phys. Rev. A* (1995) **52** 2218.
- [26] A. Isacsson, M. C. Cha, K. Sengupta and S. M. Girvin, *Phys. Rev. B* (2005) **72** 184507.
- [27] E. Altman, W. Hofstetter, E. Demler, and M. D. Lukin, *New J. Phys.* (2003) **5** 113.

总结与展望

基于目前光晶格中冷原子相变研究在理论和实验上两方面的重大进展，本论文主要研究光晶格中两分量冷原子量子相变问题，其主要结果如下：

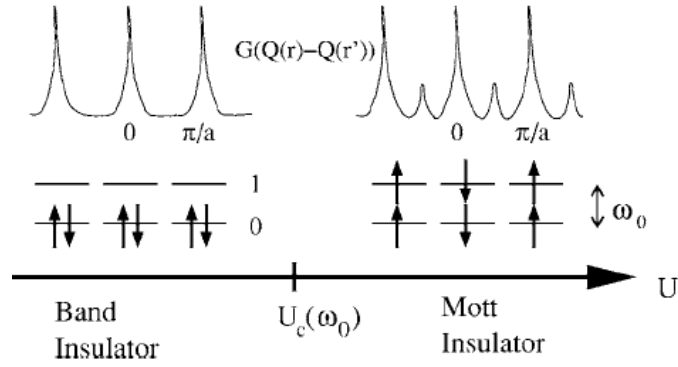
迄今为止，很多方法用来研究绝缘相两分量原子自旋相关的动力学，其结论成立条件是单带近似，即原子占据最低能带。如果调节 Feshbach 共振，可改变原子间相互作用强度，从而使原子有可能占据高能带。在第三章我们研究了两带近似下光晶格冷原子的相变问题。首先推导出该系统哈密顿量，研究绝缘区域的相变特性以及自旋的超交换性质，进一步研究了基态的相分离和超流特性。

其次，目前利用腔量子点动力学探测光晶格中单分量相变被广泛研究，而实验上通过三能级受激拉曼绝热通道可实现两分量冷原子，并且利用相干布局陷阱能确保两种原子粒子数在探测过程中不变，二者促使我们利用两模腔场与两分量原子耦合作用，从而实现探测光晶格中两分量冷原子相变模型的建立。在第四章我们详细介绍了模型的建立，系统哈密顿量以及在半经典近似下，我们通过量子涨落所引起噪声函数分布变化来探测晶格中两分量的原子态。接着在全量子理论下，由于两分量原子在不同量子态下自旋关联不同，腔的透射光谱呈现不同线型，帮助我们间接探测系统的原子态。这为我们研究光晶格两分量相变提供了很好的工具。

以上工作研究对象是两分量玻色子，随着多分量研究深入发展我们可转换研究对象，如费米子，高自旋玻色子；而且本论文研究了自旋对关联，我们接下来可以研究高阶关联。这些会为研究光晶格中冷原子系统的相变问题提供很好的前景。

附录 A：两带近似的哈伯德模型

实验上连续调节参数的可控性为我们研究俘获的超冷原子的强关联问题提供了不可预见的前景。光晶格中跃迁矩阵元 t 和同一格点的相互作用项 U 都依赖于光晶格的振幅 V_0 ，而振幅可通过调节形成光晶格的激光的强度可实现。最近实验上通过加一个合适的磁场接近 Feshbah 共振，可获得 U/t 很大的比值。而最近 Köhl 等人已经将 ^{40}K 的两个超精细态的原子以 50:50 的比例混合装载到了三维的光晶格中。初始在远离 Feshbah 共振的时候，每个格点放置的两个费米子在最低的布洛赫能带，此时格点间的隧穿很弱。因此系统的状态称作能带绝缘体。当打开磁场调节磁场增大原子间的相互作用 U 的值，当超过最低能带和第一激发的能带的带隙时，可测到有原子跳到上能带。



一维的光晶格中自旋为 $1/2$ 的费米子，在每个格点的占据数是 2，并且两种原子等比例混合，其哈密顿量是

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\sigma} \int_0^L dx \frac{1}{2M} [\partial_x \psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \partial_x \psi_{\sigma}(x)] \\
 & + \sum_{\sigma} \int_0^L dx (V_{0x} \sin^2 kx - \mu) \psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \psi_{\sigma}(x) \\
 & + \frac{g}{2} \int_0^L dx \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

将场算符 $\psi_{\sigma}(x)$ 按 Wannier 函数展开， $\psi_{\sigma}(x) = \sum_{\alpha=0,1} w_{i\alpha}(x) c_{i\sigma\alpha}$ 。其中的两个能带的 Wannier 函数是不同的

$$w_{i0}(x) = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2}{2a_0^2}\right) \tag{A.2}$$

$$w_{il}(x) = \frac{(-1)^i}{(\pi a_0^2)^{1/4}} \frac{\sqrt{2(x-x_i)}}{a_0} \exp\left(\frac{(x-x_i)^2}{2a_0^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

场算符的展开形式以及函数(A.2)和(A.3)代入(A.1)中，我们可获得二次量子化的哈密顿量的形式

$$H = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\sigma,i} -t_{\alpha\beta} c_{i+1\sigma\alpha}^+ c_{i\sigma\beta} + \text{H.c.} - \sum_{\alpha i\sigma} \mu_\alpha n_{i\sigma\alpha} \\ + \sum_{\alpha i} U_{\alpha\alpha} n_{i\uparrow\alpha} n_{i\downarrow\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta, i} U_{\alpha\beta} \left[n_{i\uparrow\alpha} n_{i\downarrow\beta} - S_{i\alpha}^+ S_{i\beta}^- + \Delta_{i\alpha}^+ \Delta_{i\beta} \right]$$

其中 $\alpha, \beta = 0, 1$ 是能带指标，分别对应[000]和[001]能带， $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 是自旋指标， i 是格点的指标；粒子数算符 $n_{i\sigma\alpha} = c_{i\sigma\alpha}^+ c_{i\sigma\alpha}$ ，自旋算符 $S_{i\alpha}^+ = c_{i\uparrow\alpha}^+ c_{i\downarrow\alpha}$ 和 $\Delta_{i\beta} = c_{i\downarrow\beta} c_{i\downarrow\beta}$ 。化学势的差 $\mu_0 - \mu_1 = \omega_0$ 是两带间的能量差。

通过(A.2)和(A.3)一些参量的关系可以得到，如 $U_{00} = c_{00}U$ ， $U_{01} = c_{01}U$ ， $U_{11} = c_{11}U$ ， $U = a_s k (4\bar{V}/E)^{3/4} / \sqrt{\pi}$ ，在强的相互作用的极限下，可认为 $t_{\alpha\beta} \ll \omega_0, U_{\alpha\beta}$ ，首先我们只考虑 $t_{\alpha\beta} = 0$ 的情况，很容易解出系统的能量本征方程：

$$E_+^{(t)} = -2\mu_0 + \omega_0, \quad |t_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow; \downarrow\rangle + |\downarrow; \uparrow\rangle)$$

$$E_-^{(t)} = -2\mu_0 + \omega_0 + 2U_{01}, \quad |t_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow; \downarrow\rangle - |\downarrow; \uparrow\rangle)$$

$$E_\pm^{(s)} = -2\mu_0 + \omega_0 + \frac{U_{00} + U_{11}}{2} \mp \left[\left(\frac{U_{11} - U_{00}}{2} + \omega_0 \right)^2 + U_{01}^2 \right]^{1/2}$$

$$|s+\rangle = a_1 |\uparrow\downarrow; 0\rangle + a_2 |0; \uparrow\downarrow\rangle, \quad |s-\rangle = a_2 |\uparrow\downarrow; 0\rangle - a_1 |0; \uparrow\downarrow\rangle$$

其间如 $|\uparrow; \downarrow\rangle$ ，最左边是能带 0 的粒子数占据的情况，与右边的能带 1 用分号隔开，

这个态是 0 能带占据了 1 个自旋 \uparrow 的粒子，而 1 能带占据了 \downarrow 的粒子。其中的系数

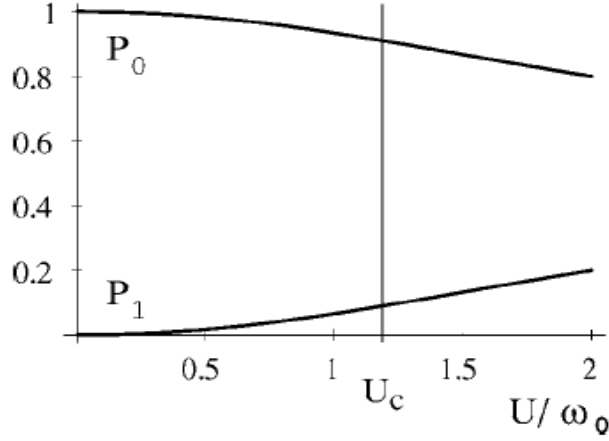
$$a_1 = - \left(\frac{U_{11}^c + \omega_0}{U\delta_0 + U_{11}^c} \right)^{1/2}, \quad a_2 = - \left(\frac{U_{00}^c - \omega_0}{U\delta_0 + U_{11}^c} \right)^{1/2}$$

满足归一化的条件 $a_1^2 + a_2^2 = 1$ 。其中参数 $c_{00} = 1, c_{01} = 1/2, c_{11} = 3/4$ 。当 $U_{\alpha\beta} > 0$ ，且

$U_{\alpha\beta} < U_{\alpha\beta}^c$ 时，最低的能量是 $E_+^{(s)}$ ，但是当 $U_{\alpha\beta} > U_{\alpha\beta}^c$ ，最小的能量是 $E_+^{(t)}$ 。这两个能

级在 $U = U_{\alpha\beta}^c$ 时相交，即 $E_+^{(s)} = E_+^{(t)}$ ，说明发生了相变。

另外我们看 $|s_+\rangle$ 由 $|\uparrow\downarrow, 0\rangle$ 和 $|0, \uparrow\downarrow\rangle$ 两个态叠加而成，几率分别是 $|a_1|^2$ 和 $|a_2|^2$ ，



P_0 和 P_1 分别是本征态 $|s_+\rangle$ 中两个粒子同时占据下能带和上能带的几率关系图。

当 $U < U_c$ 时， $|s_+\rangle$ 是系统的基态，以 $|\uparrow\downarrow, 0\rangle$ 为主，它的几率接近于 1。但是 $U \geq 2\omega_0$ 时，高能带开始被占据，基态变成 $|0\rangle \equiv |t_+\rangle$ 。另外 $|0\rangle$ ， $|U\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle$ 和 $|D\rangle = |\downarrow, \downarrow\rangle$ 是一个三重简并态。当原子间的相互作用逐渐调大时，如果没有格点间的跃迁， $|U\rangle$ 和 $|D\rangle$ 这样的态是不会出现的。当格点间的跃迁打开，并处于比较弱的情况下， $|U\rangle$ 和 $|D\rangle$ 出现。我们用微扰来证明，将跃迁作为微扰，可以得到有效的哈密顿量

$$H_{U>U_c} = J \sum (S_i S_{i+1} - 1)$$

其系数为

$$J = \frac{t_{00}^2}{U_{00} + U_{01}} + \frac{t_{11}^2}{U_{11} + U_{01}} + t_{01}^2 \left(\frac{1}{U_{00} + U_{01} - \omega_0} + \frac{1}{U_{11} + U_{01} + \omega_0} \right)$$

S 是自旋为 1 的算符。它对应的三个简并的态是 $|0\rangle$ ， $|U\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle$ 和 $|D\rangle = |\downarrow, \downarrow\rangle$ 。

附录 B 在特殊原子态的光谱线型

在本附录中对于单分量原子和光场作用的海森堡方程(4.5)

$$\dot{a}_l = -i(\omega_l + \delta_l \hat{D}_{ll})a_l - i\delta_m \hat{D}_{lm} a_m - \kappa a_l + \eta_l(t)$$

和两分量原子和两模光场作用的方程(4.58)

$$\dot{a}_1 = -\left[i\left(\Delta_{12} + \frac{g_1^2}{\Delta} \sum_{i=1}^K |u_1(\mathbf{r}_i)|^2 \hat{n}_i \right) + \kappa \right] a_1 - i \frac{g_1 g_2}{\Delta} a_2 \sum_{i=1}^K u_1^*(\mathbf{r}_i) u_2(\mathbf{r}_i) b_{i1}^+ b_{i2}$$

都允许我们将光学算符用原子占据数算符表示, 如 $f(\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_M)$, 并且在原子态 $|\psi\rangle$ 可求得期待值 $\langle f(\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_M) \rangle_\psi$ 。这里介绍单分量 MI 和 SF 态来借助与腔的耦合作用来探测。并且这种方法和思想在两分量的量子态的研究中又一次体现和应用。

从光学散射的角度出发, 对于可忽略隧穿的绝缘体束缚在 i 格点的原子数记作 $\langle \hat{n}_i \rangle_{\text{MI}} = q_i$, 由于没有粒子数的涨落, 它能够用 Fock 态的连乘来表示

$$|\psi\rangle_{\text{MI}} = \prod_{i=1}^M |q_i\rangle_i = |q_1, \dots, q_M\rangle \quad (\text{B.1})$$

因 $\hat{n}_i |q_1, \dots, q_M\rangle = q_i |q_1, \dots, q_M\rangle$, 光学算符期待值可表示成

$$\langle f(\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_M) \rangle_{\text{MI}} = f(q_1, \dots, q_M) \quad (\text{B.2})$$

一般绝缘态的每个格点的原子数是相等的, 并满足 $\langle \hat{n}_i \rangle_{\text{MI}} = N/M \equiv n$ ($\langle \hat{N}_K \rangle_{\text{MI}} = nK \equiv N_K$)。

而对于超流态来说每个原子在所有的格点是非局域的, 这就导致在 $K < M$ 的晶格区间粒子数存在涨落。原子态是 N 个粒子在 M 个格点对应所有可能分布的 Fock 态的叠加:

$$|\psi\rangle_{\text{SF}} = \sum_{q_1, \dots, q_M} \sqrt{N! / M^N} / \sqrt{q_1! \dots q_M!} |q_1, \dots, q_M\rangle \quad (\text{B.3})$$

尽管它的平均密度是 $\langle \hat{n}_i \rangle_{\text{SF}} = N/M$, 与 MI 态是一样的, 但探测到的光学算符期待值由不同的透射光谱叠加而成。光学算符的期待值可表示成

$$\langle f(\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_M) \rangle_{\text{SF}} = \frac{1}{M^N} \sum_{q_1, \dots, q_M} \frac{N!}{q_1! \dots q_M!} f(q_1, \dots, q_M) \quad (\text{B.4})$$

(B.4)表示所有可能的“经典”的求和。因此所有的这些分布对 SF 的散射都会有贡献。

它与绝缘相的(B.1)相比明显不同。

另外对于在超流态得到的光谱线形状做个简单的说明。如该附录前面所说光子数仅依赖一个统计量 q ，即腔照亮了的 K 个格点上的原子数。在此基础上(B.4)约化成二项式的形式。通过推导得出

$$\langle f \rangle_{\text{SF}} = \sum_{q=0}^N f(q) p_{\text{SF}}(q) \quad (\text{B.5})$$

其中 $p_{\text{SF}}(q) = N!/[q!(N-q)](Q/M)^q(1-Q/M)^{N-q}$ ，仅是对 q 的求和。这里的 Q 是特殊格点的数：单模场以及两模光场的衍射极大处， $Q = K$ ；而两模光场的衍射极小处， Q 取奇数或偶数，如当晶格总格点数 M 是偶数， $Q = M/2$ 。

接下来考虑在 $N, M \gg 1$ ，且 N/M 是个有限的值的情况下，这样会导致一个高斯分布 $p_{\text{SF}}(q) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma_q) \exp[-(q-\tilde{q})^2/2\sigma_q^2]$ ，其中 $\tilde{q} = NQ/M$ 和高斯分布的宽度是 $\sigma_q = \sqrt{N(Q/M)(1-Q/M)}$ 。

在一个 High-Q 腔中 $\kappa \ll \delta_0 = g^2/\Delta_{0a}$ ， $f(q)$ 是一个宽度为 κ ，且在依赖于 q 值的频率(称为 Δ_p^q)处出现的窄的洛伦兹线型。它的高度是不依赖 q 的大小，以 Δ_p 为变量的函数 $\langle f \rangle_{\text{SF}}$ 是振幅正比于 $p_{\text{SF}}(q)$ 的梳子状的洛伦兹分布。

利用高斯分布 $p_{\text{SF}}(q)$ ，能够写出这个“梳子”状的函数。例如一个单模的场(图 4.4 (a,c))，我们会发现 $\Delta_p^q \approx \delta_0 q$ ，光子数：

$$\langle a_0^+ a_0(\Delta_p^q) \rangle_{\text{SF}} = \frac{a\delta_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} e^{-(\Delta_p^q - \Delta_p)^2/2\sigma_\omega^2} \quad (\text{B.6})$$

其中心频率是 $\Delta_p = \delta_0 N_K$ ，谱的宽度是 $\sigma_\omega = \delta_0 \sqrt{N_K(1-K/M)}$ 和参数 $\alpha = |\eta_0|^2/\kappa^2$ 。所以在图 4.4 (a,c)中通过宽度依赖于格点数 K 的高斯线型来描述光谱的形状。

当 $K \rightarrow 0$ 和 $K \rightarrow M$ ，二次项的分布 $p_{\text{SF}}(q)$ 能够很好的通过泊松分布来近似。这在图 4.4 (c)中的 $K = 10$ 和 $K = 68$ 可以被证明。对于 $K = M$ 的情况，光谱缩减成一个洛伦兹线型，观测不到总粒子在 M 个格点发生的涨落。

在考虑有两腔场时，尽管会有一些其它参数，但前面的表达形式也是有效的。

在衍射极大处洛伦兹线型之间的中心频率及宽度都是以前的两倍：如 $\Delta_p = 2\delta_0 N_\kappa$ ， $\Delta_p^q = 2\delta_0 q$ 和 $\sigma_\omega = 2\delta_0 \sqrt{N_\kappa(1-K/M)}$ ， $\alpha = |\eta_0|^2 / (2\kappa^2)$ 。在 $\Delta_p = 0$ 处出现的伴峰有一个经典的振幅 $|\eta_0|^2 / (4\kappa^2)$ 。

对于bad腔，如 $\kappa \gg \delta_0$ ，参数 Δ_p 和 σ_ω 可如前面一样，求和能够用积分代替。对于单模，如图4.4 (b)所示，代表了一个福格特曲线(Voigt contour)

$$\langle a_0^+ a_0(\Delta_p) \rangle_{\text{SF}} = \frac{|\eta_0|^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \int_0^\infty \frac{e^{-(\Delta_p - \omega)^2 / 2\sigma_\omega^2} d\omega}{(\Delta_p - \omega)^2 + \kappa^2} \quad (\text{B.7})$$

在考虑有两个腔，且在衍射极小处探测到透射光子数

$$\langle a_1^+ a_1 \rangle_{\text{SF}} = \frac{|\eta_0|^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega^2 e^{-\omega^2 / 2\sigma_\omega^2} d\omega}{(\Delta_p'^2 - \omega^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \Delta_p'^2} \quad (\text{B.8})$$

其中 $\Delta_p' = \Delta_p - \tilde{\Delta}_p$ 。然而在衍射极大，光子数等于

$$\langle a_1^+ a_1 \rangle_{\text{SF}} = \frac{|\eta_0|^2}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \int_0^\infty \frac{\omega^2 e^{-(\omega - \tilde{\Delta}_p)^2 / 2\sigma_\omega^2} d\omega}{\left[\Delta_p (\Delta_p - \omega) + \kappa^2 \right]^2 + \kappa^2 \omega^2} \quad (\text{B.9})$$

攻读博士期间已发表论文和待发表的论文

- [1] **Liping Guo**, Yunbo Zhang, Shu Chen, Ground-state competition of two-component bosons in optical lattice near a Feshbach resonance, Phys. Rev. A **75** 013622(6) (2007). cond-mat/0609219 (SCI).
- [2] **Liping Guo**, Shu Chen, B. Frigan, L. You , Yunbo Zhang, Cavity-enhanced detection of magnetic orders in lattice spin models , Phys. Rev. A. **79** 013630 (2009) (SCI).
- [3] **Liping Guo**, Lei Du and Yunbo Zhang, Probing quantum phases of two-component ultra-cold atoms in optical lattices by transmission spectra in cavity quantum electrodynamics, submitted to Eur. Phys. J. D (SCI).
- [4] 郭利平, 张云波, 陈澍, 光晶格中两分量的玻色原子在 Feshbach 共振附近基态转变, 第十四届全国凝聚态理论与统计物理学术会议, **179** (2006)。

致 谢

六年的求学生涯即将告一段落，我顺利完成了硕士和博士阶段的学习与工作。学习期间，理论所浓厚的科研氛围和良好的工作环境，导师们兢兢业业、献身科学的精神在我心中留下了深刻的印象。六年的寒窗生涯充满了探索的艰辛与惆怅，也包含着成功的喜悦与感动。所有这些，都将成为我人生最宝贵的财富。

值此论文完成之际，首先要感谢我的导师张云波教授，在他的指导和辛勤培养下，使我逐步走进并适应紧张的科研氛围，为我顺利完成学业奠定了基础。无论在学业还是生活上张老师都给予我关心和帮助。而他对科学研究孜孜不倦的探索精神、敏锐的洞察力、严谨的治学态度更使我受益匪浅。

感谢中国科学院物理研究所陈澍老师对我的无私帮助和勉励。陈老师给予了许多具体的指导，进行过许多有益的讨论。我能够顺利完成学业也凝结着他的一份心血！

感谢梁九卿教授、李卫东教授、尤力教授，在与他们有益的讨论中，我学到了很多知识；感谢刘文森教授、李德明教授、李秀平教授以及郜江瑞院长、裴建文书记、尹王保副院长、聂一行副院长等物电学院的老前辈和领导对我工作、学习和生活方面给予的关怀；感谢李录教授、李志坚教授、梁军军副教授、高迎芳副教授、谷娟副教授等老师的关心和帮助。

感谢我的爱人杜磊一直以来对我的鼓励与肯定；感谢郝亚江、程茸、贾新娟、尹相国、张静、贾欣燕、冯志芳、张永平、费宏明、叶成芝、薛瑞、陈刚、李军奇、张存喜、徐卫平、杨利民、史慧贤、王利、王瑞、王建明、罗小兵、张杰、王红梅、陈刚、于慧、张彦伟、梁成功、蔚晓红、吕晓龙、薛海兵、刘润琴、孔晋芳、郭红丽、陈星、韩艳良等学友的无私帮助和友好合作，是大家的共同努力，创造了理论所良好的学习环境。

感谢我挚爱的亲人们，谢谢你们多年来的关怀、理解和无尽的爱。

感谢我生活了十一年的母校，我永远的精神家园！

郭利平

2009年5月于山西大学理论物理研究所

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

学位论文作者(签章)：

2009年5月28日