

山 西 大 学

2010 届硕士研究生学位论文

Λ 型冷原子气体与光学腔模的耦合系统

作者姓名	蔚小红
指导教师	张云波 教授
学科专业	理论物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2007年9月—2010年6月

二〇一〇年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2010

**The coupling of the Λ -type cold atoms
with cavity**

Student Name	Xiaohong Yu
Supervisor	Professor Yunbo Zhang
Major	Theoretical Physics
Specialty	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2007.9—2010.6

June, 2010

目 录

中文摘要	I
ABSTRACT	II
第一章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 光和原子相互作用	3
1.3 受激拉曼绝热通道	5
第二章 热库理论和朗之万方程	8
2.1 热库理论	8
2.2 朗之万方程	8
2.2.1 经典朗之万方程	8
2.2.2 量子朗之万方程	9
第三章 二能级原子和光学腔模的耦合系统	15
3.1 单个二能级原子和腔模耦合	15
3.2 多个二能级原子与腔模耦合	16
第四章 Λ 型三能级原子与光学腔模的耦合系统	20
4.1 单个 Λ 型三能级原子和腔模的耦合	20
4.2 两分量玻色-哈伯德模型与腔模耦合系统	23
第五章 总结与展望	27
参考文献	28
攻读学位期间取得的研究成果	31
致 谢	32
个人简况及联系方式	33
承 诺 书	34
学位论文使用授权声明	35

CONTENTS

Chinese Abstract	I
Abstract	II
I Introduction	1
1.1 Overview.....	1
1.2 Atom-field interaction.....	3
1.3 Stimulated Raman adiabatic passage (STIRAP).....	5
II Heat bath and Langevin equation	8
2.1 Heat bath.....	8
2.2 Langevin equation.....	8
2.2.1 Classical Langevin equation.....	8
2.2.2 Quantum Langevin equation.....	9
III Coupling between two-level cold atoms and cavity mode	15
3.1 Single atom in a cavity.....	15
3.2 Many-body dynamics of atoms in a cavity.....	16
IV Λ type cold atom coupling to cavity modes	20
4.1 Coupling of single Λ -type atom with two cavity modes.....	20
4.2 Two-Component Bose-Hubbard model in optical cavities.....	23
V Conclusions and prospects	27
References	28
Publication	31
Acknowledgements	32
Personal profiles	33
Letter of commitment	34
Authorization statement	35

中文摘要

最近冷原子气体与光学微腔的耦合系统引起了较多的关注，Ritsch 和 Larson 等小组研究了光学腔模与二能级原子气体的耦合系统，他们发现该耦合系统呈现出更加丰富的量子相图。本文首先介绍了光和原子的相互作用的理论模型和受激拉曼绝热通道，接着介绍了研究腔模与原子相互作用这个开放系统时主要采用的热库理论的基本知识和朗之万方程。在此基础上我们从光学腔模与二能级原子气体的耦合系统出发，主要研究囚禁于远离共振的光势阱中的 Λ 型三能级冷原子气体与腔模相互作用的耦合系统。通过分析系统中腔场算符和原子场算符的朗之万方程，在大失谐的条件下，绝热消除原子最高能级上的粒子布居数，得到该系统的有效哈密顿量。从该耦合系统的有效哈密顿量可以看出，该系统可以用来模拟两分量玻色子与腔模耦合的系统。系统有效哈密顿量的导出为研究其相变问题、动力学问题等理论基础问题奠定了基础。

关键词：光场和原子相互作用；受激拉曼绝热通道；朗之万方程；绝热消除；有效哈密顿量

ABSTRACT

The coupling system of two-level cold atomic gas with optical cavity has drawn lots of attentions both theoretically and experimentally. It is found that there exhibit much more interesting features in the quantum phase diagram. In this thesis, we briefly introduce the theoretical model of atom-field interaction and the stimulated Raman adiabatic passage. Then we describe heat bath theory and Langevin equation which can be used to study the open system of atoms coupling to the cavity modes. Starting from the system of coupling system of two-level cold atomic gases with single cavity mode, we study the system of Λ -type three-level cold atomic gases interacting with two cavity modes. Under the condition of large detuning, detailed analysis of the Langevin equation of cavity field operator and atomic field operator enables us to adiabatically eliminate the atomic particles on the upper level, and obtain the effective Hamiltonian of the system, which may be used to simulate the phase transition and the dynamics of two-component Bose-Hubbard model in two cavity modes.

Key words: Atom-field interaction; Stimulated Raman adiabatic passage; Langevin equation; Adiabatic elimination.

第一章 绪论

1.1 引言

20 世纪 80 年代激光冷却和中性原子捕获技术取得了重大进展，成为原子分子与光物理领域一个重要的突破口。作为这个大领域的最热门方向之一，激光冷却技术冷原子物理领域曾在 8 年内诞生了三次诺贝尔物理学奖。1997 年朱棣文(S.Chu)、科恩-塔诺季(C.Cohen-Tannoudji)和菲利普斯(W.D.Phillips)由于发明用激光冷却和捕获原子的方法获得了诺贝尔物理学奖。2001 年维曼(C.E.Wieman)、康乃尔(E.Cornell)和凯特利(W. Ketterle)利用激光冷却技术获得玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)获得诺贝尔物理学奖。2005 年因量子光学基本理论和发明光梳而实现了光谱精密测量和光频标而获奖的 R. Glauber、J. Hall 和 T. Hansch，也与激光冷却原子有密切关系。

激光冷却和陷俘原子技术还打开了通向研究低温下气体的量子物理行为的大门，开辟了冷原子物理研究的新篇章。从热力学和分子运动论我们知道，符合玻尔兹曼速度分布的气体，温度与粒子运动速度的平方平均值成正比。激光冷却和陷俘原子技术可以将原子囚禁到几乎静止不动的状态，也就是可以将原子冷却到极低温的状态。随着实验条件的不断改善和技术的不断成熟，现在的实验手段已经可以将原子冷却到 nK 甚至达到 pK 数量级。

冷原子具有许多特性^[1]：(1)动能小，可用弱场(如磁场梯度、光场)在微观尺度上来操控单个原子或分子。我们可以用激光俘获多个单原子再将它们组合成新的分子或凝聚态物质。(2)原子的德布罗意波长较大，相干长度很长，原子物质波波动性明显，能够在宏观尺度上观测到相干现象。例如当大量碱金属原子被冷却到最低能态上可以产生玻色-爱因斯坦凝聚，处于最低能态上的原子会发生物质波干涉。(3)热运动较小，原子间的碰撞几率远远少于热原子的情况，光谱一级和二级多普勒加宽很小。冷原子具有更精确的原子能级结构和更窄的跃迁光谱，这对原子能级以及各种常数的精确测量具有重要意义。(4)囚禁的冷原子速度低，和光相互作用时间较长，可以作为量子信息存储器，将量子信息存储在原子能态上。冷却在基态的原子是干净可靠的纯量子体系，用冷原子进行量子信息处理的前景越来越广阔。冷原子物理研究还提供了形成高新技术的潜在可能性，如用原子光

学实现纳米加工、原子刻蚀、原子干涉仪、原子钟、原子激光器、量子计算机等。

20世纪90年代,利用光晶格来束缚冷原子的技术已相当成熟。根据交流斯塔克效应,利用激光驻波场中原子感应的偶极力能将中性冷原子囚禁在波长尺度的范围内^[2]。将冷原子装载于多束激光相互干涉形成的周期性网状势阱即光晶格中,可实现冷原子的一维、二维或三维微光学囚禁,从而形成冷原子的空间周期性排列。当激光频率相对原子共振频率是红失谐时,原子将被俘获在光学晶格的最大光势处即驻波场的波腹处;反之,当激光频率为蓝失谐时,原子将被囚禁在驻波场的波节处^[3]。

利用光晶格来束缚冷原子技术的发展掀起了光学晶格中冷原子研究的高潮。因为光晶格空间的周期性排列,原子在光晶格中的运动类似于电子在固体晶格格中的运动。通过研究光晶格中的原子^[4,5]可以来研究固体中都很难观察到的一些效应。通过改变激光场的强度可以调节光晶格的晶格常数,进而调节势阱深度以及原子之间的相互作用。M. P. A. Fisher^[6]和D. Jaksch^[7]等人采用玻色-哈伯德模型在理论上论证了光晶格中单分量冷原子从绝缘态到超流态的相变^[5]。2002年德国研究小组Greiner等人首次在实验上观察到玻色爱因斯坦凝聚体在光晶格中从超流态到Mott绝缘态的量子相变现象^[8]。

束缚在光晶格中冷原子的原子存在不可控的自发辐射。光学微腔可以使原子的自发辐射得到抑制或增强^[9,10],同时可以调节光学腔模和原子的耦合强度。在一个有少量光子数的高品质光学腔^[11,12]中, Kimble小组^[13]和Remppe^[14]小组在实验上实现了光学腔中单个中性冷原子的囚禁与操控。2007年多个实验小组成功将BEC置于光学腔中^[15-18], F. Brennecke小组实现了BEC与超高精细光学腔场之间的强耦合^[17],在强耦合区域可以将BEC与腔模的耦合视为力学谐振子与腔模的耦合^[25]。耦合系统中存在自组织行为,即光学腔模的分布决定了冷原子气体的分布,原子的分布反过来又影响腔模的分布^[19-24];系统中腔场和凝聚体的分布还随时间演化^[26,27]。Ritsch和Larson等人研究了光学腔中二能级冷原子气体与腔模耦合系统的相变行为以及动力学^[28-31],他们发现该耦合系统的量子相图更加丰富。

本文第一章主要介绍了光和原子相互作用的四个理论模型和受激拉曼绝热通道。在第二章中,我们介绍讨论开放系统问题时经常采用的热库理论和朗之万方程。在第三章分别导出了光学腔模与单个和多个二能级原子的耦合系统有效哈

密顿量。基于前两章的基础上，第四章我们研究了单个和多个 Λ 型三能级冷原子与腔模的耦合系统，并推导出了该系统的有效哈密顿量，发现它与两分量玻色气体与腔耦合的多体系统相对应。

1.2 光和原子相互作用

下面考虑光和原子的相互作用的理论模型，主要以二能级原子为例来介绍。我们知道，单模光场和单个二能级原子相互作用的理论模型有 Rabi 模型^[32]和 Jaynes-Cummings(JC)模型^[33]，研究光场和多个二能级原子相互作用的理论模型还有 Dicke 模型^[34]和 Tavis-Cummings(TC)模型^[35,36]。Rabi 模型和 Dicke 模型是半经典模型，其中光场是经典近似场；JC 模型和 TC 模型是全量子模型，光场是量子化的。

Rabi 模型中，系统的哈密顿量包含原子的能量和光与原子相互作用部分的能量，原子采用量子化描述，光场是经典近似场，光和原子的相互作用项的描述采用了偶极近似。系统哈密顿量的本征态由原子基态和激发态的叠加表示。通过求解系统的薛定谔方程，我们会发现在光的频率和原子的偶极跃迁频率相同时，原子的粒子数反转率为 $W(t) = \cos(\Omega_R t)$ ，如图 1.1 所示，其中 Ω_R 为 Rabi 频率。原子在基态和激发态之间以频率 Ω_R 振荡。

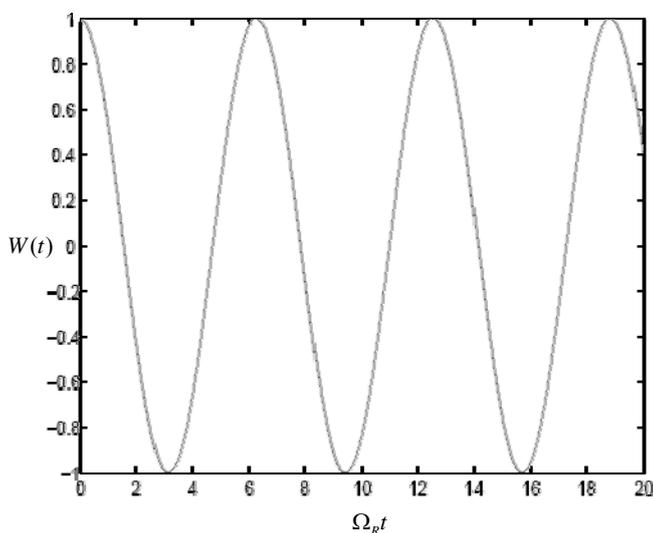


图 1.1 原子反转率随着 $\Omega_R t$ 变化曲线^[32]

JC 模型中，系统的哈密顿量中包含原子的能量、光场的能量和光与原子相互作用部分的能量三部分，原子和光场都采用量子化描述，光和原子的相互作用项采用了偶极近似和旋波近似。在相互作用绘景下求解系统本征态算符的运动方

程，我们会发现在光的频率和原子的偶极跃迁频率相同时，原子的粒子数反转率为 $W(t) = \sum_{n=0} \rho_{nn}(0) \cos(\Omega_n t)$ ，其中 Ω_n 为量子 Rabi 频率， $\rho_{nn}(0)$ 为 $t=0$ 时刻系统中的光子数。如图 1.2 所示，原子的粒子数反转率出现了“崩塌”和“复原”现象，而且随着时间的推移交替出现。随着时间的推移，Rabi 振荡的幅度逐渐减小。我们可以看到即使是真空场也会出现 Rabi 振荡，与半经典理论得到的结果是不同的。在半经典理论中，处于激发态的原子在没有外驱动场的情况下是不能跃迁到低能级的。而在这种全量子理论中，自发辐射使得真空中原子从上能级到下能级的跃迁成为了可能。

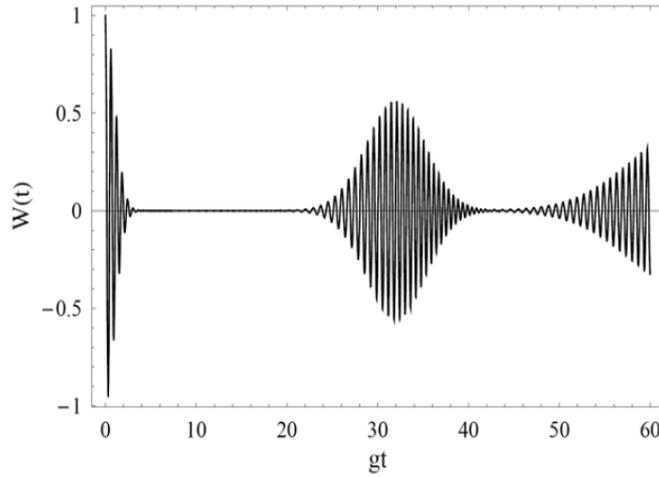


图 1.2 原子反转率随着 gt 变化曲线：初始光场为相干态。参数 $\Delta = 0$ ， $\langle n \rangle = 25$ [33]。

1954 年，Dicke 在理论上预言了在分子或原子中 Dicke 超辐射的发光机制。他认为在分子气体与光场的耦合系统中，应将分子气体视为一个量子系统来研究。可以假设分子之间为弱相互作用，分子气体相对集中，且气体的尺度远小于光场的波长。在上述假设的前提下，系统的哈密顿量中分子可以采用赝自旋算符来描述，分子和光的相互作用项采用半经典描述即光场为经典近似场。采用一阶微扰理论，我们会发现当分子气体的“合作数”为分子个数的一半，在高低能级上的分子气体粒子数相等时，自发辐射率达到最大，从而实现 Dicke 超辐射。

关于原子气体和光场的耦合问题，1968 年 Tavis-Cummings 给出了精确解。全同的二能级原子组成的原子气体与光场的耦合系统中，原子气体采用赝自旋算符来描述，光场为量子化的单模光。精确解的给出同时也为在其他近似下求出的

解提供了一个对照的标准。

1.3 受激拉曼绝热通道

Kimble小组^[13]和Rempe^[14]小组通过受激拉曼绝热通道技术在实验上实现了光学腔中单个中性冷原子的囚禁与操控。最近, J. G. Danzl小组采用四光子的受激拉曼过程将Cs原子形成的BEC转移到振转基态上, 为实现基态分子的BEC奠定了基础, 图 1.3 为分子量子气体的制备过程。他们从零温下双占据的原子气体的Mott绝缘态出发, 通过Feshbach共振将这些原子有效缔合为弱束缚的二聚体分子, 然后采用四光子的受激拉曼过程将其转移到振转基态上。

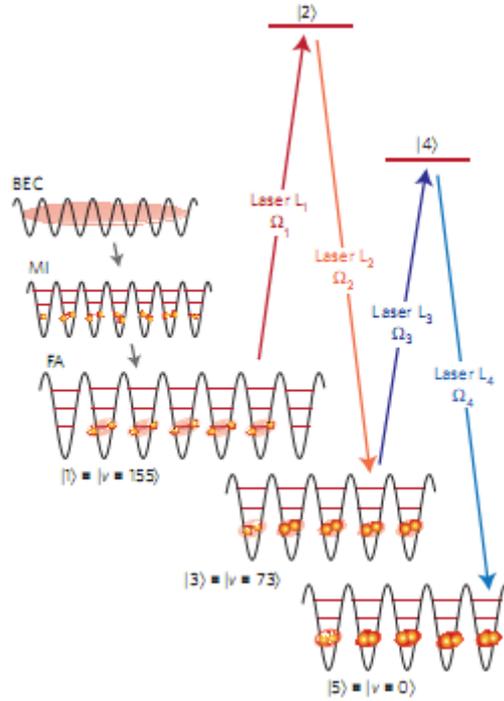


图 1.3 分子量子气体的制备过程。一团Cs原子形成的BEC制备在光晶格中, 通过增加晶格势的深度, 使原子气体处于Mott绝缘态, 并且每个光晶格中有两个原子。随后采用Feshbach共振将原子有效缔合为弱束缚的二聚体分子, 使其处于态 $|1\rangle$ 上。采用Rabi频率分别为 $\Omega_i, i=1,2,3,4$ 的四束激光, 将处于态 $|1\rangle$ 上的二聚体分子采用受激拉曼过程经过中间态 $|2\rangle, |3\rangle$ 和 $|4\rangle$ 转移到振转基态 $|5\rangle$ 上^[37]。

在这里我们以单个 Λ 型冷原子与两模光场相互作用的系统为例详细介绍受激拉曼绝热通道的过程。其中 Λ 型原子具有非简并能级 $E_i = \hbar\omega_i, i=1,2,3$, 对应本征态 $|1\rangle, |2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 。 $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 的跃迁过程通过频率为 ω_E 的经典场 \vec{E} 耦合, $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 通过腔模 ω 耦合。单个 Λ 型冷原子和两模光场耦合系统的哈密顿量^[38]为

$$H_{\Lambda} = E_1\sigma_{11} + E_2\sigma_{22} + E_3\sigma_{33} - \hbar\Omega_p(\sigma_{13}e^{-i\omega_E t} + \sigma_{31}e^{i\omega_E t}) + \hbar g(\sigma_{32}a + a^+\sigma_{23}) \quad (1.1)$$

(1.16)式中仅包含原子能量的哈密顿量和原子与经典光场 \bar{E} 和腔模 ω 相互作用的哈密顿量，暂不考虑光场和腔模的哈密顿量。原子算符为 $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ 。原子与经典光场 \bar{E} 相互作用的偶极跃迁频率为 Ω_p ，原子与腔模的耦合常数为 g 。

旋转到经典场 ω_E 和腔模 ω 的框架下，哈密顿量(1.16)式变为

$$H_{\Lambda} = -\hbar\Delta_1\sigma_{33} - \hbar(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22} - \hbar\Omega_p(\sigma_{13} + \sigma_{31}) + \hbar g(\sigma_{32}a + \sigma_{23}a^+) \quad (1.2)$$

其中 $\Delta_1 = \omega_E - (\omega_3 - \omega_1)$ 为经典光场与原子 $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 的失谐量， $\Delta_2 = \omega - (\omega_3 - \omega_2)$ 为腔模与原子 $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 的失谐量。

下面考虑该哈密顿量(1.17)的本征态。假设原子最初制备在 $|1,0\rangle$ 上，系统的本征态可以表示为

$$|\psi(t)\rangle = c_{1,0}(t)|1,0\rangle + c_{2,0}(t)|2,1\rangle + c_{3,0}(t)|3,0\rangle \quad (1.3)$$

$|i,0\rangle = |i\rangle|0\rangle$ 表示原子处在第 i 个能级上，光子数为 0。在拉曼共振 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ 的条件下，系统的哈密顿量可以写为矩阵的形式

$$H_{\Lambda} = -\hbar \begin{bmatrix} 0 & \Omega_p & 0 \\ \Omega_p & \Delta & -g \\ 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

可以求得本征值为 $\lambda_0 = 0$ 时对应的本征态为暗态 $|D\rangle$ ，

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_0}} [g|1,0\rangle + \Omega_p|2,1\rangle] \quad (1.5)$$

其中 $N_0 = g^2 + \Omega_p^2$ 。本征值为 $\lambda_{\pm} = -\frac{\Delta}{2} \pm \bar{\Omega}$ 时对应的本征态为明态 $|B_{\pm}\rangle$

$$|B_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{\pm}}} [\Omega_p|1,0\rangle - \lambda_{\pm}|3,0\rangle - g|2,1\rangle] \quad (1.6)$$

其中 $\bar{\Omega} = \sqrt{\Omega_p^2 + g^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}$ ， $N_{\pm} = N_0 + \lambda_{\pm}^2$ 。

当 $\Omega_p = 0$ ，暗态 $|D\rangle$ 中只包含初始态 $|1,0\rangle$ ；当 $\Omega_p \gg g$ 时，暗态更接近于 $|2,1\rangle$ ，腔中只有一个单光子。我们知道暗态中不包含 $|3,0\rangle$ ，没有原子从 $|3\rangle$ 上的自发辐

射。因此通过绝热改变经典场的Rabi频率 Ω_p ，从初始时刻 $\Omega_p \ll g$ 到 $\Omega_p > g$ 时，便出现了从 $|1,0\rangle$ 到 $|2,1\rangle$ 的受激拉曼绝热通道。至此，我们清楚的解释了受激拉曼绝热通道的过程。

第二章 热库理论和朗之万方程

在绪论中，我们分别介绍了光和原子相互作用的四个理论模型和受激拉曼绝热通道。置于光学腔中的冷原子与腔模的耦合系统是一个开放系统。本章我们主要介绍处理开放系统时采用的热库理论和朗之万方程。

2.1 热库理论

在量子光学中，经常出现一个小系统和一个大系统的耦合。这个小系统有少数个自由度或者有少数几个本征态，而大系统原则上有很多个自由度或者有无限多个本征态。这个小系统常作为一个系统来研究，这个大系统常视为热库，小系统和大系统的耦合视为系统和热库的耦合。理论上，光场、原子或光场与原子的耦合系统都可以看作系统，而将与这个系统产生非相干作用的其余部分视为热库。

系统和热库之间存在相互作用，可以交换能量。考虑一个原子置于辐射场中的情况，将原子视为系统，辐射场视为热库。原子自发辐射的荧光会对辐射场有影响，同时辐射场会使原子从激发态跃迁到更低的能态上，使原子系统出现耗散和涨落，即使在零温也会有真空涨落存在。

处理热库和系统的耦合，通常可采用两种方法^[39]：一是在相互作用绘景或薛定谔绘景中，通过对系统和热库整个体系的密度算符求迹将热库的变量消去，得出系统约化密度算符的主方程，最后求解主方程；二是在海森堡绘景中采用噪声算符来描述热库的作用，然后将热库的作用转变为随机力引入系统的朗之万方程，最后求解朗之万方程。

2.2 朗之万方程

这里我们研究的就是采用朗之万方程来处理原子气体和腔模的耦合系统。下面先简单介绍一下朗之万方程。朗之万方程有经典朗之万方程和量子朗之万方程两种。

2.2.1 经典朗之万方程

液体中悬浮微粒不停做无规则运动的现象叫做布朗运动。布朗运动是典型的随机过程，它可以作为经典小系统和热库耦合的例子，可以用经典的朗之万方程

来描述。为简单起见，只考虑微粒的一维运动。设微粒的质量为 m ，在 t 时刻的速度为 $v(t)$ ，根据牛顿第二定律，微粒的运动方程^[39]为

$$m \frac{dv}{dt} = K(t) \quad (2.1)$$

其中 $K(t)$ 由两部分构成：一部分为粘滞阻力 $-\alpha_0 v$ ，当微粒以速度 v 运动时，微粒在前进方向上与液体分子相碰撞，将受到与其速度方向相反的粘滞阻力；另一部分是随机的冲击力 $F_0(t)$ ，即液体分子对静止的微粒的碰撞净作用力。由于在正方向和负方向碰撞的平均频率相同，故 $\langle F_0(t) \rangle = 0$ 。假定不同时刻随机力之间的关联函数具有如下特性 $\langle F_0(t) F_0(t') \rangle = c \delta(t-t')$ ， c 为冲击强度的量度。令 $\alpha = \alpha_0/m$ ， $F(t) = F_0(t)/m$ ，微粒的运动方程可以表示为

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v + F(t) \quad (2.2)$$

此式为经典朗之万方程。

$F(t)$ 为朗之万随机力，满足如下性质：

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (2.3)$$

$$\langle F(t) F(t') \rangle = Q \delta(t-t') \quad (2.4)$$

式(2.4)称为马尔科夫近似， Q 是起伏强度的量度。

2.2.2 量子朗之万方程

在量子光学中，不同的系统有不同的热库，不同的热库之间是彼此独立的。对量子光场而言，周围吸收或散射的介质、光学腔或黑体辐射等构成了光热的热库。对于原子系统而言，原子间碰撞、原子的自发辐射，非相干的泵浦过程等可视为原子的热库。

通常可将电磁场假设为热库，或者直接假设一系列的谐振子为热库。这一系列的谐振子必须具有以下特性^[40]：

1. 谐振子的频率谱必须平稳、密集。
2. 在系统和热库的耦合中，谐振子算符必须是线性的。
3. 系统和热库的耦合常数必须是谐振子频率的函数。

考虑某个体系中，作为热库的电磁场与某个系统耦合的情况。例如在整个体

系中，原子是系统，电磁场是热库，并且电磁场满足以上特性。对于原子来说，有两种场模，输入模和输出模。电磁场输入模携带能量，与原子发生耦合，通过影响原子的运动使原子发生耗散来交换能量，再由输出模带走能量。输入模包括以下三个部分。首先，有信号输入系统，信号即由激光或某个光源产生的光。其次，输入信号的同时伴随有噪声输入。噪声可以是激光的波动引起的涨落，也可以是其他光源的随机效应。最后，还包括真空噪声的输入。量子场的真空态是指在这个态下光场的涨落是非零的，即使在没有光源的情况下也存在真空噪声。在真空的情况下，会有真空噪声进入原子系统，耦合之后再由相应的噪声输出。从数学上看，真空噪声的效应就是确保在朗之万方程中出现驱动项和阻尼项，从而保证量子力学中基本算符之间对易关系的成立。

上述讨论电磁场作为热库的情况，包括谐振子必须具备的特性，以及谐振子在与系统的耦合的具体过程。下面介绍以谐振子为热库的朗之万方程的具体导出。主要从热库的形式上出发讨论两种情况，先讨论热库由一系列频率相近的离散谐振子组成，然后讨论热库由连续频率的谐振子组成的情况。

首先，热库由质量为 m_n 、坐标为 q_n 、动量为 p_n 和弹性系数为 k_n 的 n 个谐振子组成，谐振子热库的哈密顿量可以表示为 $H_B = \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{k_n q_n^2}{2} \right\}$ 。系统的哈密顿量为 $H_{\text{sys}}(Z)$ ，其中 Z 算符是系统的任意变量算符之一。系统和热库耦合之后，整个体系的哈密顿量可以表示为

$$H = H_{\text{sys}}(Z) + \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{k_n}{2} (q_n - X)^2 \right\} \quad (2.5)$$

其中算符 X 是系统任意变量算符 Z 中的一个特殊算符。系统和热库的相互作用使热库中的势能项不仅依赖于热库 q_n ，还依赖于系统算符 X 。热库的势能项中多出两项， $\frac{1}{2} \sum_n k_n X^2$ 仅包含系统算符，可以被吸收到系统算符中；可以把 $-\sum_n k_n q_n X$ 视为系统和热库的相互作用。系统和热库的耦合项中，热库算符是线性的。朗之万方程中通常是线性耦合，非线性耦合问题可以用主方程的方法来解决。对式(2.5)进行一系列正则变换，

$$\begin{aligned}
q_n &\rightarrow p_n/\sqrt{k_n} \\
p_n &\rightarrow -q_n\sqrt{k_n} \\
k_n/m_n &\rightarrow \omega_n^2 \\
\sqrt{k_n} &\rightarrow \kappa_n
\end{aligned} \tag{2.6}$$

整个体系的哈密顿量可以变为

$$H = H_{\text{sys}}(Z) + \frac{1}{2} \sum_n \left\{ (p_n - \kappa_n X)^2 + \omega_n^2 q_n^2 \right\} \tag{2.7}$$

而且系统和热库的算符存在如下对易关系

$$\begin{aligned}
[Z, p_n] &= [Z, q_n] = 0 \\
[p_m, p_n] &= [q_m, q_n] = 0 \\
[q_n, p_m] &= i\hbar \delta_{nm}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

下面考虑热库中谐振子算符的运动方程为

$$\begin{aligned}
\dot{q}_n &= \frac{i}{\hbar} [H, q_n] = p_n - \kappa_n X \\
\dot{p}_n &= \frac{i}{\hbar} [H, p_n] = -\omega_n^2 q_n
\end{aligned} \tag{2.9}$$

要求解上述运动方程，可以将坐标和动量算符用产生算符和湮灭算符来表示

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\omega_n q_n + ip_n}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} \\
a_n^\dagger &= \frac{\omega_n q_n - ip_n}{\sqrt{2\hbar\omega_n}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

将坐标和动量算符的运动方程代入湮灭算符的表达式，可以得出湮灭算符的运动方程为

$$\dot{a}_n = -i\omega_n a_n - \kappa_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2\hbar}} X \tag{2.11}$$

求解该运动方程，其解为

$$a_n = e^{-i\omega_n(t-t_0)} a_n(t_0) - \kappa_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2\hbar}} \int_{t_0}^t e^{-i\omega_n(t-t')} X(t') dt' \tag{2.12}$$

将式(2.12)代入式(2.10)，然后反解求出热库中坐标和动量算符的表达式，

$$\begin{aligned}
 p_n &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}}(a_n^\dagger - a_n) \\
 &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}}\left[e^{i\omega_n(t-t_0)}a_n^\dagger(t_0) - e^{-i\omega_n(t-t_0)}a_n(t_0)\right] + \omega_n\kappa_n\int_{t_0}^t \sin(\omega_n(t-t'))X(t')dt' \\
 q_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}}(a_n^\dagger + a_n) \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}}\left[e^{i\omega_n(t-t_0)}a_n^\dagger(t_0) + e^{-i\omega_n(t-t_0)}a_n(t_0)\right] - \kappa_n\int_{t_0}^t \cos(\omega_n(t-t'))X(t')dt'
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

任意一个系统算符 Y 的运动方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} &= \frac{i}{\hbar}[H, Y] \\
 &= \frac{i}{\hbar}[H_{\text{sys}}, Y] + \frac{i}{2\hbar}\sum_n [[Y, p_n - \kappa_n X]_+, \kappa_n X] \\
 &= \frac{i}{\hbar}[H_{\text{sys}}, Y] + \frac{i}{2\hbar}\sum_n [[Y, \kappa_n X], p_n - \kappa_n X]_+
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

将热库谐振子的坐标和动量算符的表达式代入上式中，可以得出系统算符 Y 的朗之万方程

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} &= \frac{i}{\hbar}[H_{\text{sys}}, Y] - \frac{i}{2\hbar}\sum_n \left[X, \left[Y, \xi(t) - \int_{t_0}^t f(t-t')\dot{X}(t')dt' - f(t-t_0)X(t_0) \right]_+ \right] \\
 \dot{Y} &= \frac{i}{\hbar}[H_{\text{sys}}, Y] - \frac{i}{2\hbar}\sum_n \left[[X, Y], \xi(t) - \int_{t_0}^t f(t-t')\dot{X}(t')dt' - f(t-t_0)X(t_0) \right]_+
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

我们可以看到有系统算符 Y 的运动方程有两个表达式，这两个表达式是等价的，只是形式上的差别。其中

$$\xi(t) = i\sum_n \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}}\kappa_n \left[e^{i\omega_n(t-t_0)}a_n^\dagger(t_0) - e^{-i\omega_n(t-t_0)}a_n(t_0) \right] \tag{2.16}$$

$$f(t) = \sum_n \kappa_n^2 \cos(\omega_n t) \tag{2.17}$$

如果谐振子热库中每个频率的谐振子不只一个，用 g_n 表示频率为 ω_n 的谐振子的个数。则有

$$\xi(t) = i\sum_n \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}}\sum_{m=0}^{g_n} \kappa_{n,m} \left[e^{i\omega_n(t-t_0)}a_{n,m}^\dagger(t_0) - e^{-i\omega_n(t-t_0)}a_{n,m}(t_0) \right] \tag{2.18}$$

$$f(t) = \sum_n \cos(\omega_n t) \sum_{m=0}^{g_n} \kappa_{n,m}^2 \tag{2.19}$$

若热库中谐振子频率比较接近，或者热库由一个比较大的光学腔的模式组成，我

们可直接假设频谱是连续的

$$\sum_{m=0}^{g_n} \kappa_{n,m}^2 = G(\omega_n) \quad (2.20)$$

在连续频谱的极限下， $G(\omega_n) \frac{dn(\omega)}{d\omega}$ 才有意义

$$f(t) = \sum_n \cos(\omega_n t) G(\omega_n) \rightarrow \int_0^\infty \cos(\omega t) G(\omega) \frac{dn(\omega)}{d\omega} d\omega \quad (2.21)$$

采用马尔科夫近似，即将 $G(\omega) \frac{dn(\omega)}{d\omega}$ 视为常数

$$G(\omega) \frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{2\gamma}{\pi} \quad (2.22)$$

则

$$f(t) = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^\infty \cos(\omega t) d\omega = 2\gamma \delta(t) \quad (2.23)$$

在马尔科夫近似下，朗之万方程可以表示为

$$\dot{Y} = \frac{i}{\hbar} [H_{\text{sys}}, Y] - \frac{i}{2\hbar} \sum_n [[X, Y], \xi(t) - \gamma \dot{X}(t)]_+ \quad (2.24)$$

下面考虑热库由连续频率的谐振子组成的情况。系统和热库耦合之后，整个体系的哈密顿量可以表示为

$$H = H_{\text{sys}} + H_B + H_{\text{int}} \quad (2.25)$$

这里没有确定具体的系统，系统的哈密顿量用 H_{sys} 描述。热库的哈密顿量为

$$H_B = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \omega b^+(\omega) b(\omega) d\omega \quad (2.26)$$

$b(\omega)$ 是热库中谐振子湮灭算符，满足对易关系

$$[b(\omega), b^+(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \quad (2.27)$$

系统和热库的相互作用中采用了旋波近似，哈密顿量可以表示为

$$H_{\text{int}} = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) [b^+(\omega)c - c^+b(\omega)] d\omega \quad (2.28)$$

其中 c 是任意一个系统算符。

系统和热库相互作用部分采用的旋波近似是一种理想化的近似。为采用旋波

近似，热库中谐振子频率的积分范围从 $(0, \infty)$ 调整到 $(-\infty, \infty)$ ，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega = 2\pi\delta(t-t') \quad (2.29)$$

$$\int_{t_0}^t c(t')\delta(t-t')dt' = \frac{1}{2}c(t) \quad (2.30)$$

热库中算符 $b(\omega)$ 和系统中任意一个算符 $a(t)$ 的运动方程

$$\dot{b}(\omega) = -i\omega b(\omega) + \kappa(\omega)c \quad (2.31)$$

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar}[a, H_{\text{sys}}] + \int \kappa(\omega) \{b^+(\omega)[a, c] - [a, c^+]b(\omega)\} d\omega \quad (2.32)$$

求解(2.31)式，我们可以得到

$$b(\omega) = e^{-i\omega(t-t_0)}b_0(\omega) + \kappa(\omega)\int_{t_0}^t e^{-i\omega(t-t')}c(t')dt' \quad (2.33)$$

其中 $b_0(\omega)$ 是在 $t=t_0$ 时刻 $b(\omega)$ 的取值，将 $b(\omega)$ 代入(2.32)可以得到算符 $a(t)$ 的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{i}{\hbar}[a, H_{\text{sys}}] \\ & + \int \kappa(\omega) \{e^{i\omega(t-t_0)}b_0^+(\omega)[a, c] - [a, c^+]e^{-i\omega(t-t_0)}b_0(\omega)\} d\omega \\ & + \int [\kappa(\omega)]^2 \int_{t_0}^t \{e^{i\omega(t-t')}c^+(t')[a, c] - [a, c^+]e^{-i\omega(t-t')}c(t')\} dt' d\omega \end{aligned} \quad (2.34)$$

采用马尔科夫近似

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\gamma/2\pi} \quad (2.35)$$

同时引入噪声输入算符

$$b_{\text{in}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega(t-t_0)}b_0(\omega)d\omega \quad (2.36)$$

$b_{\text{in}}(t)$ 满足对易关系 $[b_{\text{in}}(t), b_{\text{in}}^+(t')] = \delta(t-t')$ 。我们可以得到系统算符 $a(t)$ 的运动方程，即朗之万方程

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar}[a, H_{\text{sys}}] - [a, c^+] \left[\frac{\gamma}{2}c + \sqrt{\gamma}b_{\text{in}}(t) \right] + \left[\frac{\gamma}{2}c^+ + \sqrt{\gamma}b_{\text{in}}^+(t) \right] [a, c] \quad (2.37)$$

第三章 二能级原子和光学腔模的耦合系统

二能级原子气体与光学微腔的耦合系统最近引起了较大的关注，Ritsch和Larson等人发现该耦合系统呈现出更为丰富的量子相图^[28-31]。基于此，我们首先从单个二能级原子和腔模的耦合系统出发，进而研究多个二能级原子和腔模的耦合系统。

3.1 单个二能级原子和腔模耦合

首先考虑囚禁于一维光势阱中质量为 m 的单个二能级原子，与单个光学腔模的耦合系统。二能级原子具有非简并能级 E_1 、 E_2 ，在相应的基态 $|1\rangle$ 和激发态 $|2\rangle$ 之间的偶极跃迁频率为 ω_a 。这里采用频率为 ω_p 、振幅为 η 的激光来驱动这个光学腔场，其中频率为 ω_c ，波矢为 k 的腔模与原子发生耦合。

在旋波近似下，单个二能级原子与腔模耦合系统的哈密顿量^[27]为

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} - i\hbar g(x) (\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) - i\hbar \eta (\hat{a} e^{i\omega_p t} - \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t}) \quad (3.1)$$

其中 \hat{x} ， \hat{p} 分别标记原子质心的位置和动量。 $\hat{\sigma} = |1\rangle\langle 2|$ ， $\hat{\sigma}^\dagger = |2\rangle\langle 1|$ 为原子偶极跃迁下降算符和上升算符。 $g(x)$ 为原子和腔模之间的耦合系数， $g(x) = g_0 \cos(kx)$ ， g_0 为真空 Rabi 频率。腔模的产生湮灭算符为 \hat{a} ， \hat{a}^\dagger ，且满足对易关系 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ 。

经过么正变换 $U(t) = \exp[i\omega_p t (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma})]$ ，单个二能级原子和腔模耦合的哈密顿量可以表示为

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hbar\Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hbar\Delta_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} - i\hbar g(x) (\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) - i\hbar \eta (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (3.2)$$

其中 $\Delta_a = \omega_p - \omega_a$ 是泵浦光频率和原子跃迁频率之间的失谐量， $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$ 是泵浦光频率和腔模频率之间的失谐量。

下面考虑系统的动力学，在海森堡绘景中讨论系统的朗之万方程。根据热库理论，二能级原子和腔模耦合的系统视为小系统。光学腔场由外界泵浦光驱动，光学腔中 ω_c 以外的其它腔模作为一个热库和腔模 ω_c 耦合；原子的自发辐射可以

另一个作为热库和原子耦合, 这两个热库相互独立。无论是腔模 ω_c 和热库的耦合, 还是原子和热库的耦合, 在旋波近似下都可以用(2.28)式来描述相互作用。

通过本文第二章(2.37)式, 我们取 $c \rightarrow a$, 可以求得腔场算符的朗之万方程

$$\dot{a}(t) = i\Delta_c a(t) + g(x)\sigma + \eta - \kappa a(t) - \sqrt{2\kappa}a_{in}(t) \quad (3.3)$$

由于光学腔镜的吸收和透射造成腔场损耗, 损耗率为 κ 。 $a_{in}(t)$ 是输入噪声算符, 满足 δ 关联, 即 $\langle [a_{in}(t), a_{in}^\dagger(t')] \rangle = \delta(t-t')$ 。

我们取 $c \rightarrow \sigma$, 原子偶极算符的朗之万方程为

$$\dot{\sigma}(t) = i\Delta_a \sigma(t) + g(x)\sigma_z(t)a - \frac{\gamma}{2}\sigma(t) + \sqrt{\gamma}\sigma_z f_{in}(t) \quad (3.4)$$

$$\dot{\sigma}_z(t) = -2g(x)(\sigma^\dagger a + a^\dagger \sigma) - \gamma(\sigma_z + 1) - 2\sqrt{\gamma}(\sigma^\dagger f_{in}(t) + \sigma f_{in}^\dagger(t)) \quad (3.5)$$

其中, $\sigma_z = \sigma^\dagger \sigma - \sigma \sigma^\dagger$ 。原子自发辐射率为 γ , 输入的噪声算符为 $f_{in}(t)$, 满足 δ 关联, 即 $\langle [f_{in}(t), f_{in}^\dagger(t')] \rangle = \delta(t-t')$ 。

通常都研究接近绝对零度的冷原子的情况, 为此必须避免加热并确保弱原子激发。我们采取大失谐, 即 $|\Delta_a| \gg g_0\sqrt{n}$ 、 $|\Delta_c|$ 、 γ , 这里忽略了原子的动能。在大失谐的情况下, 可以绝热消除掉激发态上的原子布居数。我们取 $\sigma_z(t) \square -1$ 并将其代入(3.4)式可以得出

$$\dot{\sigma}(t) = i\Delta_a \sigma(t) - g(x)a \quad (3.6)$$

绝热消除时, $\dot{\sigma}(t) \square 0$, 可以求得

$$\sigma \square \frac{-ig(x)a}{\Delta_a} \quad (3.7)$$

将其代入原哈密顿量(3.2)式中, 可以得出单个二能级原子与腔模耦合系统的有效哈密顿量

$$H = \frac{P^2}{2m} + \hbar [U_0 \cos^2(kx) - \Delta_c] a^\dagger a - i\hbar \eta (a - a^\dagger) \quad (3.8)$$

其中 $U_0 = \frac{g_0^2}{\Delta_a}$ 是单光子偶极势的深度。

3.2 多个二能级原子与腔模耦合

下面我们考虑由多个二能级原子组成的冷原子气体与腔模的耦合系统。考虑

多体问题时，我们采用二次量子化的方法。

将单个二能级原子和腔模耦合的哈密顿量(3.2)式二次量子化，可以得到^[30]

$$H_{tot} = H_A + H_{A-A} + H_R + H_{A-R} \quad (3.9)$$

其中原子部分的哈密顿量可以表示为

$$H_A = \sum_{i=1,2} \int dx \Psi_i^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_i \right) \Psi_i(x) + \int dx \Psi_2^\dagger(x) (-\hbar \Delta_a) \Psi_2(x) \quad (3.10)$$

其中， $V_i(x)$ 为原子气体感受到光晶格的外囚禁势， $i=1,2$ 。我们引入原子场算符

$\Psi_j(x)$ 、 $\Psi_j^\dagger(x)$ ， $j=1,2$ 标记不同的能级，且场算符满足对易关系

$$[\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(x')] = \delta(x-x') \delta_{ij} \quad (3.11)$$

$$[\Psi_i(x), \Psi_j(x')] = [\Psi_i^\dagger(x), \Psi_j^\dagger(x')] = 0 \quad (3.12)$$

这里假设处于激发态上的原子个数基本为零，不考虑处于不同能级上的原子之间的碰撞相互作用，只考虑处于基态上原子之间的相互作用。基态上原子之间相互

作用为短程赝势，用 $u_1 = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m}$ 来描述相互作用强度， a_s 为 s 波散射长度。原子

碰撞相互作用的哈密顿量为

$$H_{A-A} = \frac{1}{2} \int u_1 \Psi_1^\dagger(x) \Psi_1^\dagger(x) \Psi_1(x) \Psi_1(x) dx \quad (3.13)$$

腔模和泵浦光部分的哈密顿量为

$$H_R = -\hbar \Delta_c a^\dagger a - i\hbar \eta (a - a^\dagger) \quad (3.14)$$

原子和腔模的相互作用部分为

$$H_{A-R} = -i\hbar \int g(x) [\Psi_2^\dagger(x) \Psi_1(x) a - a^\dagger \Psi_1^\dagger(x) \Psi_2(x)] dx \quad (3.15)$$

下面考虑二能级原子气体和腔模耦合系统的朗之万方程。我们取 $c \rightarrow a$ ，腔场算符的朗之万方程为

$$\dot{a} = i\Delta_c a + \int g(x) \Psi_1^\dagger(x) \Psi_2(x) dx + \eta - \kappa a - \sqrt{2\kappa} a_m(t) \quad (3.16)$$

取 $c \rightarrow \Psi_1^\dagger \Psi_2$ 原子场算符的朗之万方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_1(x) &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_1(x), H_{tot}] \\
 &\quad - [\Psi_1(x), c^+] \left[\frac{\gamma}{2} c + \sqrt{\gamma} f_{in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma}{2} c^+ + \sqrt{\gamma} f_{in}^+(t) \right] [\Psi_1(x), c] \\
 &= i \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_1(x) - i \frac{V_1(x)}{\hbar} \Psi_1(x) - \frac{i u_1}{\hbar} \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) \Psi_1(x) \\
 &\quad + g(x) a^+ \Psi_2(x) + \frac{\gamma}{2} \Psi_2^+(x) \Psi_2(x) \Psi_1(x) + \sqrt{\gamma} f_{in}^+(t) \Psi_2(x) \\
 &\square i \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_1(x) - i \frac{V_1(x)}{\hbar} \Psi_1(x) - \frac{i u_1}{\hbar} \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) \Psi_1(x) \\
 &\quad + g(x) a^+ \Psi_2(x) + \sqrt{\gamma} f_{in}^+(t) \Psi_2(x)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_2(x) &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_2(x), H_{tot}] \\
 &\quad - [\Psi_2(x), c^+] \left[\frac{\gamma}{2} c + \sqrt{\gamma} f_{in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma}{2} c^+ + \sqrt{\gamma} f_{in}^+(t) \right] [\Psi_2(x), c] \\
 &= i \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_2(x) - i \frac{V_2(x)}{\hbar} \Psi_2(x) + i \Delta_a \Psi_2(x) - g(x) \Psi_1(x) a \\
 &\quad - \frac{\gamma}{2} \Psi_1(x) \Psi_1^+(x) \Psi_2(x) - \sqrt{\gamma} \Psi_1(x) f_{in}(t) \\
 &= \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_2(x) - i \frac{V_2(x)}{\hbar} \Psi_2(x) + i \Delta_a \Psi_2(x) - g(x) \Psi_1(x) a \\
 &\quad - \frac{\gamma}{2} \Psi_2(x) - \sqrt{\gamma} \Psi_1(x) f_{in}(t)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $a_{in}(t)$ 、 $f_{in}(t)$ 是输入的噪声算符，满足 δ 关联。 $\Psi_2^+(x) \Psi_2(x)$ 对应激发态上原子数 $\sigma^+ \sigma$ ，故 $\Psi_2^+(x) \Psi_2(x) \square 0$ ； $\Psi_1(x) \Psi_1^+(x)$ 对应 $\langle 1 || 1 \rangle$ ，故 $\Psi_1(x) \Psi_1^+(x) = 1$ 。我们采取大失谐，即 $|\Delta_a| \gg g_0 \sqrt{n}$ 、 $|\Delta_c|$ 、 γ ，忽略了原子的动能项和外囚禁势 $V_i(x)$ ，绝热消除原子激发态上的布居数， $\dot{\Psi}_2(x) \square 0$ ，则可以得出

$$\Psi_2(x) \square -i \frac{g(x)}{\Delta_a} \Psi_1(x) a \tag{3.19}$$

将(3.19)式代入(3.16)式和(3.17)式，我们可以得到

$$\dot{a} = i \Delta_c a - i U_0 a \int dx \cos^2(kx) \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) + \eta - \kappa a - \sqrt{2\kappa} a_{in}(t) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_1(x) &= i \left[\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{V_1(x)}{\hbar} - \frac{u_1}{\hbar} \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) - U_0 \cos^2(kx) a^+ a \right] \Psi_1(x) \\
 &\quad + \frac{\gamma}{2} U_0 \cos^2(kx) a^+ a \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) - i \sqrt{\gamma} f_{in}^+(t) \frac{g(x)}{\Delta_a} \Psi_1(x) a
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

在满足 $i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = [a, H^{eff}]$, $i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = [\Psi_1(x), H^{eff}]$ 的前提下, 我们可以得出该系统的有效哈密顿量

$$H^{eff} = H_A^{eff} + H_{A-A}^{eff} + H_R^{eff} + H_{A-R}^{eff} \quad (3.22)$$

其中光场的哈密顿量以及原子之间相互作用的哈密顿量与式(3.13)和(3.14)相同

$$H_{A-A}^{eff} = H_{A-A} = \frac{1}{2} \int u_1 \Psi_1^+(x) \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) \Psi_1(x) dx \quad (3.23)$$

$$H_R^{eff} = H_R = -\hbar \Delta_c a^+ a - i\hbar \eta (a - a^+) \quad (3.24)$$

原子的哈密顿量为

$$H_A^{eff} = \int dx \Psi_1^+(x) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_1 \right) \Psi_1(x) \quad (3.25)$$

腔模和原子耦合的哈密顿量为

$$H_{A-R}^{eff} = \int dx \Psi_1^+(x) U_0 \cos^2(kx) a^+ a \Psi_1(x) \quad (3.26)$$

在单带近似下, 原子场算符 $\Psi_1(x)$ 展开到瓦尼尔函数可得 $\Psi_1(x) = \sum_k b_k w(x - x_k)$, b_k 满足玻色子对易关系 $[b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}$ 。 $k = 1, 2, \dots, K$ 表示格点数。将 $\Psi_1(x)$ 的瓦尼尔展开形式代入 H^{eff} 中, 我们得到有效哈密顿量的展开形式为

$$H^{eff} = E_0 N + E_1 B + \hbar U_0 a^+ a (J_0 N + J_1 B) - \hbar \Delta_c a^+ a - i\hbar \eta (a - a^+) + \frac{\tilde{u}_1}{2} \sum_k n_k (n_k - 1) \quad (3.27)$$

其中引入数算符 $N = \sum_k b_k^+ b_k$, 跳跃算符 $B = \sum_k (b_{k+1}^+ b_k + h.c.)$ 。单光子提供的单个原子偶极势的深度是 $U_0 = g_0^2 / \Delta_a$ 。我们只考虑同一格点上, 和近邻格点上原子之间的相互作用, 次近邻及其以上相互作用均忽略。动能项和跳跃项的矩阵元分别为 $E_l = \int dx w^*(x - x_k) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_1 \right) w(x - x_{k+l})$, $J_l = \int dx w^*(x - x_k) \cos^2(kx) w(x - x_{k+l})$, $l = 0, 1$ 分别代表同一个格点和近邻格点。原子之间的碰撞相互作用仅考虑同一格点上的情况, $\tilde{u}_1 = u_1 \int dx |w(x - x_k)|^4$ 。至此我们得出了二能级原子气体与腔模耦合的有效哈密顿量。

第四章 Λ 型三能级原子与光学腔模的耦合系统

在上一章我们主要研究了二能级原子与腔模的耦合系统。这里我们主要研究了Λ型冷原子与腔模的耦合系统。同样我们先从单个原子与腔模的耦合出发，再考虑Λ型冷原子气体与腔模的耦合。

4.1 单个Λ型三能级原子和腔模的耦合

将Λ型冷原子囚禁在远离共振的光势阱(FORT)中，与频率分别为 ω_1 、 ω_2 的两个光学腔进行耦合，且光学腔在空间中的夹角非常小，装置示意图如图1所示。同时利用频率为 ω_p 、振幅分别为 η_1 和 η_2 的激光来驱动这两个光场。其中Λ型原子具有非简并能级 E_1 、 E_2 和 E_3 如图2所示。原子在 $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 之间的跃迁过程通过腔模 ω_1 耦合， $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 通过腔模 ω_2 耦合，其它频率的腔模作为热库来处理。

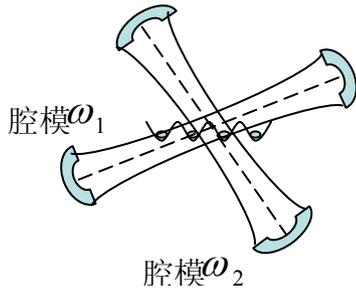


图 4.1 腔模和原子的耦合系统

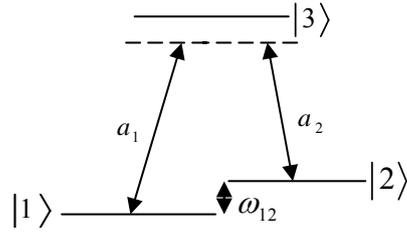


图 4.2 Λ 型原子能级结构

在旋波近似下，单个Λ原子与腔模耦合系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H^0 &= \frac{p^2}{2m} + \sum_{i=1}^3 E_i \sigma_{ii} + \hbar \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar \omega_2 a_2^\dagger a_2 \\
 &\quad - i\hbar g_{13} (a_1 \sigma_{31} - a_1^\dagger \sigma_{13}) - i\hbar g_{23} (a_2 \sigma_{32} - a_2^\dagger \sigma_{23}) \\
 &\quad - i\hbar \eta_1 (a_1 e^{i\omega_p t} - a_1^\dagger e^{-i\omega_p t}) - i\hbar \eta_2 (a_2 e^{i\omega_p t} - a_2^\dagger e^{-i\omega_p t})
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

经过么正变换 $U(t) = \exp[i\omega_p t (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - \sigma_{13} \sigma_{31} - \sigma_{23} \sigma_{32})]$ ，其哈密顿量可以表示为：

$$H^0 = H_A^0 + H_R^0 + H_{Int}^0 \tag{4.2}$$

$$H_A^0 = \frac{p^2}{2m} + \hbar \omega_{12} \sigma_{22} - \hbar \Delta_{a1} \sigma_{33} + \hbar \omega_p \tag{4.3}$$

$$H_R^0 = -\hbar\Delta_{c1}a_1^+a_1 - \hbar\Delta_{c2}a_2^+a_2 - i\hbar\eta_1(a_1 - a_1^+) - i\hbar\eta_2(a_2 - a_2^+) \quad (4.4)$$

$$H_{int}^0 = -i\hbar g_{13}(x)(a_1\sigma_{31} - a_1^+\sigma_{13}) - i\hbar g_{23}(x)(a_2\sigma_{32} - a_2^+\sigma_{23}) \quad (4.5)$$

其中， H_A^0 是原子的哈密顿量，用 x ， p 分别标记原子质心的位置和动量。原子偶极算符为 $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ， $i, j = 1, 2, 3$ 。选取原子的能级 E_1 为零能级，则 $E_2 = \hbar\omega_2$ ， $E_3 = \hbar\omega_3$ 。泵浦光频率和原子跃迁频率之间的失谐量为 $\Delta_{a1} = \omega_p - \omega_{13}$ ， $\Delta_{a2} = \omega_p - \omega_{23}$ 。 H_R^0 描述光学腔场和泵浦光的哈密顿量，其中腔模 ω_1 (ω_2) 的产生湮灭算符分别为 a_1 、 a_1^+ (a_2 、 a_2^+)，且满足对易关系 $[a_1, a_1^+] = [a_2, a_2^+] = 1$ 。 $\Delta_{c1} = \omega_p - \omega_1$ ， $\Delta_{c2} = \omega_p - \omega_2$ 是泵浦光频率和腔模频率之间的失谐量。 H_{int}^0 是光学腔模和原子的耦合作用，波矢为 k_1 的腔模 a_1 与原子 $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 耦合参数为 $g_{13}(x) = g_{13}^0 \cos(k_1 x)$ ，波矢为 k_2 的腔模 a_2 与原子 $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 的耦合参数为 $g_{23}(x) = g_{23}^0 \cos(k_2 x)$ 。

光学腔场由外界泵浦光驱动，单个 Λ 型冷原子和腔模的耦合系统是开放系统。原子的自发辐射以及其它频率的腔模都可作为热库影响原子和腔模的运动，使其存在耗散过程，出现阻尼项和涨落项。下面采用朗之万方程来处理这个开放系统。

通过本文第二章(2.37)式，我们取 $c_1 \rightarrow a_1$ ， $c_2 \rightarrow a_2$ 可以求得腔场算符的朗之万方程为

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{i}{\hbar}[a_1, H^0] \\ &\quad - [a_1, c_1^+] [\kappa_1 c_1 + \sqrt{2\kappa_1} a_{1in}(t)] + [\kappa_1 c_1^+ + \sqrt{2\kappa_1} a_{1in}^+(t)] [a_1, c_1] \\ &= i\Delta_{c1} a_1 + g_{13} \sigma_{13} + \eta_1 - \kappa_1 a_1 - \sqrt{2\kappa_1} a_{1in}(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= -\frac{i}{\hbar}[a_2, H^0] \\ &\quad - [a_2, c_2^+] [\kappa_2 c_2 + \sqrt{2\kappa_2} a_{2in}(t)] + [\kappa_2 c_2^+ + \sqrt{2\kappa_2} a_{2in}^+(t)] [a_2, c_2] \\ &= i\Delta_{c2} a_2 + g_{23} \sigma_{23} + \eta_2 - \kappa_2 a_2 - \sqrt{2\kappa_2} a_{2in}(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

由于光学腔镜的透射和吸收造成腔场损耗，损耗率分别为 κ_1 、 κ_2 。 $a_{1in}(t)$ 、 $a_{2in}(t)$ 是输入噪声算符，满足 δ 关联，即 $\langle [a_{in}(t), a_{in}^+(t')] \rangle = \delta(t-t')$ ，

$$\langle [a_{2in}(t), a_{2in}^\dagger(t')] \rangle = \delta(t-t').$$

同理我们取 $c_1 \rightarrow \sigma_{13}$, $c_2 \rightarrow \sigma_{23}$ 求得原子偶极算符的朗之万方程为

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{13} = & -\frac{i}{\hbar} [\sigma_{13}, H^0] \\ & - [\sigma_{13}, c_1^\dagger] \left[\frac{\gamma_1}{2} c_1 + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma_1}{2} c_1^\dagger + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}^\dagger(t) \right] [\sigma_{13}, c_1] \\ = & i\Delta_{a1} \sigma_{13} - g_{13} a_1 (\sigma_{11} - \sigma_{33}) - g_{23} a_2 \sigma_{12} \\ & - \frac{\gamma_1}{2} \sigma_{13} - (\sigma_{11} - \sigma_{33}) \sqrt{\gamma_1} f_{1in}(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{23} = & -\frac{i}{\hbar} [\sigma_{23}, H^0] \\ & - [\sigma_{23}, c_2^\dagger] \left[\frac{\gamma_2}{2} c_2 + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma_2}{2} c_2^\dagger + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}^\dagger(t) \right] [\sigma_{23}, c_2] \\ = & i\Delta_{a1} \sigma_{23} + i\omega_{12} \sigma_{23} - g_{23} a_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33}) - g_{13} a_1 \sigma_{21} \\ & - \frac{\gamma_2}{2} \sigma_{23} - (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \sqrt{\gamma_2} f_{2in}(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 γ_1, γ_2 为能级 E_3 的原子在 $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$ 和 $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ 过程的自发衰变率。 f_{1in}, f_{2in} 是输入的噪声算符，满足 δ 关联，即 $\langle [f_{1in}(t), f_{1in}^\dagger(t')] \rangle = \delta(t-t')$ ， $\langle [f_{2in}(t), f_{2in}^\dagger(t')] \rangle = \delta(t-t')$ 。

在大失谐 $\Delta_{a1} \approx \Delta_{a2} = \Delta \gg \omega_{12}, \Delta_{c1}, \Delta_{c2}, \gamma_1, \gamma_2$ 的情况下，忽略原子的动能以及原子的自发辐射，我们可以绝热消除掉最高能级 E_3 态上的粒子布居数，我们取 $\sigma_{33} \approx 0$ ，得出

$$\sigma_{13} \approx -i \frac{g_{13} a_1 \sigma_{11} + g_{23} a_2 \sigma_{12}}{\Delta_1} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{23} \approx -i \frac{g_{13} a_1 \sigma_{21} + g_{23} a_2 \sigma_{22}}{\Delta_1} \quad (4.11)$$

将式(4.10)和式(4.11)代入单个 Λ 原子与腔模耦合系统的哈密顿量式(4.2)中可以得到有效的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H = & \frac{p^2}{2m} - \hbar \Delta_{c1} a_1^\dagger a_1 - \hbar \Delta_{c2} a_2^\dagger a_2 - i\hbar \eta_1 (a_1 - a_1^\dagger) - i\hbar \eta_2 (a_2 - a_2^\dagger) \\ & + \hbar \frac{g_{13} g_{23}}{\Delta} (a_1 a_2^\dagger \sigma_{21} + a_1^\dagger a_2 \sigma_{12}) + \hbar \frac{g_{13}^2}{\Delta} a_1 a_1^\dagger \sigma_{11} + \hbar \frac{g_{23}^2}{\Delta} a_2 a_2^\dagger \sigma_{22} \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中忽略了 $\hbar\omega_p$ 项。

4.2 两分量玻色-哈伯德模型与腔模耦合系统

下面我们考虑由多个 Λ 型原子组成的冷原子气体与腔模的耦合系统。考虑多体问题时，我们采用二次量子化的方法。

将单个冷原子和腔模的哈密顿量(4.2)式二次量子化，可以得到：

$$H_{tot} = H_A + H_R + H_{A-A} + H_{Int} \quad (4.13)$$

$$H_A = \sum_{i=1}^3 \int \Psi_i^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_i \right) \Psi_i(x) dx + \int \Psi_2^+(x) (\hbar\omega_{l2}) \Psi_2(x) dx + \int \Psi_3^+(x) (-\hbar\Delta_{a1}) \Psi_3(x) dx + \hbar\omega_p \quad (4.14)$$

$$H_R = -\hbar\Delta_{c1} a_1^+ a_1 - \hbar\Delta_{c2} a_2^+ a_2 - i\hbar\eta_1 (a_1 - a_1^+) - i\hbar\eta_2 (a_2 - a_2^+) \quad (4.15)$$

$$H_{A-A} = \frac{u_1}{2} \int dx \Psi_1^+(x) \Psi_1^+(x) \Psi_1(x) \Psi_1(x) + \frac{u_2}{2} \int dx \Psi_2^+(x) \Psi_2^+(x) \Psi_2(x) \Psi_2(x) + u_{12} \int dx \Psi_1^+(x) \Psi_2^+(x) \Psi_2(x) \Psi_1(x) \quad (4.16)$$

$$H_{Int} = -i\hbar \int dx \Psi_3^+(x) a_1 g_{13} \Psi_1(x) + i\hbar \int dx \Psi_1^+(x) a_1^+ g_{13} \Psi_3(x) - i\hbar \int dx \Psi_3^+(x) a_2 g_{23} \Psi_2(x) + i\hbar \int dx \Psi_2^+(x) a_2^+ g_{23} \Psi_3(x) \quad (4.17)$$

其中 $V_i(x)$ 为原子气体感受到光晶格的外囚禁势， $i=1,2,3$ 。 $\Psi_i(x)$ 是原子场算符，并且满足玻色子对易关系 $[\Psi_i(x), \Psi_j^+(x')] = \delta_{ij} \delta(x-x')$ ， $[\Psi_i(x), \Psi_j(x')] = 0$ ， $[\Psi_i^+(x), \Psi_j^+(x')] = 0$ 。 $u_1(u_2)$ 描述同一能级 $E_1(E_2)$ 上的原子之间的相互作用强度， u_{12} 描述处于不同能级 E_1 和 E_2 上的原子之间的相互作用强度。

下面考虑冷原子气体与腔模耦合系统的朗之万方程。通过本文第二章(2.37)式，取 $c_1 \rightarrow a_1$ ， $c_2 \rightarrow a_2$ 腔场算符的朗之万方程为

$$\dot{a}_1(t) = -\frac{i}{\hbar} [a_1, H_{tot}] - \kappa_1 a_1 - \sqrt{2\kappa_1} a_{1in}(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{a}_2(t) = -\frac{i}{\hbar} [a_2, H_{tot}] - \kappa_2 a_2 - \sqrt{2\kappa_2} a_{2in}(t) \quad (4.19)$$

腔场由于光学腔镜的透射和吸收造成损耗，损耗率分别为 κ_1 、 κ_2 ， a_{1in} 、 a_{2in} 是输入的噪声算符，满足 δ 关联。

取相应的 $c_1 \rightarrow \Psi_1^+ \Psi_3$ 、 $c_2 \rightarrow \Psi_2^+ \Psi_3$ ，原子场算符的朗之万方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_1(x) &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_1(x), H_{tot}] \\
 &\quad - [\Psi_1(x), c_1^+] \left[\frac{\gamma_1}{2} c_1 + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma_1}{2} c_1^+ + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}^+(t) \right] [\Psi_1(x), c_1] \\
 &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_1, H_{tot}] + \frac{\gamma_1}{2} \Psi_3^+(x) \Psi_3(x) \Psi_1(x) + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}^+(t) \Psi_3(x) \\
 &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_1, H_{tot}] + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}^+(t) \Psi_3(x)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_2(x) &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_2(x), H_{tot}] \\
 &\quad - [\Psi_2(x), c_2^+] \left[\frac{\gamma_2}{2} c_2 + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma_2}{2} c_2^+ + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}^+(t) \right] [\Psi_2(x), c_2] \\
 &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_2, H_{tot}] + \frac{\gamma_2}{2} \Psi_3^+(x) \Psi_3(x) \Psi_2(x) + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}^+(t) \Psi_3(x) \\
 &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_2, H_{tot}] + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}^+(t) \Psi_3(x)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_3(x) &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi_3(x), H_{tot}] \\
 &\quad - [\Psi_1(x), c_1^+] \left[\frac{\gamma_1}{2} c_1 + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma_1}{2} c_1^+ + \sqrt{\gamma_1} f_{1in}^+(t) \right] [\Psi_1(x), c_1] \\
 &\quad - [\Psi_2(x), c_2^+] \left[\frac{\gamma_2}{2} c_2 + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}(t) \right] + \left[\frac{\gamma_2}{2} c_2^+ + \sqrt{\gamma_2} f_{2in}^+(t) \right] [\Psi_2(x), c_2] \\
 &= \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_3(x) - \frac{iV_3(x)}{\hbar} \Psi_3(x) + i\Delta_{a1} \Psi_3(x) - g_{13} a_1 \Psi_1(x) - g_{23} a_2 \Psi_2(x) \\
 &\quad - \frac{\gamma_1}{2} \Psi_1(x) \Psi_1^+(x) \Psi_3(x) - \sqrt{\gamma_1} \Psi_1(x) f_{1in}(t) \\
 &\quad - \frac{\gamma_2}{2} \Psi_2(x) \Psi_2^+(x) \Psi_3(x) - \sqrt{\gamma_2} \Psi_2(x) f_{2in}(t) \\
 &= \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_3(x) - \frac{iV_3(x)}{\hbar} \Psi_3(x) + i\Delta_{a1} \Psi_3(x) - g_{13} a_1 \Psi_1(x) - g_{23} a_2 \Psi_2(x) \\
 &\quad - \frac{\gamma}{2} \Psi_3(x) - \sqrt{\gamma_1} \Psi_1(x) f_{1in}(t) - \sqrt{\gamma_2} \Psi_2(x) f_{2in}(t)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 γ_1 , γ_2 为能级 E_3 的原子在跃迁过程 $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$ 和 $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ 的自发衰变率, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ 为总衰变率。 f_{1in} , f_{2in} 是输入的噪声算符, 满足 δ 关联。 $\Psi_3^+(x)\Psi_3(x)$ 最高能级态上的原子数, 故 $\Psi_3^+(x)\Psi_3(x) \square 0$; $\Psi_1(x)\Psi_1^+(x)$ 对应 $\langle 1||1\rangle$, $\Psi_2(x)\Psi_2^+(x)$ 对应 $\langle 2||2\rangle$, 故 $\Psi_1(x)\Psi_1^+(x) = 1$, $\Psi_2(x)\Psi_2^+(x) = 1$ 。

在大失谐 $\Delta_{a1} \approx \Delta_{a2} = \Delta \gg \omega_{12}$, Δ_{c1} , Δ_{c2} , γ_1 , γ_2 的情况下, 忽略原子的动能以及原子气体感受到的外囚禁势, 我们可以绝热消除掉最高能级 E_3 态上的粒子布

居数，由 $\dot{\Psi}_3(x) \approx 0$ 可以得出 $\Psi_3(x) = -i(g_{13}a_1\Psi_1(x) + g_{23}a_2\Psi_2(x))/\Delta$ ，将其代入上述朗之万方程(4.18-21)中得到相对应的腔场算符和原子场算符的运动方程。在满足

$$i\hbar \frac{\partial a_1}{\partial t} = [a_1, H^{eff}] \quad , \quad i\hbar \frac{\partial a_2}{\partial t} = [a_2, H^{eff}] \quad , \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = [\Psi_1(x), H^{eff}] \quad ,$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = [\Psi_2(x), H^{eff}] \quad \text{的前提下，得出该系统的有效哈密顿量的多体形式}$$

$H^{eff} = H_A^{eff} + H_R + H_{A-A} + H_{Int}^{eff}$ 。其中，光学腔场和泵浦光的哈密顿量，以及原子两体之间相互作用的哈密顿量分别与式(4.15)和(4.16)相同，原子气体的哈密顿量为

$$H_A^{eff} = \sum_{i=1,2} \int dx \Psi_i^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_i \right) \Psi_i(x) + \int dx \Psi_2^+(x) \omega_{12} \hbar \Psi_2(x) \quad (4.23)$$

而原子和腔模耦合系统的哈密顿量为

$$H_{Int}^{eff} = \hbar \int dx \Psi_1^+(x) \frac{g_{13}^2}{\Delta} a_1^+ a_1 \Psi_1(x) + \hbar \int dx \Psi_2^+(x) \frac{g_{23}^2}{\Delta} a_2^+ a_2 \Psi_2(x) \quad (4.24)$$

$$+ \hbar \int dx \Psi_1^+(x) \frac{g_{13}g_{23}}{\Delta} a_1^+ a_2 \Psi_2(x) + \hbar \int dx \Psi_2^+(x) \frac{g_{23}g_{13}}{\Delta} a_2^+ a_1 \Psi_1(x)$$

在单带近似下，原子场算符 $\Psi_p(x)$ 展开到瓦尼尔函数可得 $\Psi_p(x) = \sum_k b_{pk} w_p(x-x_k)$ ， b_{pk} 满足玻色子对易关系 $[b_{pk}, b_{qk'}^+] = \delta_{pq} \delta_{kk'}$ ， $p, q = 1, 2$ 标记不同的原子态。 $k = 1, 2, \dots, K$ 表示格点数。将 $\Psi_p(x)$ 的瓦尼尔展开形式代入 H^{eff} 中，我们得到有效哈密顿量的展开形式

$$H^{eff} = E_1^0 N_{11} + E_1 B_{11} + (E_2^0 + \hbar \omega_{12}) N_{22} + E_2 B_{22} + \sum_{p,q=1,2} \hbar U_{pq} a_p^+ a_q (J_{pq} B_{pq} + J_{pq}^0 N_{pq})$$

$$- i\hbar \eta_1 (a_1 - a_1^+) - i\hbar \eta_2 (a_2 - a_2^+) - \hbar \Delta_{c1} a_1^+ a_1 - \hbar \Delta_{c2} a_2^+ a_2 \quad (4.25)$$

$$+ \frac{\tilde{u}_1}{2} \sum_k n_{1k} (n_{1k} - 1) + \frac{\tilde{u}_2}{2} \sum_k n_{2k} (n_{2k} - 1) + \tilde{u}_{12} \sum_k n_{1k} n_{2k}$$

其中引入数算符 $N_{pq} = \sum_k b_{pk}^+ b_{qk}$ ，跳跃算符 $B_{pq} = \sum_k (b_{pk+1}^+ b_{qk} + h.c.)$ 。单光子提供的

单个原子偶极势的深度是 $U_{pq} = \frac{g_{p3}^0 g_{q3}^0}{\Delta}$ 。我们只考虑同一格点上，和近邻格点上

原子之间的相互作用，次近邻及其以上相互作用均忽略。同一个格点动能和跳跃项的矩阵元分别为

$$E_p^0 = \int dx w_p^*(x-x_k) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_p \right) w_p(x-x_k),$$

$$J_{pq}^0 = \int dx w_p^*(x-x_k) \cos(k_p x) \cos(k_q x) w_q(x-x_k)。$$

近邻格点上原子之间的相互作用为

$$E_p = \int dx w_p^*(x-x_k) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_p \right) w_p(x-x_{k+1}),$$

$$J_{pq} = \int dx w_p^*(x-x_k) \cos(k_p x) \cos(k_q x) w_p(x-x_{k+1})。$$

原子之间的碰撞相互作用仅考虑同一格点上的情况

$$\tilde{u}_p = u_p \int dx |w_p(x-x_k)|^4, \quad \tilde{u}_{12} = u_{12} \int dx |w_1(x-x_k)|^2 |w_2(x-x_k)|^2。$$

至此我们得到了 Λ 型三能级冷原子与两模腔场强耦合的多体哈密顿量(4.25)。该有效哈密顿量可用来描述两分量玻色气体与腔模耦合系统。含有量子噪音的原子与光腔相互作用系统的动力学正在成为冷原子物理研究的热点。

第五章 总结与展望

本文从光学腔模与二能级原子气体的耦合系统出发，主要研究囚禁于远离共振的光势阱中的 Λ 型冷原子气体与两个腔模相互作用的耦合系统。通过分析系统中腔场算符和原子场算符的朗之万方程，在大失谐的条件下，绝热消除原子最高能级上的粒子布居数，得到该系统的有效哈密顿量。从该耦合系统的有效哈密顿量可以看出，该系统可以用来模拟两分量玻色子与腔模耦合的系统。

在目前工作的基础上，我们可以研究 Λ 型冷原子气体与光学腔模耦合系统的相变问题，动力学问题等基础理论问题。

参考文献

- [1] 詹明生. 冷原子物理. 中国科学院院刊, 2002, 6, 407-412.
- [2] I. Bloch, Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Phys.* 2005, 1, 23-30.
- [3] 王义道. 原子的激光冷却与陷俘. 北京, 北京大学出版社, 2007, ch7-277.
- [4] I. Bloch and M. Greiner. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* , 2005, 52, 1.
- [5] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen De and U. Sen *Adv. Phys.* 2007, 56, 243.
- [6] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, D. S. Fisher. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Phys. Rev. B* , 1989, 40, 546-570.
- [7] D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner, and P. Zoller. Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett* , 1998, 81, 3108-3111.
- [8] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch ,I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 2002, 415, 39-44.
- [9] Purcell. E. M. *Phy. Rev.*, 1946, 69, 681.
- [10] Drexhage K. H. *Progress in optics*. New York, Noah-Holland, 1974.
- [11] J. Ye, D. W. Vernooy, H. J. Kimble. Trapping of Single Atoms in Cavity QED. *Phys. Rev. Lett.* 1999, 83, 4987-4990.
- [12] J. Mckeever J. R. Buck, A. D. Boozer, A. Kuzmich, H.-C. Nägerl, D. M. Stamper-Kurn, and H. J. Kimble. State-Insensitive Cooling and Trapping of Single Atoms in an Optical Cavity. *Phys. Rev. Lett*, 1997, 90, 133602-133605.
- [13] J. Mckeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich, H. J. Kimble. Deterministic Generation of Single Photons from One Atom. Trapped in a Cavity. *Science*, 2004, 303, 1992-1996.
- [14] A. Kuhn, M. Hennrich, G. Rempe. Deterministic Single-Photon Source for Distributed Quantum Networking. *Phys. Rev. Lett*, 2002, 89, 067901-067904.
- [15] S. Slama, G. Krenz, S. Bux, C. Zimmermann, Ph.W. Courteille, Cavity-enhanced superradiant Rayleigh scattering with ultracold and Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. A*. 2007, 75, 063620-063630.

-
- [16] P. Treutlein, D. Hunger, S. Camerer, T.W. Hänsch, J. Reichel. Bose-Einstein Condensate Coupled to a Nanomechanical Resonator on an Atom Chip. *Phys. Rev. Lett*, 2007, 99, 140403-140406.
- [17] F. Brennecke, T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, M. Kohl, T. Esslinger, Cavity QED with a Bose-Einstein condensate. *Nature (London)* 2007, 450, 268-271.
- [18] Y. Colombe, T. Steinmetz, G. Dubois, F. Linke, D. Hunger, J. Reichel, Strong atom-field coupling for Bose-Einstein condensates in an optical cavity on a chip. *Nature (London)* 2007, 450, 272-276.
- [19] P. Domokos, H. Ritsch, *J. Opt. Soc. Am. B* , 2003, 20, 1098.
- [20] P. Domokos, H. Ritsch, Collective Cooling and Self-Organization of Atoms in a Cavity. *Phys. Rev. Lett*, 2002, 89, 253003- 253006.
- [21] S. Zippilli, G. Morigi, H. Ritsch, Suppression of Bragg Scattering by Collective Interference of Spatially Ordered Atoms with a High-Q Cavity Mode .*Phys. Rev. Lett*, 2004, 93, 123002-123005.
- [22] A.T. Black, H.W. Chan, V. Vuletić . Observation of Collective Friction Forces due to Spatial Self-Organization of Atoms: From Rayleigh to Bragg Scattering. *Phys. Rev. Lett*, 2003, 91, 203001-203005.
- [23] S. Zippilli, G. Morigi and H. Ritsch. Collective effects in the dynamics of driven atoms in a high-Q resonator. *Eur. Phys. J. D*, 2004, 31, 507.
- [24] S. Zippilli, J. Asbóth, Morigi G and H. Ritsch. *Appl. Phys. B* , 2004, 79, 969.
- [25] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner, T. Esslinger, Cavity Optomechanics with a Bose-Einstein Condensate. *Science* 2008, 322, 235-238.
- [26] Peter Horak, Stephen M. Barnett, H. Ritsch. *Phys. Rev. A*, 2000, 61, 033609.
- [27] S. Ritter, F. Brennecke, K. Baumann, T. Donner, C. Guerlin, T. Esslinger, *Applied. Physics. B*, 2009, 95, 213.
- [28] C. Maschler, H. Ritsch. Cold Atom Dynamics in a Quantum Optical Lattice Potential. *Phys. Rev. Lett*, 2005, 95, 260401-260404.
- [29] C. Maschler, I. B. Mekhov, H. Ritsch. Ultracold atoms in optical lattices generated by quantized light fields .*Eur. Phys. J. D*, 2008, 46, 545-560.
- [30] Larson Jonas, Damski Bohdan, Morigi Giovanna, Lewenstein Macie. *Phys. Rev. Lett*, 2008, 100, 050401.

- [31] Larson Jonas, Fernandez-vidal sonia, Morigi Giovanna, Lewenstein Macie. Quantum stability of Mott-insulator states of ultracold atoms in optical resonators. *New Journal of Physics*, 2008, 10, 045002-045025.
- [32] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy. *Quantum optics*. 世界图书出版公司, 1997, ch5-145.
- [33] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy. *Quantum optics*. 世界图书出版公司, 1997, ch6-193.
- [34] R. H. Dicke. Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Phys. Rev*, 1954, 93, 99-110.
- [35] Michael Tavis, Frederick W. cummings. Exact Solution for an N-Molecule -Radiation-Field Hamiltonian. *Phys. Rev*, 1968, 170, 379-384.
- [36] Michael Tavis, Frederick ,W. cummings. Approximate Solutions for an N-Molecule -Radiation-Field Hamiltonian. *Phys. Rev*. 1969, 188, 692-695.
- [37] Johann G. Danzl, Manfred J.Mark, Elmar Haller, Mattias Gustavsson, Russell Hart, Jesus Aldegunde, JeremyM. Hutson, Hanns-Christoph Näger, *Nature*, 2010, 6, 1533.
- [38] Peter Lambropoulos and David Petrosyan. *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Heidelberg, Springer, 2007, ch3-108, ch5-165.
- [39] 郭光灿. 量子光学.
- [40] C. W. Gardiner, P. Zoller. *Quantum Noise*. Heidelberg, Springer, 2000, ch3-42, ch5-130.

攻读学位期间取得的研究成果

1. 蔚小红, 郭利平. Λ 型冷原子气体与腔模的耦合系统. 山西大学学报(自然科学版). 第 33 卷

致 谢

论文的完成，标志着我的研究生生涯将告一段落了。理论所浓厚的学术氛围为我提供了一个良好的学习环境。三年来，在这样一个大集体中，每一位老师和同学都陪伴着我的成长，都在我的人生画卷上留下了浓墨重彩的一笔，是我宝贵的人生财富。

论文即将完成之际，谨向我的导师张云波教授表示最衷心的感谢。张老师严谨的治学态度、广博的科研知识和对学科前沿敏锐的洞察力深深地感染了我。从课题方向的选择到最终论文的完成，研究过程中的每个细节都倾注了张老师的心血和汗水。在张老师的指导和培养下，使我的科研思维和研究能力都有了很大的进步。

感谢梁九卿教授、李卫东教授、阎维贤教授、张素英教授、李志坚教授、姜晓庶副教授等各位任课老师的教导，让我受益匪浅。感谢聂一行教授、刘福虎教授和李禄教授的关心和帮助。

感谢郭利平、尹相国、王红梅、张杰、杜磊、梁成功、张梓良、吕晓龙、李花、毛丽君、梁晋菊、李甜甜、张小欧、刘太丰等学友给予我的关心和帮助。

感谢我挚爱的家人在生活上对我的关心，在精神上对我的理解和支持。同时也感谢我的朋友们对我默默的关爱和支持。

蔚小红

2010年5月于山西大学理论物理研究所

个人简况及联系方式

姓名：蔚小红

性别：女

籍贯：山西省吕梁市文水县

学习经历：2007年9月至2010年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

E-Mail: yxhhappy1985@yahoo.com.cn

承 诺 书

本人郑重声明：所提交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日