两分量BEC中的拓扑态

张鹏鸣

近代物理研究所

July 5, 2007

目录

- 为什么考虑多分量系统?

- 为什么考虑多分量系统?
- 多分量系统自然就导致了非阿贝尔的拓扑结构，有更丰富的物理内容

不同组分

- 组分：同一种元素的不同同位素，或者不同原子
  例如^{87}Rb和^{85}Rb

不同组分

- 组分：同一种元素的不同同位素，或者不同原子例如^{87}Rb和^{85}Rb
- 磁场中的不同超精细态，例如$^{87}Rb: |F=2, m_F=2>$ 和$|F=1, m_F=1>$两个态

不同组分

- 组分：同一种元素的不同同位素，或者不同原子例如^{87}Rb和^{85}Rb
- 磁场中的不同超精细态，例如$^{87}Rb: |F=2, m_F=2>$ 和$|F=1, m_F=1>$两个态
- 特点：每种组分的粒子数分别守恒

$$N_i = \int dr|\psi_i|^2$$

系统具有$U(1) \times U(1)$对称性

旋量BEC

- 同一元素的同一超精细结构的混合，原子在这些超精细态间可以跃迁。

旋量BEC

- 同一元素的同一超精细结构的混合，原子在这些超精细态间可以跃迁。
- 特点：总粒子数$N=\sum_i N_i$ 守恒

两分量BEC

- 两分量的Gross-Pitaevskii 拉氏量

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2}\{[\phi_1^\dagger(\partial_t\phi_1)-(\partial_t\phi_1^\dagger)\phi_1]+[\phi_2^\dagger(\partial_t\phi_2)-(\partial_t\phi_2^\dagger)\phi_2]\} \\
&\quad -\frac{\hbar^2}{2M}(|\partial_i\phi_1|^2+|\partial_i\phi_2|^2)+\mu_1\phi_1^\dagger\phi_1+\mu_2\phi_2^\dagger\phi_2 \\
&\quad -\frac{\lambda_{11}}{2}(\phi_1^\dagger\phi_1)^2-\lambda_{12}(\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_2)-\frac{\lambda_{22}}{2}(\phi_2^\dagger\phi_2)^2
\end{aligned}
$$

两分量BEC

- 两分量的Gross-Pitaevskii 拉氏量

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad = \quad & \frac{i\hbar}{2}\{[\phi_1^\dagger(\partial_t\phi_1) - (\partial_t\phi_1^\dagger)\phi_1] + [\phi_2^\dagger(\partial_t\phi_2) - (\partial_t\phi_2^\dagger)\phi_2]\} \\
& -\frac{\hbar^2}{2M}(|\partial_i\phi_1|^2 + |\partial_i\phi_2|^2) + \mu_1\phi_1^\dagger\phi_1 + \mu_2\phi_2^\dagger\phi_2 \\
& -\frac{\lambda_{11}}{2}(\phi_1^\dagger\phi_1)^2 - \lambda_{12}(\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_2) - \frac{\lambda_{22}}{2}(\phi_2^\dagger\phi_2)^2
\end{aligned}
$$

- 其中耦合常数λ_{ij}正比于散射长度a_{ij}

$$\lambda_{ij} = \frac{4\pi\hbar^2}{M}a_{ij}$$

两分量BEC

- 两分量的Gross-Pitaevskii 拉氏量

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \frac{i\hbar}{2}\{[\phi_1^\dagger(\partial_t\phi_1)-(\partial_t\phi_1^\dagger)\phi_1]+[\phi_2^\dagger(\partial_t\phi_2)-(\partial_t\phi_2^\dagger)\phi_2]\} \\
& -\frac{\hbar^2}{2M}(|\partial_i\phi_1|^2+|\partial_i\phi_2|^2)+\mu_1\phi_1^\dagger\phi_1+\mu_2\phi_2^\dagger\phi_2 \\
& -\frac{\lambda_{11}}{2}(\phi_1^\dagger\phi_1)^2-\lambda_{12}(\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_2)-\frac{\lambda_{22}}{2}(\phi_2^\dagger\phi_2)^2
\end{aligned}
$$

- 其中耦合常数λ_{ij}正比于散射长度a_{ij}

$$\lambda_{ij}=\frac{4\pi\hbar^2}{M}a_{ij}$$

- 对^{87}Rb，$a_{11}:a_{12}:a_{22}=1.03:1:0.97$，近似可以取

$$\lambda_{11}\simeq\lambda_{12}\simeq\lambda_{22}=\lambda$$

- 拉氏量可以写成紧凑的形式($\phi = (\phi_1, \phi_2)$)

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\phi^\dagger \partial_t \phi - \partial_t \phi^\dagger \phi) - \frac{\hbar^2}{2M}|\partial_i \phi|^2 - V(|\phi|) - \delta\mu \phi_2^\dagger \phi_2$$

- 拉氏量可以写成紧凑的形式($\phi = (\phi_1, \phi_2)$)

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\phi^\dagger \partial_t \phi - \partial_t \phi^\dagger \phi) - \frac{\hbar^2}{2M}|\partial_i \phi|^2 - V(|\phi|) - \delta\mu \phi_2^\dagger \phi_2$$

- 可以看出当$\mu_1 = \mu_2$，即$\delta\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$，系统具有$U(2)$对称性。$\delta\mu$项使对称性破缺到$U(1) \times U(1)$

- 考虑静止态情形，并将波函数表示成$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\xi \ (\xi^\dagger\xi = 1)$

- 考虑静止态情形，并将波函数表示成$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\xi$ $(\xi^\dagger\xi = 1)$
- 系统哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2|\partial_i\xi|^2 + \frac{\lambda}{8}(\rho^2 - \rho_0^2)^2 + \frac{\delta\mu}{2}\rho^2\xi_2^*\xi_2$$

I. 无核直涡旋解

- 取如下假设

$$\rho = \rho(\varrho), \qquad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(\varrho)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(\varrho)}{2} \end{pmatrix}$$

I. 无核直涡旋解

- 取如下假设

$$\rho = \rho(\varrho), \qquad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(\varrho)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(\varrho)}{2} \end{pmatrix}$$

- 这里的整体$U(1)$相因子不影响动力学被提出，ξ场的像空间是S^2，相应的拓扑缺陷由$\pi_2(S^2)$表示，拓扑荷表示为

$$Q = -\frac{i}{4\pi}\int \epsilon_{ij}\partial_i\xi^\dagger\partial_j\xi d^2x = n.$$

区别于单分量BEC中的普通涡旋态($\pi_1(S^1)$表征)。

I. 无核直涡旋解

- 取如下假设

$$\rho = \rho(\varrho), \qquad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(\varrho)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(\varrho)}{2} \end{pmatrix}$$

- 这里的整体$U(1)$相因子不影响动力学被提出，ξ场的像空间是S^2，相应的拓扑缺陷由$\pi_2(S^2)$表示，拓扑荷表示为

$$Q = -\frac{i}{4\pi}\int \epsilon_{ij}\partial_i\xi^\dagger\partial_j\xi d^2x = n.$$

区别于单分量BEC中的普通涡旋态($\pi_1(S^1)$表征)。

- 对于这类缺陷不需要一个波函数消失的核，因此边界条件可取为

$$\dot{\rho}(0) = 0, \qquad \rho(\infty) = 1,$$

$$f(0) = \pi, \qquad f(\infty) = 0,$$

数值解的结果

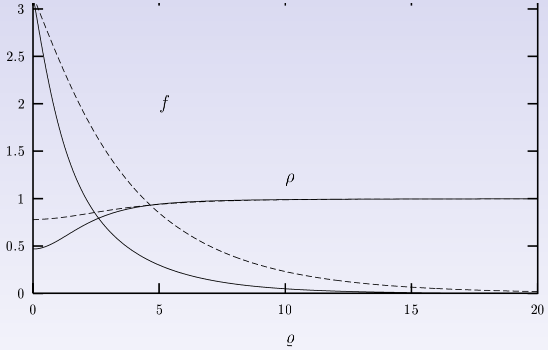
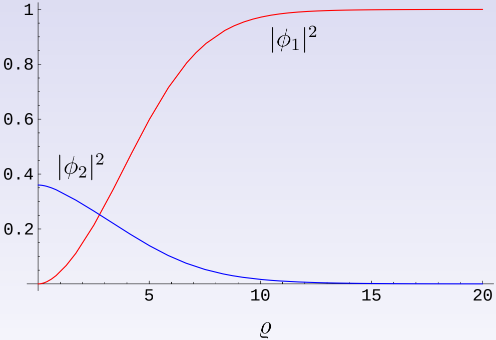
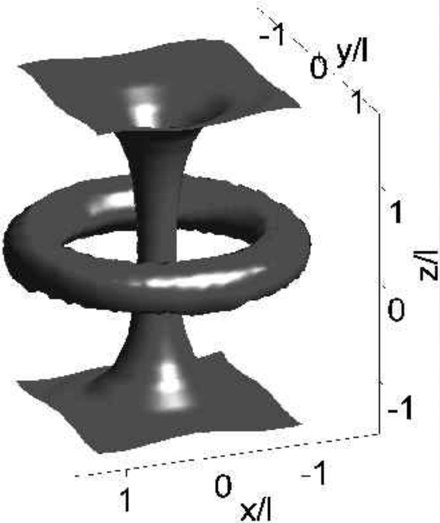


Figure: solid line $\delta\mu/\mu = 0.1$; dashed line $\delta\mu/\mu = 0.2$

两个分量的密度（$\delta\mu/\mu = 0.1$）



对应的涡旋解图像（示意图）



II. 螺旋涡旋解

- 取如下假设

$$\rho = \rho(\varrho), \qquad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(\varrho)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(\varrho)}{2}\exp(imkz) \end{pmatrix}$$

II. 螺旋涡旋解

- 取如下假设

$$\rho = \rho(\varrho), \qquad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(\varrho)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(\varrho)}{2}\exp(imkz) \end{pmatrix}$$

- 边界条件

$$\dot{\rho}(0) = 0, \quad \rho(\infty) = 1,$$
$$f(0) = \pi, \quad f(\infty) = 0,$$

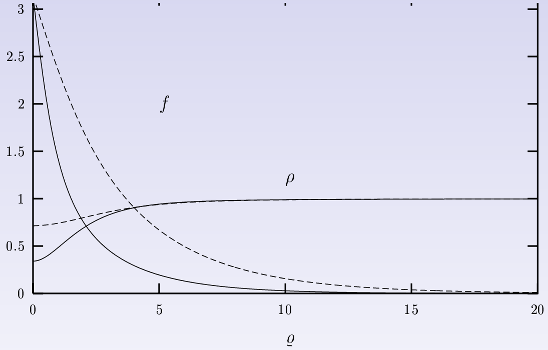


Figure: solid line $\delta\mu/\mu = 0$; dashed line $\delta\mu/\mu = 0.1$

涡旋度

- 定义诱导规范场

$$C_\mu = -i\xi^\dagger \partial_\mu \xi$$

相应的场强即vorticity

$$H_{\mu\nu} = -i(\partial_\mu \xi^\dagger \partial_\nu \xi - \partial_\nu \xi^\dagger \partial_\mu \xi)$$

涡旋度

- 定义诱导规范场

$$C_\mu = -i\xi^\dagger \partial_\mu \xi$$

相应的场强即vorticity

$$H_{\mu\nu} = -i(\partial_\mu \xi^\dagger \partial_\nu \xi - \partial_\nu \xi^\dagger \partial_\mu \xi)$$

- z方向的涡旋度为

$$\Phi_z = \int H_{\varrho\varphi} d\varrho d\varphi = -2\pi n$$

涡旋度

- 定义诱导规范场

$$C_\mu = -i\xi^\dagger \partial_\mu \xi$$

相应的场强即vorticity

$$H_{\mu\nu} = -i(\partial_\mu \xi^\dagger \partial_\nu \xi - \partial_\nu \xi^\dagger \partial_\mu \xi)$$

- z方向的涡旋度为

$$\Phi_z = \int H_{\varrho\varphi} d\varrho d\varphi = -2\pi n$$

- 这里重要的是φ 方向（即环绕z方向）的涡旋度(z方向在一个周期内0到$2\pi/k$)

$$\Phi_\varphi = \int_0^{2\pi/k} H_{z\varrho} dz d\varrho = 2\pi m$$

表明两个涡旋互相环绕。

引言

前面讨论的是无限长的涡旋线，对于三维系统，一个有限大小并且能量有限的拓扑态也是有趣的。但对于前面讨论的$U(2)$对称性的系统，由Derrick定理可知不存在有限大小的稳定拓扑态。人们考虑不同的方案试图得到有限尺寸的稳定拓扑态。

纽结的不同理论模型

- 相分离[1]，即两个分量空间上分开，粒子数分别守恒。要求

$$a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$$

^{87}Rb 满足上述条件，另外取近似 $\rho = const$

---

[1] Battye, PRL **88**, 080401 (1998)
[2] Metlitski, JHEP **06**, 017 (2004)

纽结的不同理论模型

- 相分离[1]，即两个分量空间上分开，粒子数分别守恒。要求

$$a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$$

^{87}Rb 满足上述条件，另外取近似 $\rho = const$

- vorton理论[2]，考虑核凝聚，要求一个环分量和一个凝聚的轴分量。要求

$$0 < \delta\mu/\mu_1 \leq 0.25$$

$\mu_1 = \mu_2$不存在纽结

[1] Battye, PRL **88**, 080401 (1998)
[2] Metlitski, JHEP **06**, 017 (2004)

规范理论模型

- 我们考虑了一种不同的机制得到稳定的有限尺寸的拓扑态[3]

[3] Cho, Khim and Zhang, PRA **72**, 063603 (2005)

规范理论模型

- 我们考虑了一种不同的机制得到稳定的有限尺寸的拓扑态[3]
- 两分量BEC的规范理论

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2}[\phi^\dagger(D_t\phi) - (D_t\phi)^\dagger\phi] - \frac{\hbar^2}{2M}|D_i\phi|^2 \\
&\quad -\frac{\lambda}{2}(\phi^\dagger\phi - \frac{\mu}{\lambda})^2 - \delta\mu\phi_2^*\phi_2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}^2
\end{aligned}
$$

[3] Cho, Khim and Zhang, PRA **72**, 063603 (2005)

规范理论模型

- 我们考虑了一种不同的机制得到稳定的有限尺寸的拓扑态[3]
- 两分量BEC的规范理论

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2}[\phi^\dagger(D_t\phi) - (D_t\phi)^\dagger\phi] - \frac{\hbar^2}{2M}|D_i\phi|^2 \\ &- \frac{\lambda}{2}(\phi^\dagger\phi - \frac{\mu}{\lambda})^2 - \delta\mu\phi_2^*\phi_2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}^2\end{aligned}$$

- 其中$D_\mu = \partial_\mu + igC_\mu$

$$C_\mu = -\frac{i}{g}\zeta^\dagger\partial_\mu\zeta = -\frac{i}{g}\xi^\dagger\partial_\mu\xi + \frac{1}{g}\partial_\mu\gamma,$$

$$H_{\mu\nu} = -\frac{i}{g}(\partial_\mu\xi^\dagger\partial_\nu\xi - \partial_\nu\xi^\dagger\partial_\mu\xi)$$

[3] Cho, Khim and Zhang, PRA **72**, 063603 (2005)

- 下面我们考虑$\delta\mu = 0$的情形，系统哈密顿量为（重新标度）

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2 + \frac{1}{2}(\rho^2-1)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(|\partial_i\xi|^2 - |\xi^\dagger\partial_i\xi|^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4g^2}(\partial_i\xi^\dagger\partial_j\xi - \partial_j\xi^\dagger\partial_i\xi)^2\end{aligned}$$

[4] Faddeev and Niemi, Nature **387**, 58 (1997)
[5] Cho, PRL **87**, 252001 (2001); PLB **603**, 88 (2004)

- 下面我们考虑$\delta\mu=0$的情形，系统哈密顿量为（重新标度）

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2+\frac{1}{2}(\rho^2-1)^2+\frac{1}{2}\rho^2(|\partial_i\xi|^2-|\xi^\dagger\partial_i\xi|^2) \\
&\quad -\frac{\lambda}{4g^2}(\partial_i\xi^\dagger\partial_j\xi-\partial_j\xi^\dagger\partial_i\xi)^2
\end{aligned}
$$

- 当ρ可以近似看成常数时，与Faddeev-Niemi模型类似[4]

$$
\mathcal{L}\sim(\partial_\mu n)^2+(n\cdot\partial_\mu n\times\partial_\nu n)^2
$$

[4] Faddeev and Niemi, Nature **387**, 58 (1997)

[5] Cho, PRL **87**, 252001 (2001); PLB **603**, 88 (2004)

- 下面我们考虑$\delta\mu = 0$的情形，系统哈密顿量为（重新标度）

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2 + \frac{1}{2}(\rho^2-1)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(|\partial_i\xi|^2 - |\xi^\dagger\partial_i\xi|^2) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4g^2}(\partial_i\xi^\dagger\partial_j\xi - \partial_j\xi^\dagger\partial_i\xi)^2
\end{aligned}
$$

- 当ρ可以近似看成常数时，与Faddeev-Niemi模型类似[4]

$$
\mathcal{L} \sim (\partial_\mu n)^2 + (n\cdot\partial_\mu n\times\partial_\nu n)^2
$$

- 一般情况下，两分量BEC的规范模型与Skyrme理论类似[5]

[4] Faddeev and Niemi, Nature **387**, 58 (1997)

[5] Cho, PRL **87**, 252001 (2001); PLB **603**, 88 (2004)

规范GP理论中的拓扑态I: 非阿贝尔单极

- 考虑单极构型（取球坐标）

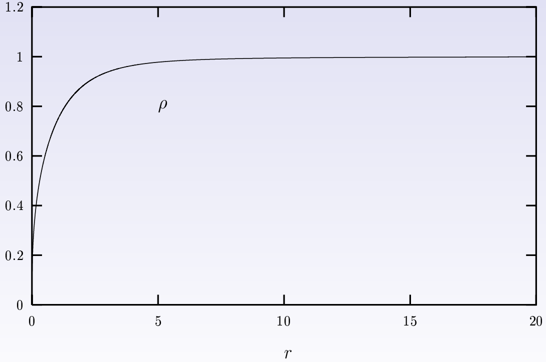
$$\rho = \rho(r), \quad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi) \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

规范GP理论中的拓扑态I: 非阿贝尔单极

- 考虑单极构型（取球坐标）

$$\rho = \rho(r), \quad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi) \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- 系统存在解

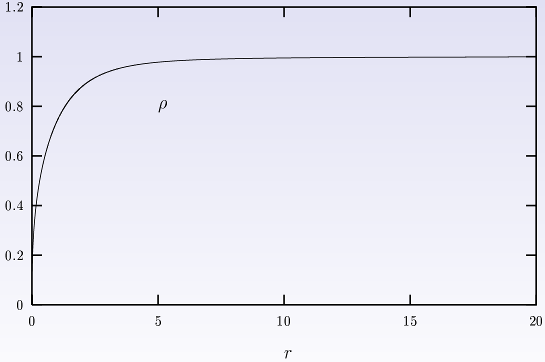


规范GP理论中的拓扑态I: 非阿贝尔单极

- 考虑单极构型（取球坐标）

$$\rho = \rho(r), \quad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi) \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- 系统存在解



- 上述解可以看作是被标量场ρ调制的Wu-Yang单极。

规范GP理论中的拓扑态II: 涡旋解

- 和普通GP理论类似，规范GP理论存在类似涡旋解

$$\rho = \rho(r), \quad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(r)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(r)}{2}\exp(imkz) \end{pmatrix}$$

规范GP理论中的拓扑态II: 涡旋解

- 和普通GP理论类似，规范GP理论存在类似涡旋解

$$\rho = \rho(r), \quad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(r)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(r)}{2}\exp(imkz) \end{pmatrix}$$

- 边界条件 $\dot{\rho}(0) = 0, \ \rho(\infty) = 1, \ f(0) = \pi, \ f(\infty) = 0$

规范GP理论中的拓扑态II: 涡旋解

- 和普通GP理论类似，规范GP理论存在类似涡旋解

$$\rho = \rho(r), \quad \xi = \begin{pmatrix} \cos\frac{f(r)}{2}\exp(-in\varphi) \\ \sin\frac{f(r)}{2}\exp(imkz) \end{pmatrix}$$

- 边界条件 $\dot{\rho}(0) = 0, \ \rho(\infty) = 1, \ f(0) = \pi, \ f(\infty) = 0$
- 存在解

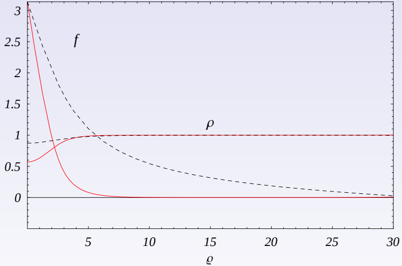


Figure: Solid line: non-Abelian vortex($n = 1, m = 0$); Dashed line: helical vortex ($n = m = 1$)

规范GP理论中的拓扑态II: 纽结

- 纽结是一类有限尺度的拓扑态，由$\pi_3(S^2)$表征。最简单的纽结是闭环

规范GP理论中的拓扑态II: 纽结

- 纽结是一类有限尺度的拓扑态，由$\pi_3(S^2)$表征。最简单的纽结是闭环
- 规范GP理论中的涡旋相互作用项就是保证这类稳定的拓扑态具有有限大小

规范GP理论中的拓扑态II: 纽结

- 纽结是一类有限尺度的拓扑态，由$\pi_3(S^2)$表征。最简单的纽结是闭环
- 规范GP理论中的涡旋相互作用项就是保证这类稳定的拓扑态具有有限大小
- 数学上引入环面坐标系(η, γ, φ)

$$x = \frac{a}{D}\sinh\eta\cos\varphi, \quad y = \frac{a}{D}\sinh\eta\sin\varphi,$$
$$z = \frac{a}{D}\sin\gamma,$$
$$D = \cosh\eta - \cos\gamma,$$

$\eta = \gamma = 0$表示R^3上的无限远，$\eta = \infty$表示环面中心。

- 考虑轴对称纽结

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(\eta,\gamma)\begin{pmatrix} \cos\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(-in\omega(\eta,\gamma)) \\ \sin\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(im\varphi) \end{pmatrix}$$

- 考虑轴对称纽结

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(\eta,\gamma)\begin{pmatrix} \cos\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(-in\omega(\eta,\gamma)) \\ \sin\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(im\varphi) \end{pmatrix}$$

- 边界条件取

$$\rho(0,0)=\rho_0,\quad \dot{\rho}(\infty,\gamma)=0,\quad f(0,\gamma)=0,\quad f(\infty,\gamma)=\pi$$
$$\omega(\eta,0)=0,\quad \omega(\eta,2\pi)=2\pi$$

- 考虑轴对称纽结

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(\eta,\gamma)\begin{pmatrix} \cos\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(-in\omega(\eta,\gamma)) \\ \sin\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(im\varphi) \end{pmatrix}$$

- 边界条件取

$$\rho(0,0)=\rho_0,\quad \dot{\rho}(\infty,\gamma)=0,\quad f(0,\gamma)=0,\quad f(\infty,\gamma)=\pi$$
$$\omega(\eta,0)=0,\quad \omega(\eta,2\pi)=2\pi$$

- 量子化的流通量

$$\Phi_\gamma = \int H_{\varphi\eta}d\eta d\varphi = -\frac{2\pi m}{g},$$
$$\Phi_\varphi = \int H_{\eta\gamma}d\eta d\gamma = \frac{2\pi n}{g}.$$

- 考虑轴对称纽结

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(\eta,\gamma)\begin{pmatrix} \cos\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(-in\omega(\eta,\gamma)) \\ \sin\frac{f(\eta,\gamma)}{2}\exp(im\varphi) \end{pmatrix}$$

- 边界条件取

$$\rho(0,0)=\rho_0,\quad \dot{\rho}(\infty,\gamma)=0,\quad f(0,\gamma)=0,\quad f(\infty,\gamma)=\pi$$
$$\omega(\eta,0)=0,\quad \omega(\eta,2\pi)=2\pi$$

- 量子化的流通量

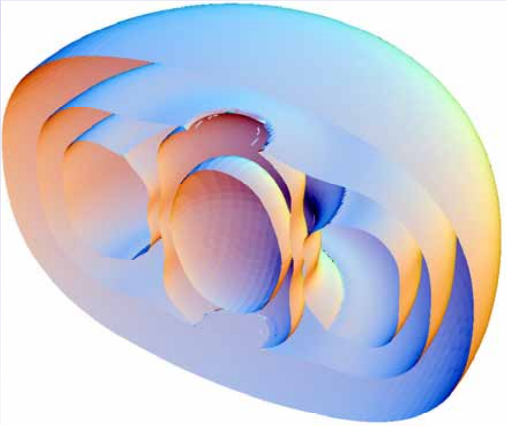
$$\Phi_\gamma = \int H_{\varphi\eta}d\eta d\varphi = -\frac{2\pi m}{g},$$
$$\Phi_\varphi = \int H_{\eta\gamma}d\eta d\gamma = \frac{2\pi n}{g}.$$

- 纽结量子数（Hopf不变量）

$$Q = \frac{1}{16\pi^2}\int \varepsilon_{ijk}C_iH_{jk}d^3x = mn$$

纽结解

数值给出的两分量BEC中的可能纽结态



我们计算了不同Hopf指数的纽结能量

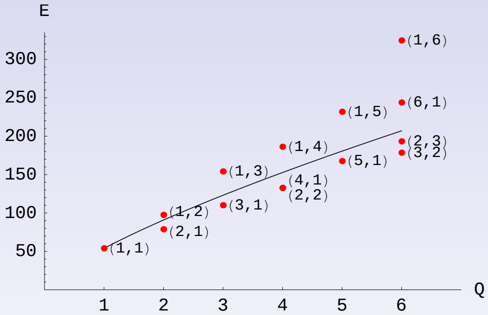


Figure: 实线对应于纽结能量曲线 $E_0Q^{3/4}$，其中 $E_0 = E(1,1)$。红点表示对应于不同纽结量子数 $Q = mn$ 的能量 $E(m,n)$.

谢　谢！