波粒二象性的描述和度量

陈平形

国防科大物理系

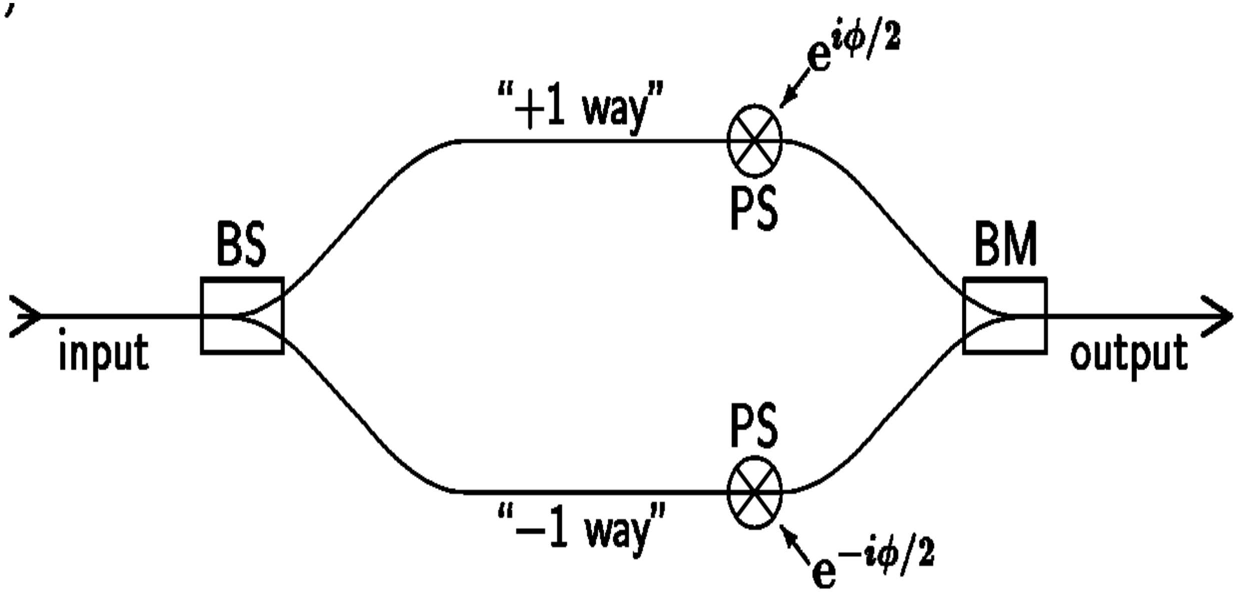
2008.9 郑

Introduction

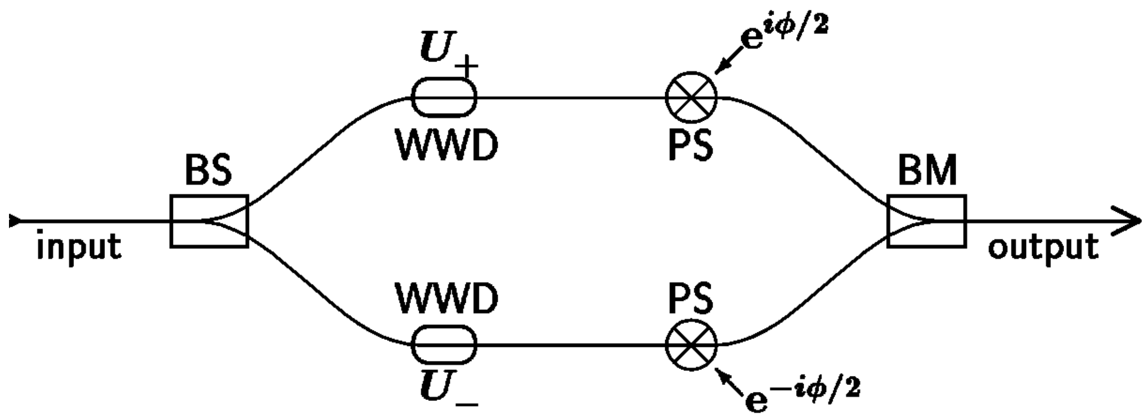
- Bohr 的互补原理指出，量子系统拥有相互排斥的二重性质。二重性的典型例子是波粒二象性（wave-particle duality）。

- 除二个极端情况外，如何定量的描述粒子性或波动性的程度?

以杨氏双缝干涉和Mach-Zehnder干涉为例讨



对这些two-way 干涉情况，量子（光子）确定的走哪条路径体现了其粒子性，而干涉体现了其波动性。如何定量的描述粒子性和波动性的程度？目前，公认干涉条纹的对比度V度量了波动性的程度，度量粒子性的程度则用获得的路径信息，即所谓的which-way information。



但用什么量来度量WWI的大小是值得探讨

怎样更好的描述波粒二象性，用什么量度量

Which-way information?

Motivation:

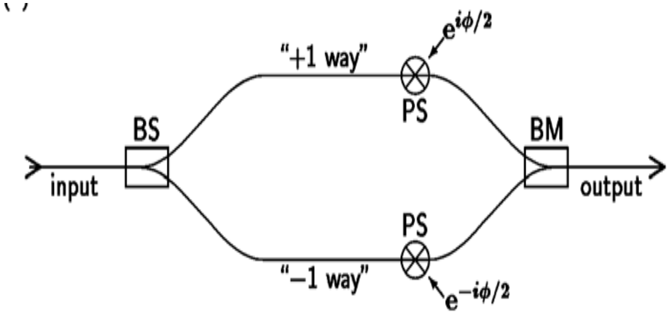
Which-way; n-photon interference;
correlation imaging; reversible process.

Outline

- 已有工作
- 我们的工作
- 结论和展望

已有工作

密度矩阵描述方法**[Phys. Rev. Lett 77, 2154(1996)]**



$$\rho_Q^{(i)} = \frac{1 + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + s_x^{(i)}\sigma_x + s_y^{(i)}\sigma_y + s_z^{(i)}\sigma_z\right)$$

其中Bloch 矢 $\mathbf{s}^{(i)} = \mathrm{tr}_Q\{\boldsymbol{\sigma}\rho_Q^{(i)}\}$

分束器和相移器对光子作用分别等效于幺正变换:

$$\rho_Q \to \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right)\rho_Q \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right)$$

$$\rho_Q \to \exp\left(-i\frac{\phi}{2}\sigma_z\right)\rho_Q \exp\left(i\frac{\phi}{2}\sigma_z\right)$$

光子以初始状态经二个分束器和相移器后的状态为:

$$\rho_Q^{(f)} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{s}^{(f)} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

其中:

$$\mathbf{s}^{(f)} = (-s_x^{(i)}, s_y^{(i)} \cos\phi + s_z^{(i)} \sin\phi, \\ s_y^{(i)} \sin\phi - s_z^{(i)} \cos\phi).$$

分束器一端测量到光子的概率与相移 ϕ 的关系为:

$$\begin{aligned} p_\phi &= \mathrm{tr}_Q\left\{\frac{1}{2}(1 - \sigma_z)\rho_Q^{(f)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}(1 - s_y^{(i)}\sin\phi + s_z^{(i)}\cos\phi) \end{aligned}$$

这样我们可得到干涉条纹的对比度

$$\mathcal{V}_0 = [(s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2]^{1/2}$$

常见的几种WWI:

1、定义WWI为*predictability*:

$$\mathcal{P} = |w_+ - w_-| = |s_x^{(i)}|$$

其中 $w_\pm$ 是光子经二条路径的几率,

$$w_\pm = \mathrm{tr}_Q\left\{\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_z)\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right)\rho_Q^{(i)}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right)\right\}$$

$$= \mathrm{tr}_Q\left\{\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_x)\rho_Q^{(f)}\right\} = \frac{1}{2}(1 \mp s_x^{(i)}) .$$

因此可得到二个互补量满足的不等

$$\mathcal{V}_0 = [(s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2]^{1/2}$$

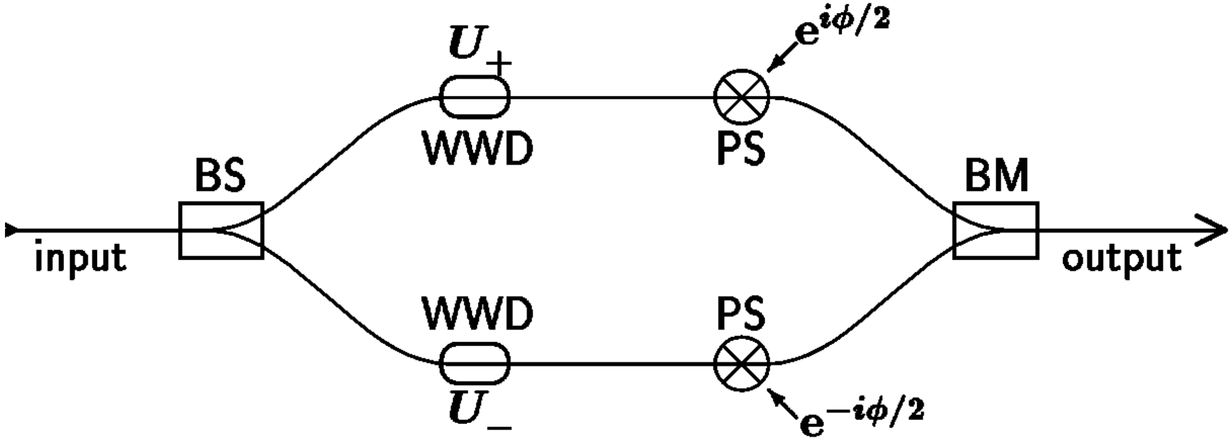
$$\mathcal{P} = |w_+ - w_-| = |s_x^{(i)}|$$

$$\boxed{\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 \leq 1}$$

对纯态上式取“=”，混合态取

W. K. Wootters and W. H . Zurek, Phys. Rev. D 19,473 (1979);
Greenberger and Yasin, Phys. Lett. A 128, 391(1988);
Berthold-Georg Englert, Phys. Rev. Lett 77, 2154(1996).

2、在干涉仪的二臂加探测器，以探测器获得的信息为WWI:



设想探测器和光子的初始状态

$$\rho^{(i)} = \rho_Q^{(i)} \rho_D^{(i)}$$

探测器的状态变化可描述

$$\rho_D \to \rho_D^{(\pm)} = U_\pm^+ \rho_D^i U_\pm$$

定义WWI为:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_D\{|\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)}|\} \qquad 0 \le D \le 1$$

它描述了探测器二个状态之间的“距离”。其物理意义是:利探测器对光子路径信息的定量测量,因为下式是猜对光子路的最大概率[W. K. Wootters and W. H . Zurek, Phys. Rev. D 19,473 (1979)],

$$L_{opt} = \frac{1}{2}(1 + D)$$

如果入射态是纯态,用上面的方法可证

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \le 1$$

Phys. Rev. Lett 77, 2154(1996).

3、定义WWI为[PRA75，052112]:

$$\Xi = \sqrt{D^2 + P^2 - D^2 P^2}$$

也可证

$$\Xi^2 + V^2 \leq 1$$

Ξ 的物理意义不清楚。

我们的工作:

- 把混合态拓展为大系统的纯态；将探测器状态的可区分程度定义为WWI。

对two-way Which-way 装置，设光子进入分束器之前的状态

$$\rho = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

这个混合态可以想象成纯态大系统中的子系统的

$$\Psi = \sqrt{p_1}|\psi_1\rangle|\varphi_1'\rangle + \sqrt{p_2}|\psi_2\rangle|\varphi_2'\rangle$$

$|\phi_1'\rangle, |\phi_2'\rangle$ 是正交归一的环境

光子经第一个分束器后，其状态变

$$\Psi = \sqrt{p_1}|\psi_1\rangle|\phi_1'\rangle + \sqrt{p_2}|\psi_2\rangle|\phi_2'\rangle \to \Psi' = |0\rangle|\phi_1\rangle + |1\rangle|\phi_2\rangle$$

设探测器初始状态为纯态，光子与探测器的相互作用可描述

$$\begin{aligned}
&U(\Psi'\otimes\psi_d^i) = U(|0\rangle\psi_d^i)|\phi_1\rangle + U(|1\rangle\psi_d^i)|\phi_2\rangle \\
&= |0\rangle U_1|\psi_d^i\rangle|\phi_1\rangle + |1\rangle U_2|\psi_d^i\rangle|\phi_2\rangle \\
&\equiv |0\rangle|\psi_d^{i1}\rangle|\phi_1\rangle + |1\rangle|\psi_d^{i2}\rangle|\phi_2\rangle \\
&\xrightarrow{\text{经相移后}} |0\rangle|\psi_d^{i1}\rangle|\phi_1\rangle + e^{i\phi}|1\rangle|\psi_d^{i2}\rangle|\phi_2\rangle \\
&= \cos\theta|0\rangle|\psi_d^{i1}\rangle|\varphi_1\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle|\psi_d^{i2}\rangle|\varphi_2\rangle
\end{aligned}$$

最后一个等号是将 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ 归一化而得

光子经第二个分束器后，从一个端口出来的概率为：

$$p \propto \left\| \cos\theta \left|\psi_d^{i1}\right\rangle \left|\varphi_1\right\rangle + e^{i\phi} \sin\theta \left|\psi_d^{i2}\right\rangle \left|\varphi_2\right\rangle \right\|$$
$$= 1 + ab\sin 2\theta\cos\varphi$$

因此由于相位改变导致的干涉条纹对比度为：

$$V = ab\sin 2\theta$$

其中：

$$a = \left|\left\langle \psi_d^{i2} \middle| \psi_d^{i1} \right\rangle\right|; \quad b = \left|\left\langle \varphi_2 \middle| \varphi_1 \right\rangle\right|$$

如果探测器初始状态为混合态：

$$\rho_D = \sum_j p_j \left| \psi_{dj}^i \right\rangle \left\langle \psi_{dj}^i \right|$$

同样将其想象成探测器与环境构成的大系统纯态而来：

$$\psi_D = \sum_j \sqrt{p_j} \left| \psi_{dj}^i \right\rangle \left| j \right\rangle$$

其中 $\left| j \right\rangle$ 是环境态。

光子经第一个分束器，与探测器作用，经相移，从第二个分束器出来后，整个系统态为

$$\cos\theta|0\rangle\underline{[\sum_j\sqrt{p_j}U_1|\psi_{dj}^i\rangle|j\rangle]}|\varphi_1\rangle+$$

$$e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle\underline{[\sum_j\sqrt{p_j}U_2|\psi_{dj}^i\rangle|j\rangle]}|\varphi_2\rangle$$

这与探测器初始是纯态的情况类似。

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\theta|0\rangle\underline{U_1|\psi_d^i\rangle}|\varphi_1\rangle+\\ e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle\underline{U_2|\psi_d^i\rangle}|\varphi_2\rangle\end{array}}$$

因此由于相位改变导致的干涉条纹对比度为:

$$V = a'b\sin 2\theta$$

其中:

$$a',\, a = \left|\left\langle \psi_d^{i2} \middle| \psi_d^{i1} \right\rangle\right|; \quad b = \left|\left\langle \varphi_2 \middle| \varphi_1 \right\rangle\right|$$

现在考虑WWI。

原则上区分光子上下路径对应的环境和探测器的状态，就能得到所有的WWI，而态的区分包括无误区分和最小错误区分。

先考虑无误区分。获得的WWI，就是无误区分下面二态的几率：

$$\left|\psi_d^{i1}\right\rangle\left|\varphi_1\right\rangle, \quad \left|\psi_d^{i2}\right\rangle\left|\varphi_2\right\rangle$$

每个态出现的概率分别为：

$$\cos^2\theta, \quad \sin^2\theta$$

或者区分下面二态的几率

$$\underline{[\sum_j \sqrt{p_j} U_1 \left|\psi_{dj}^i\right\rangle \left|j\right\rangle]}\left|\varphi_1\right\rangle, \underline{[\sum_j \sqrt{p_j} U_2 \left|\psi_{dj}^i\right\rangle \left|j\right\rangle]}\left|\varphi_2\right\rangle$$

由Bergou的理论，无误区分上述二个态的最大成功概率为:

$$p_{\max} = 1 - ab\sin 2\theta,\ or\ p_{\max} = 1 - a'b\sin 2\theta$$

因为是二个态区分，完全区分得到的信息是1比特，因此能获得的最大WWI为 $p_{\max}$

明显:

$$p_{\max} + V = 1$$

从上面的考虑可看出只要探测器和环境态都是可知的，即使他们都是混合态， the duality=1

PRA 70,022302 (2004)

如果考虑到环境态是不可知的，只能通过区分探测器的态来获得WWI，这对应区分态

$$\left|\psi_d^{i1}\right\rangle, \quad \left|\psi_d^{i2}\right\rangle$$

最大成功概率为

$$p_{\max} = 1 - a\sin 2\theta < 1 - ab\sin 2\theta$$

或者区分二个混合态

$$\sum_j p_j U_1 \left|\psi_{dj}^i\right\rangle\left\langle\psi_{dj}^i\right| U_1^+, \sum_j p_j U_2 \left|\psi_{dj}^i\right\rangle\left\langle\psi_{dj}^i\right| U_2^+$$

明显，最大成功概率

$$p_{\max} < 1 - a'\sin 2\theta$$

因此，

$$p_{\max} + V \le 1$$

当且仅当光子初始态和探测器初态都是纯态时，等号成立。

对最小错误区分，获得WWI，就是最小错误区分二态:

$$\left|\psi_d^{i1}\right\rangle\left|\varphi_1\right\rangle,\quad \left|\psi_d^{i2}\right\rangle\left|\varphi_2\right\rangle$$

或者区分二态

$$\underline{[\sum_j \sqrt{p_j}U_1\left|\psi_{dj}^{i}\right\rangle\left|j\right\rangle]}\left|\varphi_1\right\rangle,\underline{[\sum_j \sqrt{p_j}U_2\left|\psi_{dj}^{i}\right\rangle\left|j\right\rangle]}\left|\varphi_2\right\rangle$$

由态区分理论，最小错误区分上述二个态的最大成功概率为：

$$p_{\max} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - (ab \sin 2\theta)^2}\right)$$

其中 $D \equiv \sqrt{1-(ab\sin 2\theta)^2}$ 描述了态可区分的程度，反映了WWI。

明显：

$$p_{\max}^2 + V^2 = 1$$

如果考虑到环境态是不可知的，只能通过区分探测器的态来获得WWI，这对应区分态

$$\left|\psi_d^{i1}\right\rangle, \quad \left|\psi_d^{i2}\right\rangle$$

最大成功概率为

$$p_{\max} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-(a\sin 2\theta)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-(ab\sin 2\theta)^2}\right)$$

或者区分二个混合态

$$\sum_j p_j U_1 \left|\psi_{dj}^i\right\rangle\left\langle\psi_{dj}^i\right| U_1^+, \sum_j p_j U_2 \left|\psi_{dj}^i\right\rangle\left\langle\psi_{dj}^i\right| U_2^+$$

明显，最大成功概率

$$p_{\max} < \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-(ab\sin 2\theta)^2})$$

因此，

$$p_{\max}^2 + V^2 \leq 1$$

当且仅当光子初始态和探测器初态都是纯态时，等号成立。

因此，当且仅当光子初始态和探测器初态都是纯态时或者环境态是可知时，等号成立，即**duality**没有损失！

环境态的不可知对应信息丢失的不可逆过程，因此，
当且仅当过程是可逆时，**duality**才没有损失！

Conclusion and prospect

- 用波函数方法给出波粒二象性的描述
- 分别用无误区分和最小错误区分描述了WWI
- 说明了只有信息丢失过程可逆才不导致duality的减少
- 可推广到多光子情况

Thanks a lot