



2019 届硕士学位论文

一维准周期晶格中的安德森局域化

作者姓名	皇甫宏丽
指导教师	徐志浩 副教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	物理电子工程学院
学习年限	2016 年 9 月至 2019 年 6 月

二〇一九年六月

山西大学

2019 届硕士学位论文

一维准周期晶格中的安德森局域化

作者姓名	皇甫宏丽
指导教师	徐志浩 副教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	物理电子工程学院
学习年限	2016 年 9 月至 2019 年 6 月

二〇一九年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2019

**Anderson Localization in One-dimensional
Quasi-Periodical Lattices**

Student Name	Hongli Huangfu
Supervisor	Associate Prof. Zhihao Xu
Major	Condensed Matter Physics
Field of Research	Cold Atom Physics
Department	College of Physics and Electronic Engineering
Research Duration	2016.09-2019.06

June, 2019

目 录

中文摘要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪论	1
1.1 晶格系统	1
1.1.1 超冷原子	1
1.1.2 玻色—爱因斯坦凝聚	2
1.1.3 光晶格	2
1.2 无序模型	4
1.2.1 无序	4
1.2.2 安德森局域化和安德森模型	4
1.2.3 安德森局域化的实验实现	5
1.2.4 迁移率边	7
1.3 多体问题	7
1.3.1 多体局域化	7
1.4 本文安排	8
第二章 一维光晶格中的无序模型	9
2.1 简介	9
2.2 Aubry-André 模型	9
2.2.1 Aubry-André 模型的实现	9
2.2.2 Aubry-André 模型的对偶性	12
2.2.3 精确对角化方法	13
2.2.4 无序对基态波函数的影响	13
2.2.5 全能谱特征	15
2.3 具有迁移率边的一维准周期模型	15
2.3.1 广义的 Aubry-André 模型	16
2.3.2 长程跃迁模型	18
2.4 小结	19

第三章 一维准周期晶格中玻色子对的迁移率边.....	21
3.1 简介.....	21
3.2 理论模型及方法.....	22
3.3 玻色子对的迁移率边.....	22
3.4 小结.....	27
第四章 总结与展望.....	29
4.1 总结.....	29
4.2 展望.....	29
参考文献.....	31
攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目.....	37
致 谢.....	39
个人简况及联系方式.....	41
承 诺 书.....	43
学位论文使用授权声明.....	45

Contents

Chinese Abstract	I
ABSTRACT	III
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Lattice systems	1
1.1.1 Ultra-cold atoms	1
1.1.2 Bose-Einstein condensation	2
1.1.3 Optical lattices	2
1.2 Disorder models	4
1.2.1 Disorder	4
1.2.2 Anderson localization and Anderson model	4
1.2.3 Experimental realization of Anderson localization	5
1.2.4 Mobility edge	7
1.3 Many-body problem	7
1.3.1 Many-body localization	7
1.4 Arranging of this article	8
Chapter 2 Disorder models in one-dimensional optical lattices	9
2.1 Introduction	9
2.2 Aubry-André model	9
2.2.1 Realization of Aubry-André model	9
2.2.2 Duality of Aubry-André model	12
2.2.3 Exact diagonalization method	13
2.2.4 Effect of disorder on ground states	13
2.2.5 Features of full spectrum	15
2.3 One-dimensional quasi-periodical model with mobility edges	15
2.3.1 Generalized Aubry-André model	16
2.3.2 Long-range hopping model	18
2.4 Summary	19
Chaper 3 Mobility edges of bosonic pairs in one-dimensional quasi-periodical	

lattices	21
3.1 Introduction	21
3.2 Model and method.....	22
3.3 Mobility edges of bosonic pairs	22
3.4 Summary	27
Chapter 4 Summary and Outlook	29
4.1 Summary	29
4.2 Outlook	29
References	31
Research Achievements	37
Acknowledgment	39
Personal Profiles	41
Letter of Commitment	43
Authorization Statement	45

中文摘要

超冷原子的实现以及激光冷却原子技术开辟了冷原子物理这一新的研究领域,为在实验上实现玻色-爱因斯坦凝聚提供了充分的技术准备。实验上通常将原子捕获于由多束激光互相干涉形成的光晶格中来研究超冷原子的物理性质。随着“安德森局域化”概念的提出,人们便将无序的随机势引入光晶格中,发现当无序为零时,粒子呈现扩展态的性质,即其本征函数为布洛赫函数;而随着无序的逐渐增大,波函数在空间呈现指数衰减的特点,也意味着发生了安德森局域化现象。因此,无序体系的研究也受到了广泛关注,国内外科学家们尝试着在其它无序体系中研究安德森局域化。

Aubry 和 André 预测了在一维准周期光晶格中也存在安德森局域化转变,通过引入非公度的在位化学势,提出著名的 Aubry-André(AA)模型,掀起了人们对 AA 模型的研究热潮。本文介绍了经典的 AA 模型以及该模型下单粒子的一些性质。AA 模型具有一个安德森局域转变点 $\lambda/J=1$, 即当 $\lambda/J < 1$ 时, 本征态全部处于扩展态; $\lambda/J > 1$ 时, 所有的态都是局域态。在转变点处, 本征态具有多分形的特征。因此, AA 模型不存在迁移率边。通过改变在位化学势和格点间的跃迁规则, 出现了一系列推广的 AA 模型, 其迁移率边具有简洁的解析表达式。

迁移率边作为无序系统中最重要的概念之一总是受到格外关注。在具有相互作用的无序系统中, 希尔伯特空间的维度超过了计算的范围, 因此多体迁移率边的存在性一直是个开放性问题。本文研究了在强相互作用下的一维准周期晶格中, 运用微扰理论得到粒子对的有效哈密顿量, 从而得到玻色子对的迁移率边; 数值上, 利用精确对角化方法, 并且通过计算每个本征态标准参与率 (NPR) 值得到数值结果。分析了参数 b 取不同值时, 玻色子对迁移率边的数值结果和解析结果。 $b=0$ 和小 b 情况下, 数值结果和解析结果相吻合。特别地, $b=0$ 时, 迁移率边为 $\lambda \approx -1/E$, 随着相互作用强度的增大, 系统的扩展态区域和迁移率边将会消失。 $L \rightarrow \infty$ 极限下, 对系统的扩展态区域和局域态区域的 NPR 值做尺寸分析, 扩展态的 NPR 值正比于 $1/L$, 趋近于一个有限值; 局域态的 NPR 正比于 $(1/L)^2$, 趋近于 0。在 $b \rightarrow 1$ 时, 调制势是发散的, 解析表达式将不再适用。期望我们的结果可以打开多体迁移率边的新视野。

关键词: 光晶格; 安德森局域化; 无序; 迁移率边; 多体局域化

ABSTRACT

The realization of ultra-cold atoms and cooling atoms technology with laser have opened up a new field of researching on cold atom physics, providing sufficient technological preparation for the experimental realization of Bose-Einstein condensation. Experimentally, atoms are trapped in the optical lattices formed by interference of multiple laser beams to study the physical properties of ultra-cold atoms. With the introduction of the concept of "Anderson localization", one introduces the disordered random potential into the optical lattice, and finds that in the absence of the disorder, the particle exhibits an extended state, of which eigenfunction is Bloch function, and as the disorder increases gradually, the wave function exhibits exponential decay in space, which also means that Anderson localization occurs. Therefore, it becomes a focus of attention which will contribute to extensive investigation of Anderson localization in other disordered systems.

Aubry and André predicted that Anderson localization also exists in one-dimensional quasi-periodic optical lattices. They proposed the famous Aubry-André (AA) model by introducing the incommensurate on-site potential which aroused great interest in researching on AA model. This paper shows the classical AA model and some properties of single particles in this model. The Anderson localization transition point of AA model is at $\lambda/J=1$, when $\lambda/J < 1$, all eigenstates are extended and when $\lambda/J > 1$, all the states are localized. At the transition point, the eigenstates exhibit multifractal features. Hence, there is no mobility edges in AA model. By changing the forms of the on-site potential and the hopping rules between sites, there emerges a series of generalized AA models with a simple expression of mobility edges.

Mobility edge as one of the most important concepts in the disordered systems which draws great interest all the time. However, the existence of the many-body mobility edges in the interacting disordered systems is still an

open question due to the dimension of the Hilbert space beyond the numerical capacity. In this paper, we obtain the effective Hamiltonian of particle pairs by using the perturbation theory and obtain the mobility edges of the boson pairs trapped in one dimensional quasi-periodical lattices subjected to strongly interactions. And we get numerical results by the exact diagonalization method to calculate the standard participation rate (NPR) value of each eigenstate. The numerical calculations finely coincide with the analytic results for $b=0$ and small b cases. Especially, for $b=0$ case, the mobility edges of the bosonic pairs are described as $\lambda \approx -1/E$. The extended regime and the one with the mobility edges will vanish with the increase of the interaction U to infinity. We also study the scaling of the NPR with system size in both extended and localized regimes. The NPR of the extended states $\eta(E) \propto 1/L$ with the increase of L and $L \rightarrow \infty$, $\eta(E)$ tend to finite value, while for localized case, $\eta(E) \propto (1/L)^2$ tend to zero when $L \rightarrow \infty$. $b \rightarrow 1$ limits are also considered. Since the modulated potential approaches singularity when $b \rightarrow 1$, the analytic expression does not fit very well. We hope our theory will provide new insights for studying the many-body mobility edges.

Keywords: optical lattice; Anderson localization; disorder; mobility edge; many-body localization

第一章 绪论

1.1 晶格系统

1.1.1 超冷原子

在极低温环境（接近绝对零度）下，原子的量子力学性质将发生改变，此时的原子状态就称为超冷原子。通常通过扩散气体与激光场的相互作用来制备超冷原子样品，激光的发明促进了用光操纵原子的技术的发展。1975年，Hänch 和 Schawlow 首次提出用激光冷却原子，利用多普勒效应使原子上的辐射力依赖于其速度，这种技术称为多普勒冷却。如图 1.1 所示，为多普勒冷却原理图。在 x, y, z 三个方向分别加上由两束光组成的驻波光场，如图，在 6 束光的交汇处，原子将受到三维阻尼力的作用，在三个方向上都得到减速，使其动能降低，从而实现冷却。不久，多普勒冷却在理论上也给出了严格的证明，并且可以求得原子的冷却极限温度^[1]。

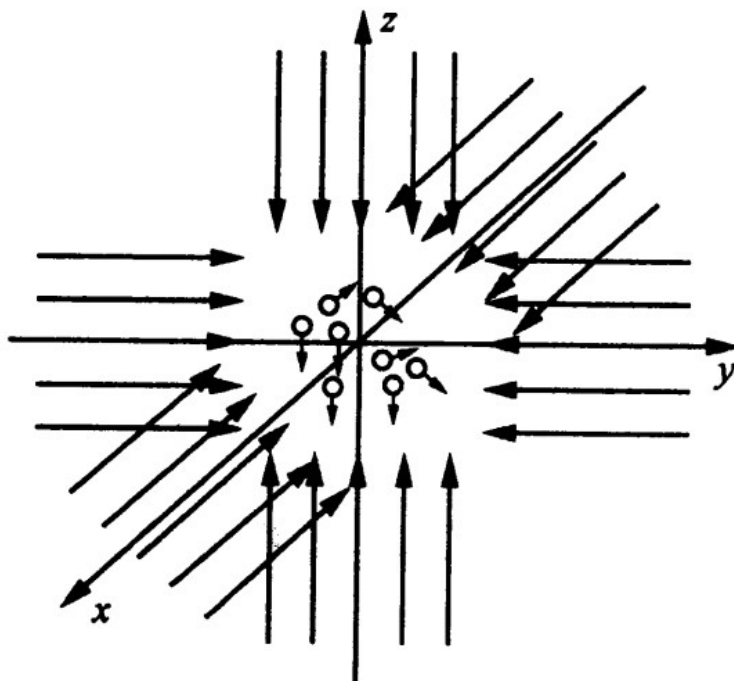


图 1.1 6 束激光的原子三维冷却图^[1]

在这之后，多普勒冷却在实验方面的实现不断推进。1985 年，由美国贝尔实验室的朱棣文带领的实验小组首次成功地实现了钠原子的冷却极限温度，为 $240 \mu K$ ^[2]，恰好为理论计算得到的多普勒冷却极限温度，并把 6 束激光交汇处的这团原子和光子集合体叫做“光学粘团”。之后，美国国家标准与技术研究所的 Phillips 研究组重

复了朱棣文的实验，让人意外的是，钠原子可以被冷却 $43 \mu K$ ^[3]，这远远低于钠原子的多普勒极限温度，这表明激光冷却可以将原子冷却到更低的温度。1987 年迈出了制造超冷原子样品的重要一步，Rabi 等人实现了第一个磁光阱 (MOT)，MOT 通过施加磁场将原子限制在空间中，使得激光不仅提供速度依赖力而且提供空间变化的力。使用 MOT 可以实现的典型温度为数十至数百 μK 。1997 年诺贝尔物理学奖授予了朱棣文，Cohen-Tannoudji 和 Phillips，表彰他们的激光冷却和捕获原子的技术。自此，冷原子物理学受到了各研究领域的关注，原子团的冷却技术也开始应用于玻色爱因斯坦凝聚实验的实现。

1.1.2 玻色—爱因斯坦凝聚

在正常温度下，玻色子可以处于任何一个能级，但在足够低的温度下，大部分玻色子会突然跌落到最低的能级上，此时，玻色子处于一种新的量子物态，称为玻色-爱因斯坦凝聚态(Bose-Einstein Condensation, 简称为 BEC)。此时的微观量子现象，特别是波函数干涉，在宏观上变得很明显。这种状态首先是由玻色和爱因斯坦于 1924 年预测的，并且提出玻色气体的概念，即具有整数自旋的全同粒子为玻色子。实现玻色爱因斯坦凝聚态的条件极为苛刻：需要极低的温度并且原子体系处于气态。金属原子气体不会因制冷出现液态，也不会因为高度聚集成为固态，所以实验上一般用金属原子来实现 BEC。

实验上 BEC 的实现通常要经历三个过程：(1) 得到实验所需的原子团：室温下利用磁光阱捕获；(2) 激光冷却原子团：用激光冷却至几十甚至几百 μK 数量级；(3) 继续蒸发冷却原子团：将原子团放到静磁阱中，使用蒸发冷却技术继续将原子团冷却直至达到 BEC 转变温度。1995 年 6 月，美国科学家康奈尔、维曼与德国科学家克特勒在铷原子蒸气中第一次观测到了玻色爱因斯坦凝聚态^[4-5]，并于 2001 年获得诺贝尔物理学奖^[6]。到目前为止，全世界已经实现了 9 种元素的 BEC，主要包括碱金属原子、氦原子和镱原子。玻色爱因斯坦凝聚引起了物理界的广泛关注，建立在 BEC 基础之上的研究发展迅猛，如超冷费米气体、BEC 中的相干性、约瑟夫效应和涡旋等现象。

1.1.3 光晶格

光晶格类似于固体物理中晶体的晶格结构，是由多束激光相互干涉形成的网状结构，是一种人造光晶体。干涉产生的周期势可通过斯塔克效应捕获超冷原子，被

冷却的原子将聚集在势能最小值的位置。相互干涉的波的数量和方式决定了光晶格的类型，通常有一维、二维和三维的光晶格。图 1.2 展示了二维和三维光晶格的示意图。1989 年 Dalibard 和 Cohen-Tannoudji 提出一维光晶格的理论实现原理，也就是周期势的实现，由两束反向传播的激光束相互叠加而形成^[7]，两激光束的干涉形成了一系列驻波，具有以下性质：

$$V_{0,x}(x) = V_{0,x} \sin^2(k_x x) \quad (1.1)$$

其中 $V_{0,x}$ 是光晶格势的深度， $k_x = 2\pi/\lambda_x$ 是激光的波矢， λ_x 是 x 方向激光的波长。而二维光晶格是由 4 束互相垂直的激光在同一个平面相互叠加形成，如图 1.2(a) 中的左图的方式，这样就可产生类似右图的一系列势能管。若在此基础上，如图 1.2(b) 的左图，再加两束与刚才 4 束激光都垂直的激光束，就可以得到形如 1.2(b) 中右图的三维简立方光晶格^[8]，即三个方向驻波的叠加，可用下式表示：

$$V_{sq} = V_{0,x} \sin^2(k_x x) + V_{0,y} \sin^2(k_y y) + V_{0,z} \sin^2(k_z z) \quad (1.2)$$

其中， $V_{0,\delta}$ ($\delta = x, y, z$) 是 δ 方向驻波的振幅。实验上第一次实现光晶格是在 1987 年。

光学晶格有两个重要参数：阱深和周期性。通过改变激光器的功率可以实时调谐光学晶格的阱深度，激光器通常由 AOM 控制。通过改变激光的波长或通过改变两个激光束之间的相对角度可以调节光学晶格的周期性。由于激光的波长不能在很大的范围内变化，因此晶格的周期性通常由激光束之间的相对角度来控制。由于光晶格良好的操控性，之后，光晶格便成为有关 BEC 方面的实验中不可或缺的部分。

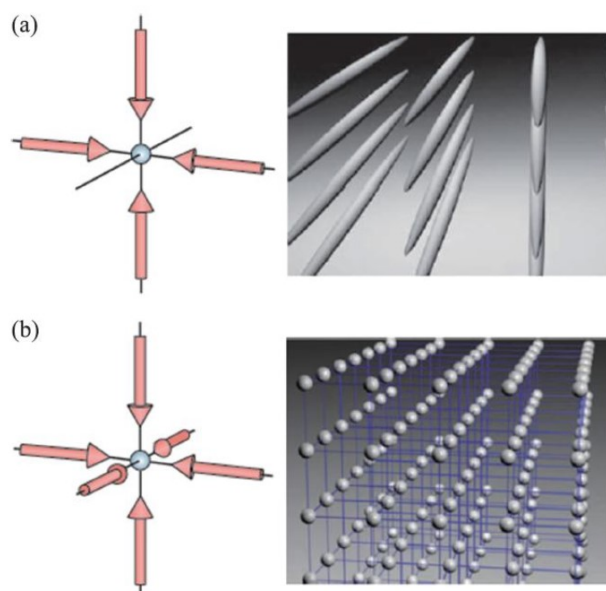


图 1.2 二维和三维晶格示意图^[8]

1.2 无序模型

1.2.1 无序

固体材料一般分为晶体、非晶体和准晶体。理想晶体中原子的排列有一定的几何规则，不同的晶体具有不同的晶格结构。固体物理中提到的简单立方晶格、体心立方晶格、六角密排晶格等体现了晶体中原子排列的周期性，其排列方式如图 1.3(a) 图所示，具有严格的周期性。当系统中这种严格的周期性遭到破坏时，即存在无序，图 1.3 为几种无序的示意图。根据晶体结构被破坏的方式和程度，无序大致可分为以下三类：(1)成分无序，如图 1.3(b)所示，晶格由多种原子组成，每种原子在晶格上的位置是随机的，即原子的排列不具有周期性，失去了长程有序，又可称为替代式无序；(2)位置无序，虽是同种原子，但原子的排列分布没有规则，近邻原子的分布发生畸变，固体非晶态材料一般属于这种情况，原子的排列方式如图 1.3(c)所示，晶格的形状发生了明显的扭曲。(3)拓扑无序，如图 1.3(d)，近邻原子的配位数和化学键的键长、键角均发生改变，并且有时还存在未饱和的悬挂键，此时的无序称为拓扑无序。无序材料是自然界中存在最广的一种材料，它不仅包括非晶态固体材料，如玻璃、金属玻璃、磁性玻璃、非晶半导体等，还包括杂质晶体、缺陷晶体、无序合金、有机高分子材料等。因此无序的研究，不仅是固体物理学的重要方向，而且也是现代材料科学发展的需要。

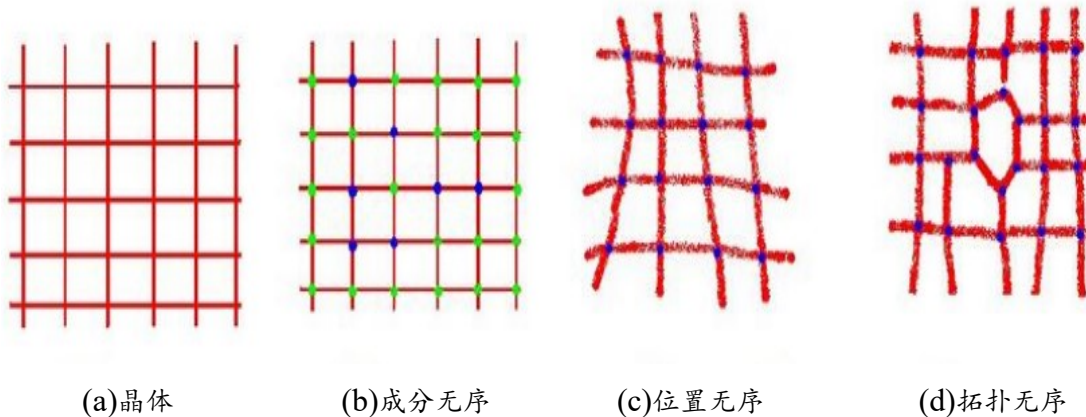


图 1.3 无序示意图^[9]

1.2.2 安德森局域化和安德森模型

1958 年，美国物理学家安德森 (P. W. Anderson) 首次指出无序系统的局域性，开创了无序系统研究的先河。他指出，若在导体内加入杂质，电子在传导时将被杂

质散射，散射波互相干扰使得导体内电子的运动受阻碍而停止，金属的导电性消失，呈现出绝缘体的性质。紧接着，他提出局域态和扩展态的概念。扩展态是指在具有周期性的晶格中，电子的运动体现共有化的性质，其本征函数为布洛赫波的形式；如果存在随机的无序杂质，晶格的周期性将被破坏，电子将局域在某处，其波函数在空间中呈现出指数衰减的特点，这种态称为局域态。在三维情况下，安德森提出，当无序强度大于某个临界值时，系统从金属向绝缘转变，并且提出了“安德森局域化”的概念，即无序导致波函数发生指数衰减，出现局域态的现象^[10]。

基于安德森局域化理论，如何在理论上实现随机的无序杂质？安德森设想通过改变化学势的周期性来引入无序，并且提出了著名的安德森模型^[10]，即在格点上加入随机变化的化学势来实现这种无序，一维安德森模型对应的哈密顿量为：

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + h.c.) + \sum_j \lambda_j \hat{n}_j \quad (1.3)$$

其中， J 为格点间的跃迁强度，这里仅考虑最近邻格点之间的跃迁， $\hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_j)$ 为 j 格点的产生（湮灭）算符， $\lambda_j \in [-W, W]$ 是所谓的安德森无序项，即每个晶格的势阱深度，在每个格点随机分布，无序的引入破坏了晶格的周期性，当无序值足够大时，粒子可被完全局域。安德森型无序提出以后，人们都尝试在化学势上做文章来实现无序，提出了一系列准周期模型，最经典的莫过于 1980 年由 Aubry 和 André^[11] 提出的 AA 模型，其无序由准随机变化的化学势来实现，这个模型将在第二章中做重点介绍。

1.2.3 安德森局域化的实验实现

安德森的成果吸引了许多物理学家对无序体系的关注，科学家们尝试在各种体系中观察安德森局域化现象，特别是由于冷原子系统良好的可控性和高度纯净的特点，为实现安德森局域化提供了可能。同时，在光波、声波、微波和电子气体中也都观察到了安德森局域化现象。2008 年 Juliette Billy 实验小组尝试利用光斑势在物质波中实现安德森局域化并取得了成功^[12]，如图 1.4(a)所示，为光斑势产生示意图，激光束照射到扩散板上，散射光通过透镜的聚焦作用在聚焦平面上形成散斑图，由于散射波相位的随机性导致了无序的产生，实验上可通过修改扩散板孔径的大小来改变光斑势，图 1.4(b)为各向异性的散斑图案^[13]。整个实验中，他们选用 1.7×10^4 个 ^{87}Rb 原子，利用光学散斑产生 BEC 并将它们捕陷于一个由横向半径为 $3\mu\text{m}$ 的光场与纵向半径为 $35\mu\text{m}$ 的磁场构成的混合阱中，如图 1.5(a)，显示了 BEC 的分布情况，可以

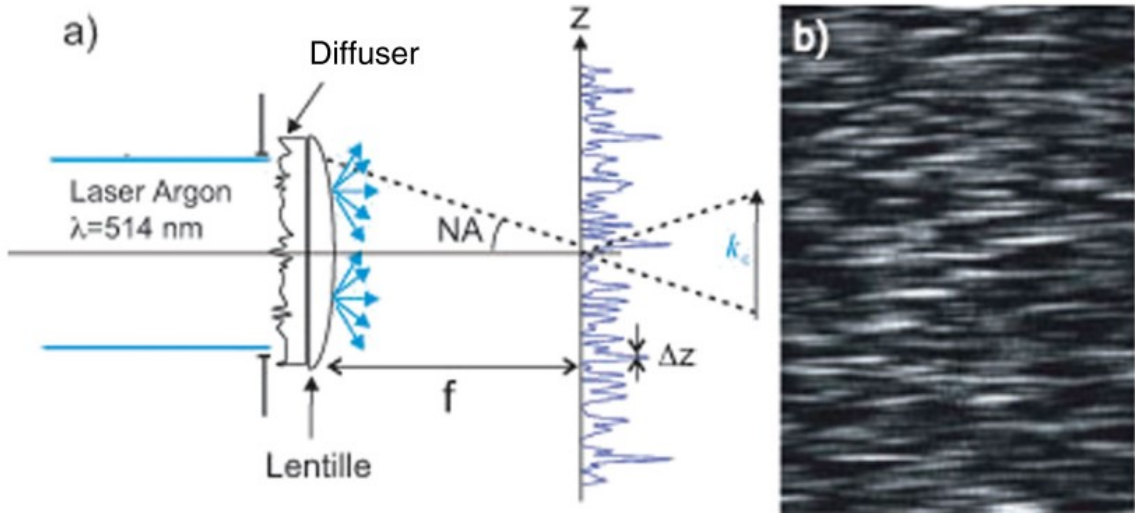


图 1.4 (a)产生光斑势的示意图；(b)各向异性的散斑图案^[13]

看到，纵向的那条细线即为 BEC 的分布位置。在 $t = 0$ 时开始计时并撤去纵向的磁场，同时激光器产生沿 z 轴方向的光波导，BEC 开始沿波导扩散，如图 1.5(b)为撤去势阱之后 BEC 的扩散，图 1.5(c)为 z 方向原子的密度分布图，淡粉色实线为 $t = 0$ 时刻的密度分布图，红色实线为撤去势阱后 1s 后原子的密度分布图，可以看到原子密度呈现指数分布的特点，蓝色实线为拟合的指数函数图像，这意味着出现了明显的安德森局域化现象^[12]。

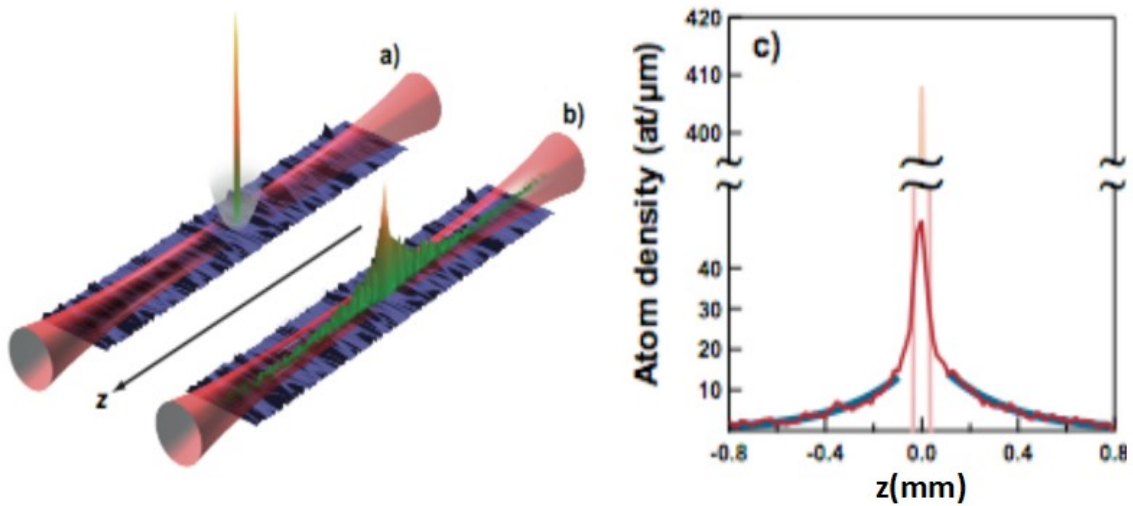


图 1.5 一维磁光阱中的安德森局域化^[12]

(a)磁光混合势阱中的 BEC 现象；(b)撤去势阱后的安德森局域现象；(c)原子在 z 方向的密度分布图

Roati 小组在一维准周期光晶格中也成功地观察到了安德森局域化现象^[14]，他们

将处于 BEC 态的 ^{39}K 原子放于光阱中, 通过调节简谐势阱的大小来改变 BEC 扩散的程度。当无序强度为 0 时, 粒子均匀地扩散于整个晶格, 体现出扩展态的性质, 随着无序的逐渐增大, 扩散的现象逐渐消失, 局域化现象越来越明显; 当无序增大到一定程度时, 粒子完全被局域, 趋向于局域在某个格点, 并且不随时间发生任何变化。这个结果完全符合安德森在 1958 年得出的理论结果。

1.2.4 迁移率边

基于安德森局域化理论, 人们开始研究无序系统的能谱。英国物理学家莫特^[15]提出了无序系统中的又一基本概念——迁移率边, 即如果无序不够强的话, 体系中可能同时存在扩展态和局域态, 区分扩展态和局域态的能量值称为迁移率边^[16]。如图 1.6 给出了无序系统电子能态密度的示意图, 阴影部分为带顶和带尾区域, 该区域内的电子态为局域态, 能带的中间空白部分为电子的扩展态区域, 两态的分界 E_c 和 E_c' 为迁移率边。无序的强度直接影响迁移率边的位置, 无序强度越大, 带尾态区域就越宽, 无序增大到两条迁移率边重合时, 所有的态将全是局域态。而对于任意一个给定的能量, 这个能量值所对应的态要么为扩展态, 要么为局域态。

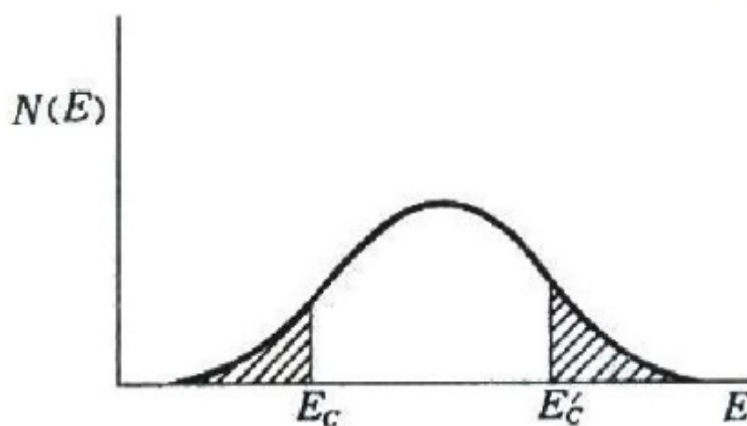


图 1.6 无序系统电子能态示意图^[9]

1.3 多体问题

由 N 个粒子组成的体系中, 由于粒子间存在相互作用使得体系复杂化, 薛定谔方程不能直接求解, 这类复杂的问题统称为多体问题。

1.3.1 多体局域化

无序与相互作用都存在的系统是凝聚态物理中非常受关注的话题之一。在一个

无相互作用的随机势存在的一维或二维系统中，任意小的无序都足以使单粒子态局域^[17-18]，而在三维系统中，单粒子迁移率边的出现会导致金属—安德森绝缘转变。在无序和相互作用都存在的系统中，多个粒子的安德森局域化现象能否发生、如何发生以及发生的条件一直都吸引科研工作者的强烈关注。一些理论研究表明，在强相互作用的多体系统中，高激发态上可以发生局域化。

多体局域化问题中常常会涉及到多体局域相和热化相，热化是具有相互作用的封闭系统经过长时间演化后达到热平衡的现象^[19-20]。不同于热化相的是，多体局域相对应的纠缠熵随时间对数增加，因此，实验中常用纠缠熵随时间的变化作为热化到多体局域化转变的判据。2015年，Schreiber等人第一次成功地观测到多体局域化现象^[21]，他们的系统为AA模型加入了在位相互作用的一维模型。2017年，在二维系统中，Bordia^[22]等成功观测到了多体局域化现象。最近，在具有迁移率边的系统中，Kohler^[23]等也实现了多体局域化。这些实验的完成对多体局域化方面的理论研究具有极大的促进作用。

1.4 本文安排

整个论文以晶格系统为出发点，主要介绍了一维准周期无序模型中的安德森局域化现象。首先介绍了超冷原子、玻色—爱因斯坦凝聚、类似于固体中晶格结构的晶格模型以及与无序模型相关的重要概念。第二章主要介绍无序模型中经典的AA模型以及该模型的一些性质，如安德森局域转变、自对偶性等，接着，介绍了两类具有迁移率边的一维准周期调制模型。论文的第三章在强相互作用极限下，通过微扰理论和精确对角化方法从理论上和数值方面研究了玻色子对的迁移率边。希望我们的结果能对多体局域化问题有所贡献。

第二章 一维光晶格中的无序模型

2.1 简介

上节中，我们对安德森局域化进行了详细介绍，局域化现象的描述首先需要具有无序的有效模型，然后使用标准量子力学技术来分析它们的影响。那么，一般用两个标准的方案来描述：第一个是 Anderson 模型^[10]，由格点能量的随机振幅表示无序，这在实验上并不好实现。另一个是由 Aubry 和 André 两位物理学家于 1980 年提出在玻色哈伯德模型中加入规律变化的化学势来实现无序，由此建立了标准的 AA 模型^[11]，该模型中的无序来源于两个具有非公度波长的晶格势相互叠加而成，在此无序晶格中存在金属—绝缘体转变，即具有扩展态和局域态的相变点。2008 年，Roati 实验小组第一次成功地在冷原子系统里模拟了 AA 模型，并且观测到了明显的安德森局域化现象^[14]。这一章，我们主要介绍 AA 模型以及它的相关性质，包括它的自对偶性、无序对能态的影响以及所有本征态能谱的特征等。AA 模型已成为研究其他无序系统或其他物理现象的一个重要平台，因此，人们热衷于在 AA 模型的基础上做一定的变形得到其他无序模型，例如在 AA 模型上加入 p 波配对项^[24-26]，多数用来研究安德森局域相与拓扑超导相的转变；或者在 AA 模型上加入多体相互作用来研究多体局域化转变^[27-29]。这一节的后面部分我们介绍了几种由 AA 模型变形得到的具有迁移率边的准周期模型，并且从理论上和数值上验证了单粒子在该模型下的迁移率边^[16, 30]。

2.2 Aubry-André 模型

2.2.1 Aubry-André 模型的实现

AA 模型是以超冷玻色子的一维哈密顿算符为出发点的，质量为 M 的玻色子限制在外势 $V(x)$ 中并受到接触势相互作用，它的表达式可写为：

$$\hat{H} = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(x) \right) \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} \frac{4\pi a_s \hbar^2}{M} \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \quad (2.1)$$

其中， a_s 为 s 波的散射长度， $\hat{\psi}^\dagger(x)$ ($\hat{\psi}(x)$) 是玻色子的产生（湮灭）场算符，遵循玻色子的对易关系 $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x)] = 1$ ，外势 $V(x)$ 由下式给出 $V(x) = V_T(x) + V_{opt}(x)$ ，其中， $V_T(x)$ 是缓慢变化的磁场谐波势阱， $V_{opt}(x)$ 是光学晶格势。图 2.1(a) 为 $V(x)$ 的草图。在

存在无序的情况下， $V_{opt}(x)$ 由两个光学晶格组成^[31]，主晶格 $V_1(x) = s_1 E_{R_1} \sin^2(k_1 x)$ ，用于为原子创建一个紧束缚环境，次晶格 $V_2(x) = s_2 E_{R_2} \sin^2(k_2 x + \theta)$ 创建了光学无序^[32]。

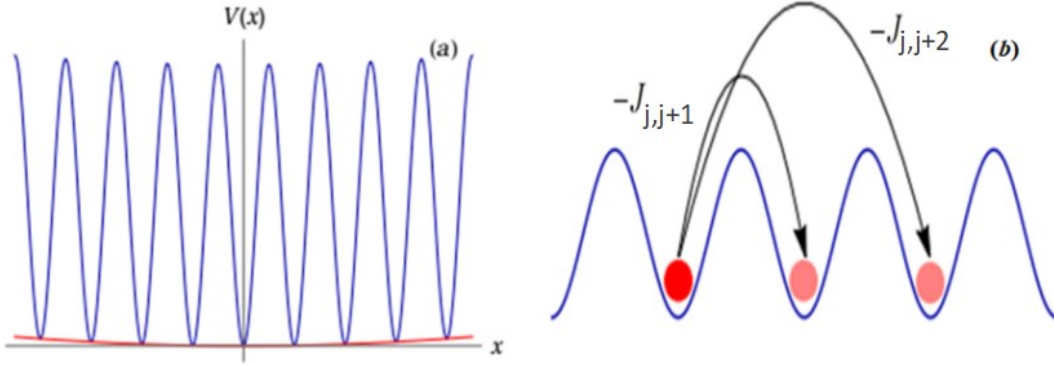


图 2.1 (a)外势 $V(x)$ 的示意图，由磁场谐波势 $V_T(x)$ 和光学晶格势 $V_{opt}(x)$ 组成

(b)粒子在晶格中跳跃的示意图^[33]

主次晶格相互叠加产生了以下双色光晶格势：

$$\begin{aligned} V_{opt}(x) &= V_1(x) + V_2(x) = s_1 E_{R_1} \sin^2(k_1 x) + s_2 E_{R_2} \sin^2(k_2 x + \theta) \\ &= s_1 E_{R_1} \sin^2(k_1 x) + s_2 E_{R_2} \sin^2(\alpha k_1 x + \theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 s_j 是以反冲能量 $E_{R_j} = \hbar^2 / 2M\lambda_j'^2$ 为单位的格子的高度， $k_j = 2\pi / \lambda_j'$ ($j=1,2$)是波矢量， λ_j' 是激光的波长， $\alpha = \lambda_1' / \lambda_2'$ 为两束激光波长之间的比率， α 是非公度的数，为了确保系统在适当的大小内保持非周期性，通常取 $\alpha = (\sqrt{5} - 1) / 2$ 。如图 2.1(a)所示，蓝色的实线为双色光晶格的示意图。

对于单个原子并且无序 $s_2 = 0$ ，等式(2.1)的本征态是布洛赫 (Bloch) 波函数。众所周知，布洛赫态的线性组合产生瓦尼尔 (Wannier) 波函数 $\omega(x - x_j)$ ，其特征是晶格位置 j 周围具有较大几率幅。瓦尼尔函数具有正交性和定域性，因此，常用来描述单格点上的原子状态。在瓦尼尔基下，展开玻色场算符 $\hat{\psi}(x)$ 和 $\hat{\psi}^\dagger(x)$ ：

$$\hat{\psi}(x) = \sum_j \hat{c}_j \omega(x - x_j) \quad (2.3)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_j \hat{c}_j^\dagger \omega^*(x - x_j) \quad (2.4)$$

\hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_j) 是瓦尼尔基下格点 j 上粒子的产生 (湮灭) 算符。它们满足如下对易关系：

$$[\hat{c}_u, \hat{c}_j^\dagger] = \delta_{uj} \quad (2.5)$$

$$[\hat{c}_u, \hat{c}_j] = [\hat{c}_u^\dagger, \hat{c}_j^\dagger] = 0 \quad (2.6)$$

对于弱无序即 $s_2 \ll s_1$ ，次级晶格只会轻微地改变由主晶格产生的势能极小值的位置^[34]，也就是说主晶格的最小值不会发生显著变化，利用玻色场算符的展开式，

得到下面哈密顿量:

$$\hat{H} = -\sum_{u,j} J_{uj} \hat{c}_u^\dagger \hat{c}_j + \sum_{u,j} \tau_{uj} \hat{c}_u^\dagger \hat{c}_j + \sum_{u,j} \lambda_{uj} \hat{c}_u^\dagger \hat{c}_j + \sum_{u,j,l,v} U'_{u,j,l,v} \hat{c}_u^\dagger \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_l \hat{c}_v \quad (2.7)$$

这里我们定义了以下常量:

$$J_{u,j} = -\int dx \omega^*(x-x_u) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + s_1 E_{R_1} \sin^2(k_1 x) \right) \omega(x-x_j) \quad (2.8)$$

$$\tau_{u,j} = \int dx \omega^*(x-x_u) V_T(x) \omega(x-x_j) \quad (2.9)$$

$$\lambda_{u,j} = s_2 E_{R_2} \int dx \omega^*(x-x_u) \sin^2(\alpha k_1 x + \theta) \omega(x-x_j) \quad (2.10)$$

$$U'_{u,j,l,v} = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{2M} \int dx \omega^*(x-x_u) \omega^*(x-x_j) \omega(x-x_l) \omega(x-x_v) \quad (2.11)$$

方程(2.7)中的第一项描述了原子从格点 u 跳到格点 j 所需能量, $u \neq j$, 如图 2.1(b)所示为粒子在光晶格中跳跃的示意图。跃迁几率 J_{uj} 与不同格点瓦尼尔函数的交叠成比例。这里我们应用紧束缚近似方法, 即这种重叠只对最近邻格点起作用, 忽略次近邻之间的跃迁效应。主晶格势最小值间距近似不变, 晶格常数 $a = \lambda_1' / 2$, 跳跃系数 J_{uj} 变为与格点无关的常数 J 。对于 $u = j$ 的情况, J_{jj} 项表示同一格点能量的偏移, 这对于所有格点都相等, 因此可以忽略。此外, 第二项 τ_{uj} 代表能量在不同格点的转换, 假设谐波势阱的振荡频率为 ω_T , 振荡的基态波函数振幅 $\sqrt{\hbar / (M\omega_T)}$, 考虑赝势近似, 并且我们需要从第一激发带分离能量, 要求 $\sqrt{\hbar / (M\omega_T)} \ll a$, 因此忽略谐波势阱的贡献^[34]。等式(2.7)中的第三项是晶格中的无序项。为了处理它, 我们首先使用三角关系 $\sin^2(\alpha k_1 x + \theta) = (1 - \cos(2\alpha k_1 x + \varphi')) / 2$, 其中 $\varphi' = 2\theta$ 。将此关系代入等式(2.10)并删除常量, 可以得到:

$$\lambda_{uj} = -\frac{s_2 E_{R_2}}{2} \int dx \omega^*(x-x_u) \cos(2\alpha k_1 x + \varphi') \omega(x-x_j) \quad (2.12)$$

同样, 对于足够深的晶格, 式(2.12)的主要贡献是 $u = j$ 项, 这对应于同一格点能量的偏移。我们做如下变换, 令 $y = x - x_j$ 的变化, 得到

$$\lambda_{jj} = -\frac{s_2 E_{R_2}}{2} \int dy \cos[2\alpha k_1 (y + x_j) + \varphi'] |\omega(y)|^2 \quad (2.13)$$

在紧束缚近似中, 瓦尼尔函数是高度局域化, 因此令 $x_j \rightarrow ja$, 并运用三角变换

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha k_1 y + 2\alpha k_1 ja + \varphi') &= \cos(2\pi\alpha j + \varphi') \cos(2\alpha k_1 y) \\ &\quad - \sin(2\pi\alpha j + \varphi') \sin(2\alpha k_1 y) \end{aligned} \quad (2.14)$$

代入(2.13)式，且利用对称性质去解正弦积分，式(2.13)变为

$$\lambda_{jj} = -\frac{s_2 E_{R_2}}{2} \cos(2\pi\alpha j + \varphi') \int dy \cos(2\alpha k_1 y) |\omega(y)|^2 \quad (2.15)$$

令 $\varphi = \varphi' + \pi$ ，并且定义 $\lambda = \frac{s_2 E_{R_2}}{4} \int dy \cos(2\alpha k_1 y) |\omega(y)|^2$ ，得到一般无序项为：

$$\lambda_{ij} = 2\lambda \cos(2\pi\alpha j + \varphi) \delta_{ij} \quad (2.16)$$

通过考虑紧束缚近似，可以简化相互作用能量项，即仅考虑 $u = j = l = v$ ，相互作用强度为：

$$U' = U'_{j,j,j,j} = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{2M} \int dx |\omega(x)|^4 \quad (2.17)$$

令 $U = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{M} \int dx |\omega(x)|^4$ ，得到化学势调制的一维准周期玻色哈伯德模型，其哈密顿量为：

$$\hat{H} = -J \sum_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \lambda_j \hat{n}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) \quad (2.18)$$

其中， $\lambda_j = 2\lambda \cos(2\pi\alpha j + \varphi)$ ， $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$ 是格点 j 上的粒子数算符。令 $U = 0$ ，在实验上通过菲斯巴赫（Feshbach）共振技术^[35]调节原子间的相互作用强度为零，得到经典的 Aubry 和 André 的实验实现^[14]模型，即 AA 模型，这里把它的哈密顿量表示为：

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \sum_j \lambda_j \hat{n}_j \quad (2.19)$$

该模型以及相互作用的模型已经在双色光晶格中的超冷原子^[31,33]实验中实现。

2.2.2 Aubry-André 模型的对偶性

AA 模型下单粒子的定态薛定谔方程可写为：

$$-J(\phi(j+1) + \phi(j-1)) + 2\lambda \cos(2\pi\alpha j + \varphi) \phi(j) = \varepsilon \phi(j) \quad (2.20)$$

$\phi(j)$ 为本征态在第 j 个格点的几率幅，1980 年，Aubry 和 André 找到如下变换：

$$\Phi(j') = \sum_j e^{2\pi i \alpha j' j} \phi(j) \quad (2.21)$$

将(2.21)式代入(2.20)式，同时令 $\varphi = 0$ ，可以得到式(2.20)的对偶方程：

$$\lambda(\Phi(j'+1) + \Phi(j'-1)) - 2J \cos(2\pi\alpha j') \Phi(j') = \varepsilon \Phi(j') \quad (2.22)$$

其中， j' 表示对偶空间的格点指标， $\Phi(j')$ 为对偶空间本征态在第 j' 个格点的几率幅。对比(2.20)式和(2.22)式，两个方程具有相同的结构。当波函数在坐标空间处于局域态时，在对偶空间处于扩展态，反之亦然。由此得到， $|\lambda| = |J|$ 是扩展态和局域态的转变点。

2.2.3 精确对角化方法

精确对角化方法是得到哈密顿量本征值和对应波函数的直接方法。首先，必须将哈密顿量写成矩阵形式，其次，对它进行对角化处理后就可以得到本征值和本征波函数。(2.20)式两边同时除以 J ，设定能量标度，得到无量纲方程：

$$-\phi(j+1) - \phi(j-1) + \frac{2\lambda}{J} \cos(2\pi\alpha j + \varphi) \phi(j) = \frac{\varepsilon}{J} \phi(j) \quad (2.23)$$

等式(2.23)写成矩阵形式，其哈密顿矩阵为：

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2\lambda/J \cos(1*2\pi\alpha + \varphi) & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\lambda/J \cos(2*2\pi\alpha + \varphi) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2\lambda/J \cos(L*2\pi\alpha + \varphi) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

从哈密顿矩阵(2.24)可以看出，在我们的数值计算采取开边界条件。在下面的计算中，我们取 $\lambda, J > 0$ ，并令 $L = 601$ ，对于较大的尺寸有类似的结果。

2.2.4 无序对基态波函数的影响

现在，我们找到矩阵 \mathbf{H} 的特征值和特征向量。图 2.2 是我们利用数值求出的基态波函数在每个格点上的密度分布 $\rho_j = |\phi_1(j)|^2$ ， $\phi_1(j)$ 是基态下第 j 个格点的几率幅。在图 2.2(a)中，我们画出零无序时的基态密度，正如人们所预料的那样，在没有任何无序

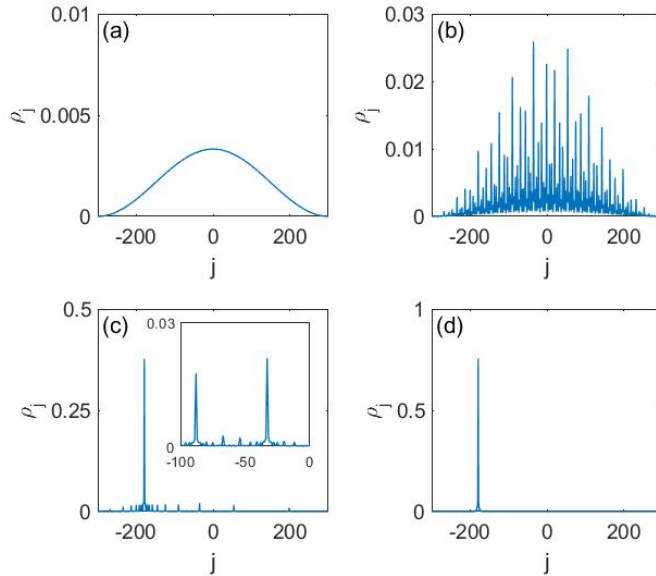


图 2.2 参数 λ/J 取不同值时，基态波函数在每个格点上的密度分布

(a) $\lambda/J = 0$ (b) $\lambda/J = 0.9$ (c) $\lambda/J = 1$ (d) $\lambda/J = 1.1$, $\varphi = \pi/5$

的情况下，粒子的密度在所有的格点上均有分布，且粒子密度不出现尖锐的峰值，

这表明粒子在晶格中是非局域的。图 2.2 (b)为 $\lambda/J=0.9$ 时的基态密度，可以发现基态的密度分布有多个峰值，这说明格点之间存在不同的深度差。然而，波函数仍然在所有晶格上扩展，此时，仍然处于扩展态。当 $\lambda/J \geq 1$ 时，取两个不同的无序的值观察基态的密度分布，图 2.2 (c)对应的是 $\lambda/J=1$ ，图 2.2 (d)对应于 $\lambda/J=1.1$ 。从这些密度分布图可以看出， $\lambda/J=1$ 表示扩展态到局域态的过渡状态，此时的波函数既不属于局域态，也不属于扩展态，而是体现出多分形的性质^[36-37]，图 2.2 (c)的小图表示中间格点左边 101 个点密度图的放大。 $\lambda/J=1.1$ 表示当无序振幅增大时，局域化程度也随之增大，图 2.2 (d)中可以看到基态波函数基本完全局域于一个格点，在那个格点上的密度接近于 1，此时的波函数处于局域态。

在描述局域化转变时，文献中广泛使用的一个参数是逆参与率 (inverse participation ratio, 简记为 IPR)。对于一个标准态，IPR 的定义为：

$$IPR(\phi_r) = \frac{\sum_j |\phi_r(j)|^4}{\left(\sum_j |\phi_r(j)|^2 \right)^2} \quad (2.25)$$

IPR 给出了波函数占据的格点数的倒数。对于扩展态波函数，IPR 随着尺寸的增大趋近于零，它的值大约为 $1/L$ ；而对于局域态，IPR 是一个有限大的数，并不会随着系统尺寸变化而变化。当它的值为 1 时，对应于单个格点上的局域态。IPR 可以用来辨别单粒子波函数所处的是局域态还是扩展态。图 2.3 为基态波函数的 IPR 值与参数 λ/J 的关系图，图中的每个点对应于 100 个相位 φ 随机抽样的平均值。在 $\lambda/J < 1$ 时，

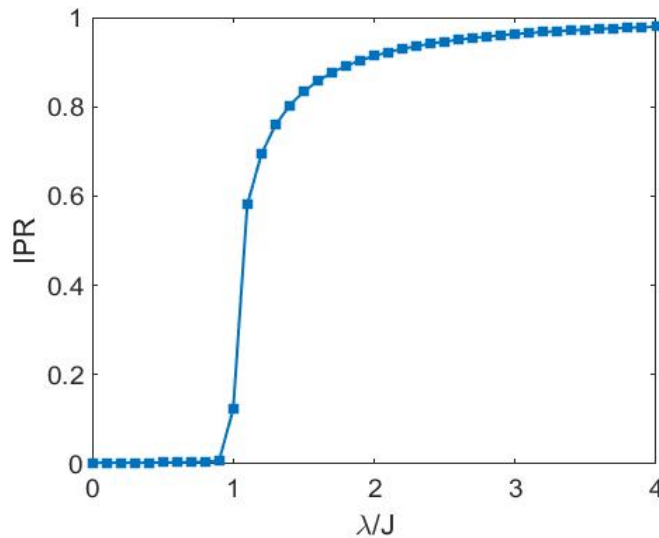


图 2.3 基态的 IPR 值随参数 λ/J 的变化

IPR 趋近于 0，而当 $\lambda/J > 1$ 时，随着无序强度的增大，IPR 的值越来越趋近于 1，在局域转变点处 IPR 的值有一个突变，这个特征使得 IPR 成为研究局域化转变的一个很好的参数。IPR 曲线的这种特殊行为是导出 AA 模型时使用紧束缚近似的直接结果^[36]。然而，当考虑次近邻的格点时，两条曲线之间将出现明显的重叠^[37-39]。

2.2.5 全能谱特征

这一节，我们首先取不同的无序强度，画出了 AA 模型中，IPR 值随参数 λ/J 和本征值的变化，图上的每一个点表示 IPR 的值，黑色代表扩展态，黄色表示 IPR 的值接近于 1，表示粒子将完全局域在某一格点。蓝色的实线为扩展态到局域态的转变点 $\lambda = J$ ，很容易看到，蓝色实线左边的能态全部处于扩展态，右边的能态全部处于局域态。由图 2.4(b)所示，AA 模型中不存在迁移率边，蓝色实线的表达式为 $\lambda/J = 1$ 。图 2.4 (a)画出了 AA 模型局域态转变点处的能谱与参数 α 的函数，相位 $\varphi = 0$ 。在前面的计算中，我们保证了 α 的非公度性，取 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ ，这里作为一个变量取 $\alpha \in [0, 1)$ ， $\lambda/J = 1$ 时，能谱图为 Hofstadter 蝴蝶谱^[40-41]。

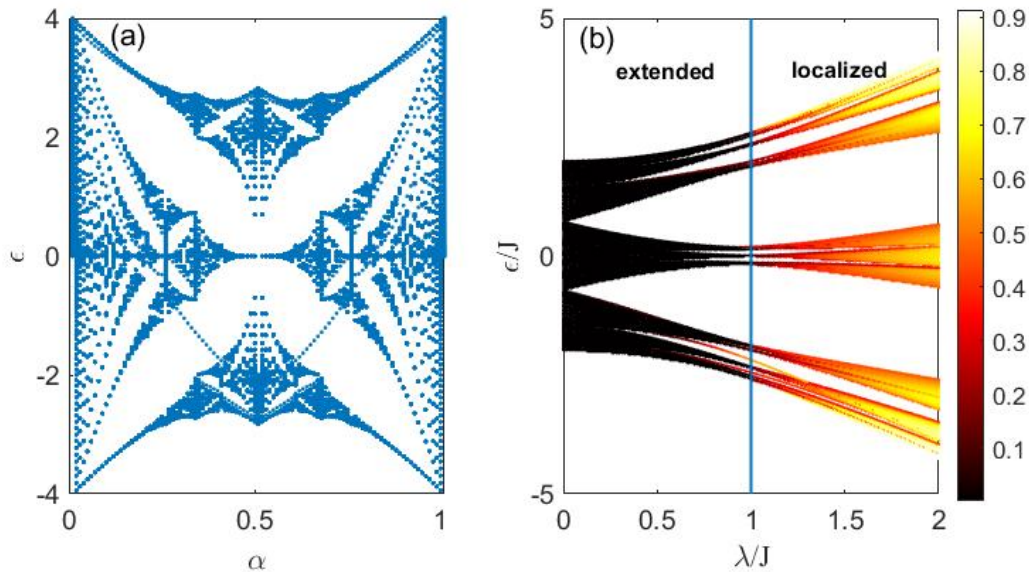


图 2.4 (a)能谱随参数 α 的变化 (b)IPR 值随参数 λ/J 和本征值的变化

2.3 具有迁移率边的一维准周期模型

前面提到的安德森模型和 AA 模型都是不存在迁移率边的，这一节，我们介绍几种具有迁移率边的一维准周期模型^[16,30]，它们都是 AA 模型的推广模型。

2.3.1 广义的 Aubry-André 模型

这一小节我们介绍将 AA 模型化学势变得更复杂的一个模型，化学势表示为：

$$\lambda_j = 2\lambda \frac{\cos(2\pi\alpha j + \varphi)}{1 - b \cos(2\pi\alpha j + \varphi)} \quad (2.26)$$

$b \in (-1, 1)$ ， λ_j 在 $b = \pm 1$ 处是发散的， $b = 0$ 时是前面提到的 AA 模型。该模型下，单粒子的薛定谔方程可以写为：

$$-J(\phi(j+1) + \phi(j-1)) + \lambda_j \phi(j) = \varepsilon \phi(j) \quad (2.27)$$

令 $g = 2\lambda \frac{\cosh \beta}{\tanh \beta}$ ， $1/b = \cosh \beta$ ， $\chi_p(\beta) = \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta - \cos(2\pi p \alpha + \varphi)}$ ，那么

$$2\lambda \frac{\cos(2\pi\alpha p + \varphi)}{1 - b \cos(2\pi\alpha p + \varphi)} = g\chi_p(\beta) - 2\lambda \cosh \beta \quad (2.28)$$

(2.27)式重新写成如下形式：

$$-J(\phi(p+1) + \phi(p-1)) + g\chi_p(\beta)\phi(p) = (\varepsilon + 2\lambda \cosh \beta)\phi(p) \quad (2.29)$$

而 $\chi_p(\beta)$ 可写为：

$$\begin{aligned} \chi_p(\beta) &= \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{(e^\beta + e^{-\beta}) - (e^{i(2\pi p \alpha + \varphi)} + e^{-i(2\pi p \alpha + \varphi)})} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\beta|s|} e^{is(2\pi p \alpha + \varphi)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

令 $b, J, \lambda > 0$ 并令 $\varphi = 0$ 。下面，我们定义如下对偶变换，在这个变换下，方程(2.29)是自对偶的：

$$f(k) = \sum_{m, j, p} e^{i2\pi\alpha(km + mj + jp)} \chi_j^{-1}(\beta_0) \phi(p) \quad (2.31)$$

定义 $v_j = \sum_p e^{i2\pi\alpha jp} u_p$ ， $2J \cosh \beta_0 = \varepsilon + 2\lambda \cosh \beta$ ， $\omega = 2J \sinh \beta_0$ ，(2.29)式两边同乘以 $e^{i2\pi\alpha jp}$ ，并对 p 求和，得到：

$$\omega \chi_j^{-1}(\beta_0) v_j = g \sum_s e^{-\beta_0 |j-s|} v_s \quad (2.32)$$

同样地，(2.32)式两边同乘以 $e^{i2\pi\alpha mj}$ ，并对 j 求和，并且定义 $\omega_m = \sum_j e^{im(2\pi\alpha j)} \chi_j^{-1}(\beta_0) v_j$ 得到：

$$\omega \chi_m^{-1}(\beta) \omega_m = g \sum_s e^{-\beta_0 |m-s|} \omega_s \quad (2.33)$$

接着，定义 $f(k) = \sum_m e^{i2\pi\alpha mk} \omega_m$ ，(2.33)式两边同乘以 $e^{i2\pi\alpha mk}$ 并对 m 求和，得到下面关

于 $f(k)$ 的紧束缚模型:

$$-J(f(k+1) + f(k-1)) + g \frac{\sinh \beta}{\sinh \beta_0} \chi_k(\beta_0) f(k) = 2J \cosh \beta f(k) \quad (2.34)$$

若 $\beta_0 = \beta$, 与原始紧束缚模型相比, 上式对 $f(k)$ 而言是自对偶的。得到系统的迁移率边为:

$$b\varepsilon = 2 \operatorname{sgn}(\lambda)(|J| - |\lambda|) \quad (2.35)$$

在下面的计算中, 取 $b, \lambda, J > 0$, 迁移率边的表达式为:

$$b\varepsilon = 2(J - \lambda) \quad (2.36)$$

数值上, 利用精确对角化方法求得本征能量和对应的本征态, 并计算出每个态对应的 IPR 值。图 2.5 画出了 IPR 随参数 b 和能量本征值 ε 的变化, $J=1, \varphi=0$ 。图中显示了单粒子迁移率边的数值结果和解析结果, 蓝色实线表示迁移率边的表达式, 即 (2.36) 式, 图上每一点的颜色代表 IPR 的值, 黑色表示扩展态, 其余颜色表示局域态, 从图上可以看出, 我们的数值结果和解析结果符合地很好, 迁移率边接近完美地将扩展态和局域态区分开来, 蓝色实线以上的态都是局域态, 蓝色实线下面的态都是扩展态。对于这个模型, $b=0$ 时对应的是 AA 模型, 图 2.5 (a) 中 $b=0$ 时能态的 IPR 都

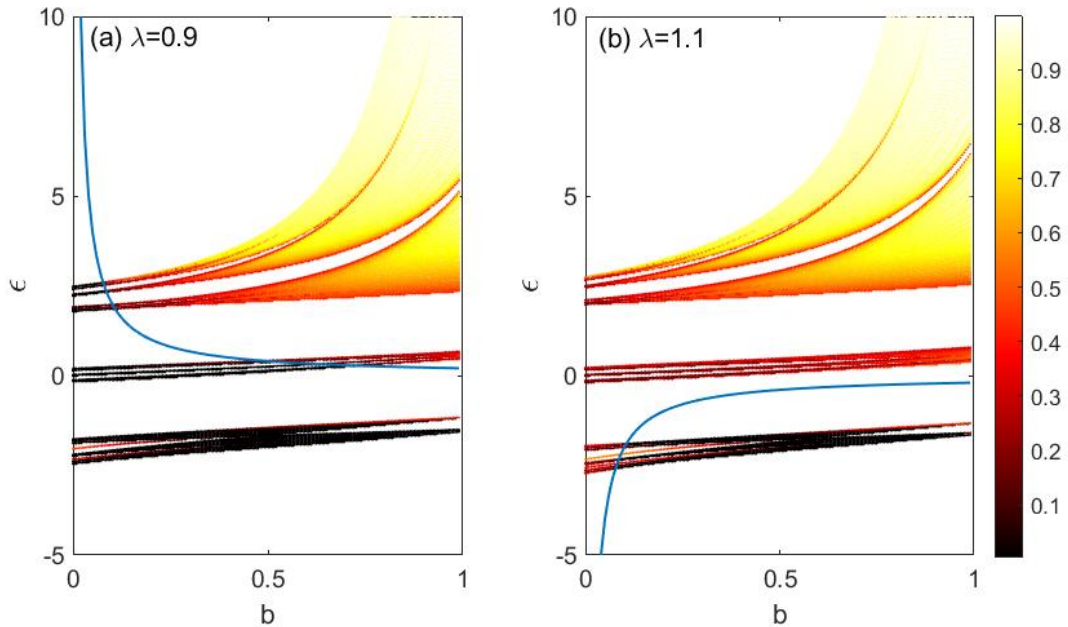


图 2.5 IPR 随参数 b 和本征能量的变化, 蓝色实线为迁移率边

接近于 0, 表示所有的态都处于扩展态; 2.5 (b) 图中 $b=0$ 时能态的 IPR 都是一个有限的值, 意味着所有的态都是局域态。这与我们前面提到的 AA 模型安德森局域化

的性质相吻合。

2.3.2 长程跃迁模型

接下来我们要介绍的模型是在 AA 模型的跃迁项上做变化来实现的^[31]，薛定谔方程变为：

$$\sum_{j' \neq j} J_1 e^{-p|j-j'|} \phi(j') + 2\lambda \cos(2\pi\alpha j + \varphi) \phi(j) = \varepsilon \phi(j) \quad (2.37)$$

其中， $J_1 = e^p$ ， $p > 0$ ，这里的跃迁不只包括最近邻的跃迁项，跃迁项的强度随格点距离的增大，呈现指数衰减的特点。按照 AA 模型的对偶变换，这里作相似的处理。

定义参数 $p_0 > 0$ ，满足如下方程：

$$(\varepsilon + J_1) - 2\lambda \cos(2\pi\alpha j + \varphi) = \omega'^2 T_j \quad (2.38)$$

$$T_j = \frac{\cosh(p_0) - \cos(2\pi\alpha j + \varphi)}{\sinh(p_0)} \quad (2.39)$$

其中， $\omega'^2 = \sqrt{(\varepsilon + J_1) - 4\lambda^2}$ ，由(2.38)和(2.39)式，可得 $\frac{\varepsilon + J_1}{2\lambda} = \cosh(p_0)$ ，(2.37)式变为：

$$\omega'^2 T_j \phi(j) = \sum_{j'} J_1 e^{-p|j-j'|} \phi(j') \quad (2.40)$$

接着做如下变换：

$$\tilde{u}(m) = \sum_j e^{im(2\pi\alpha j + \varphi)} T_j \phi(j) \quad (2.41)$$

对 $p > 0$ ，有

$$T_j^{-1} = \sum_m e^{-p|m|} e^{im(2\pi\alpha j + \varphi)} \quad (2.42)$$

并代入(2.40)式，得到

$$\omega'^2 \tilde{T}_m \tilde{u}(m) = \sum_{m'} J_1 e^{-p_0|m-m'|} \tilde{u}(m') \quad (2.43)$$

其中，定义 \tilde{T}_m 为：

$$\tilde{T}_m = \frac{\cosh(p) - \cos(2\pi\alpha m + \varphi)}{\sinh(p)} \quad (2.44)$$

对比(2.40)和(2.43)式，在(2.41)式的变换下，如果 $p = p_0$ ，(2.40)式是自对偶的。与 AA 模型的讨论相类似，当 $p < p_0$ 时，所有的态都是扩展态；当 $p > p_0$ 时，所有的态都是局域态。迁移率边的表达式为：

$$\cosh(p) = \frac{\varepsilon + J_1}{2\lambda} \quad (2.45)$$

图 2.6 给出了 IPR 随无序强度 λ 和本征能量的变化，以 J_1 为能量单位，蓝色实线为迁移率边的解析解，蓝色实线左边为扩展态，右边为局域态。分析式(2.37)，随着 p 的

越来越大，我们只需考虑最近邻格点的跃迁， $p \rightarrow \infty$ 时，系统可看成 AA 模型，不存在迁移率边。对比两幅图和分析结果，可以发现确实存在这样的趋势。

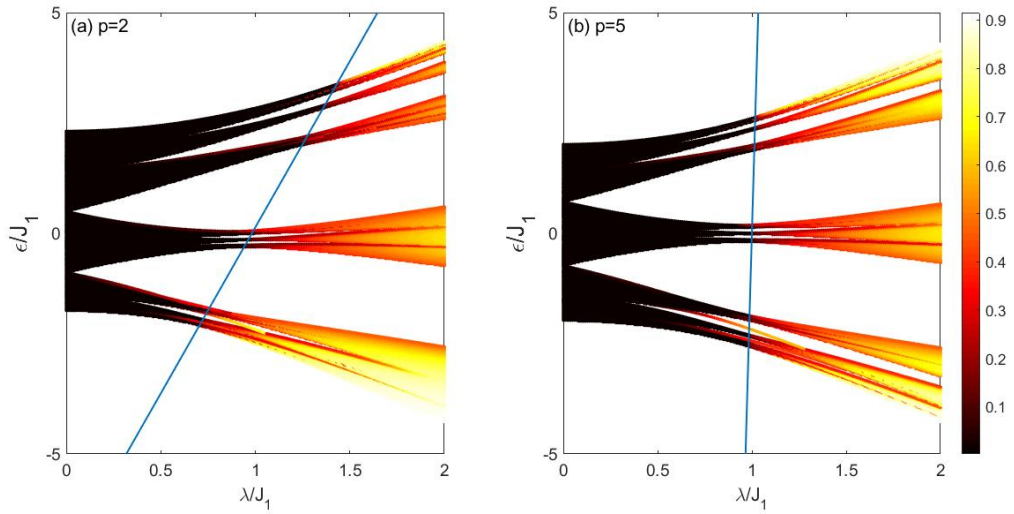


图 2.6 IPR 随无序强度 λ 和本征能量的变化，蓝色实线为迁移率边

2.4 小结

本节我们围绕无序系统中的局域化现象，介绍了凝聚态物理中的经典模型—AA 模型，并介绍了该模型下系统的相关性质，从几个方面说明了 AA 模型中的局域化转变点，并且可以得出该模型下系统不存在迁移率边。接着，我们介绍了推广的 AA 模型，其具有迁移率边，并对迁移率边表达式的得出做了详细的说明和解释。以上的研究都是对单粒子而言，下一节我们将讨论相互作用存在且很大的情况下，玻色子对的迁移率边问题。

第三章 一维准周期晶格中玻色子对的迁移率边

3.1 简介

60 多年前，安德森在一篇标志性的文章中预测了无序系统中的单粒子波函数具有局域的特性，这一现象被称为安德森局域化^[10]，在凝聚态物理的各个重要分支被广泛关注。安德森模型中最为重要的概念之一是存在扩展态与局域态的迁移率边^[16, 30, 42]，即费米面从位于扩展态区域穿过迁移率边进入局域态区域时系统从金属相转变为绝缘体相^[37, 43]，反之亦然。不同于三维无序系统，对于一维和二维的安德森模型^[44-46]，标度理论指出自由粒子总是局域化的，不存在金属绝缘体转变^[47]。而三维系统中当无序大于某一阈值时将导致局域化，对于弱无序^[44]，系统则呈现金属的特性，具有有限的电导。最近实验已经能够在光子晶体和冷原子体系中直接观测安德森局域化现象以及迁移率边^[48-50]。

另一方面，一维具有非公度准周期调制势的 AA 模型^[11]，展现了完全不同的局域化性质。由于 AA 模型的自对偶特性，通过调节系统的参数，系统中所有的本征态要么全为局域态要么全为扩展态，并不存在迁移率边。然而基于 AA 模型得到迁移率边的方法一般有两种，其中一种是破坏系统的自对偶性质，如增加次近邻跃迁项等^[16]；另外一种寻找具有能量依赖的自对偶模型^[30]，这类模型的迁移率边往往具有非常简洁的解析形式，受到了广泛的关注和研究。

自从无序模型被提出，相互作用在无序系统中如何影响安德森局域化这一问题一直困扰着人们^[51-55]。最近 Basko 等人提出在无序体系中^[56]，相互作用的多体系统将会经历所谓的多体局域化转变^[57-58]，在强无序下，相互作用不足以热化系统，所以系统的电导为零。而对于弱无序情况，系统可以被热化，具有有限的导电率。多体局域化相和多体局域化转变由于其独特的性质对量子统计物理的基本问题发起了挑战。在多体局域化相，系统的局域可观测量不能够被热化^[59]，这违背了本征态热化假说。最近在这一领域有很多的进展，如一维随机无序系统中的多体局域化转变^[57]，包括 AA 模型和一维具有斐波那契（Fibonacci）势^[60-61]的系统。一个重要的问题是：在多体局域化系统中是否存在迁移率边？虽然一些数值结果声称在多体系统中存在多体迁移率边，但是由于系统尺寸的限制，这一问题仍然是一个开放性问题，值得人们继续探索。

本章节主要研究具有一维准周期势的晶格中玻色子对的迁移率边的性质，我们利用微扰方法得到系统迁移率边的解析表达式，证明在两粒子系统中存在迁移率边，进一步与精确对角化结果比较，该研究对理解多体系统迁移率边^[62]有重要意义。最近有人用类似的方法研究了三维随机无序系统中的粒子对的迁移率边问题^[63]。

3.2 理论模型及方法

我们考虑两个具有相互作用的玻色子在一维非公度的准周期晶格中的运动，系统的哈密顿量可以表示为 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}$ ，就是在 2.3.1 节的系统中加入相互作用项，其中：

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + h.c.) + \sum_j \lambda_j \hat{n}_j \quad (3.1)$$

并且

$$\hat{U} = \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) \quad (3.2)$$

这里 J 为跃迁强度，它被设为单位能量 $J=1$ ，这里仅考虑最近邻格点之间的跃迁， $\hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_j)$ 为第 j 个格点的产生(湮灭)算符， $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$ 为第 j 个格点的粒子数算符。化学势项为 2.3.1 节中(2.26)式，这里相位 $\varphi = 0$ 。化学势为参数 b 的连续函数，其中 $b \in (-1, 1)$ 。可以看出当 $b = \pm 1$ 时，在格点数目趋于无穷的情况下存在发散点。而当 $b = 0$ 时，哈密顿量 \hat{H}_0 回到标准的 AA 模型；对于 $b \neq 0$ 的情况，单粒子系统 \hat{H}_0 存在能量依赖的自对偶特性，它的迁移率边在 2.3.1 节(2.36)式已给出。相互作用项(3.2)式为玻色哈伯德相互作用形式，其中 U 为相互作用强度。本章关注强相互作用极限下粒子对的情形，而 U 的符号并不影响我们的结果。

3.3 玻色子对的迁移率边

系统的定态薛定谔方程可以写为：

$$(\hat{H}_0 + \hat{U})|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (3.3)$$

应用格林函数算符 $\hat{G}_E = (E - \hat{H}_0)^{-1}$ ，方程(3.3)可以表示为 $|\psi\rangle = \hat{G}_E \hat{U} |\psi\rangle$ 。对于两玻色子情况，相互作用项可以在格点基矢 $|j, k\rangle$ 下写出，即 $\hat{U} = U \sum |k, k\rangle \langle k, k|$ 。考虑玻色子对空间，我们用态 $|j, j\rangle$ 投影到方程(3.3)两边，得到

$$\psi(j, j) = U \sum \langle j, j | \hat{G}_E | k, k \rangle \psi(k, k) \quad (3.4)$$

其中 $\psi(j, j) = \langle j, j | \psi \rangle$ 。而格林函数算符可以在能量基矢 $|\phi_r, \phi_s\rangle$ 中表示为：

$$\hat{G}_E = \sum (E - \varepsilon_{r'} - \varepsilon_{s'})^{-1} |\phi_{r'}, \phi_{s'}\rangle \langle \phi_{r'}, \phi_{s'}| \quad (3.5)$$

其中 $|\phi_{r'(s')} 为 \hat{H}_0 的本征态，相应的本征能量为 $\varepsilon_{r'(s')}$ 。因此方程(3.4)中，$

$$\langle j, j | \hat{G}_E | k, k \rangle = \sum_{r', s'} \frac{\phi_{r'}(j) \phi_{s'}(j) \phi_{r'}^*(k) \phi_{s'}^*(k)}{E - \varepsilon_{r'} - \varepsilon_{s'}} \quad (3.6)$$

其中 $\phi_{r'}(j)$ 表示第 r' 个本征态中第 j 个格点上的几率幅。令 $f(j) = \psi(j, j)$,

$K_E(j, k) = \langle j, j | \hat{G}_E | k, k \rangle$ ，结合方程(3.4)和(3.6)，我们将处理如下的本征值问题：

$$\frac{1}{U} f(j) = \sum_k K_E(j, k) f(k) \quad (3.7)$$

这里 $j, k = 1, 2, \dots, L$ ，本征值 $\zeta = 1/U$ 。对于能量值小于无相互作用的两粒子基态能量 ($E < 2\varepsilon_1$) 的情况，本征值 ζ 都为负值，对应于吸引的束缚态。而当能量值大于无相互作用的两粒子最高激发态能量 ($E > 2\varepsilon_L$)，所有的本征值 ζ 都为正值，对应于排斥的束缚态。而波函数 $f(j)$ 既能描述能量为 E 的吸引的束缚态也能描述能量为 $-E$ 的排斥的束缚态。在强相互作用 $|U| \gg \lambda, t$ 下，两玻色子紧密地结合为玻色子对，具有相当大的有效质量。通过将 $K_E(j, k)$ 对 E^{-1} 展开到三阶，得到

$$K_E(j, k) = \delta_{j, k} \left(\frac{1}{E} + \frac{2\lambda_j}{E^2} + \frac{4\lambda_j^2 + 4}{E^3} \right) + \frac{2}{E^3} \delta_{j, k \pm 1} \quad (3.8)$$

带入到方程(3.7)，整理得到

$$\frac{2}{E} f(j+1) + \frac{2}{E} f(j-1) + \left(2\lambda_j + \frac{4\lambda_j^2}{E} \right) f(j) = \left(\frac{E^2}{U} - E - \frac{4}{E} \right) f(j) \quad (3.9)$$

上式表明在一阶近似下 $E \sim U$ ，即玻色子对能量分布在 U 附近。由于讨论紧束缚的粒子对，尽管金属绝缘体转变点 $\lambda \ll 1$ ，然而当 $b \rightarrow \pm 1$ 时，方程(3.9)中， $4\lambda_j^2/E \approx 4\lambda_j^2/U$ 将会无法忽略。因此首先讨论 b 取值比较小的情况，我们可以放心的忽略方程(3.9)式中的 $4\lambda_j^2/E$ 项。对比于单粒子定态薛定谔方程(2.27)式，方程(3.9)式具有和无相互作用下推广的 AA 模型具有相类似的形式，即有效跃迁几率 $J_{eff} = -2/E$ ，有效化学势强度 $\lambda_{eff} = 2\lambda$ 。因此玻色子对的迁移率边可以由如下方程所描述：

$$b \left(\frac{E^2}{U} - E - \frac{4}{E} \right) = -4 \left(\frac{1}{E} + \lambda \right) \quad (3.10)$$

这是本文中心结论。接下来围绕方程(3.10)讨论玻色子对在一维准周期势中的迁移率边。

首先我们讨论 $b=0$ 的情况，在无相互作用时，系统为标准的 AA 模型，不存在迁移率边，然而根据方程(3.10)，在 AA 模型中的玻色子对存在迁移率边为 $\lambda = -1/E$ 。为了验证我们的结果，引入标准参与率 (normalized participation ratio, 简记为 NPR) $\eta(E)$ 来表征多体态是否局域化^[19]，它表示为：

$$\eta(E) = \frac{1}{\sum_{\{n_1, n_2, \dots, n_L\}} |\psi_E(\{n_1, n_2, \dots, n_L\})|^4 V_H} \quad (3.11)$$

其中， V_H 表示希尔伯特空间的维度， $\psi_E(\{n_1, n_2, \dots, n_L\})$ 表示为哈密顿量 \hat{H} 在福克基下的本征能量为 E 的多体本征波函数。在热力学极限下， $\eta(E)$ 趋于零时，多体波函数为局域态，而当 $\eta(E)$ 为有限值时，波函数为扩展态。图 1 展示了 $b=0$ 时，标准参与率 $\eta(E)$ 在不同的相互作用强度 U 下随无序强度 λ 变化的情况。图 3.1 (a)-(d) 分别对应 $U = -15, -20, -40$ 和 -100 于，这里 $L = 150$ ，图中蓝色实线为解析结果(3.10)式。我们看到在不同的相互作用下，随着 λ 的增加系统确实存在从扩展态到局域态的转变。当 $U = -15$ 时已经明显可以看到迁移率边的存在，通过解析解的求解，具有迁移率边的区间大约为 $\lambda \in [0.0637, 0.0675]$ 。随着 $|U|$ 的增大，这个区间逐渐变小，在 $U = -100$ 时，图中的迁移率边几乎变为 $\lambda \approx 0.01$ 的一条直线。由此我们可以推测，在 $|U|$ 趋于无穷大时，系统的迁移率边和扩展区将逐渐消失。图 3.2(a) 展示了 $b=0, U=-100$ 时，扩展态与局域态的转变点 $\lambda \approx 0.01$ 两侧的格点密度分布 $\rho_j = \langle \hat{n}_j \rangle$ 的情况。红色五角星实线表示 $\lambda = 0.008, E = -100.044$ 的密度分布，它展现了扩展的特性，而蓝色方块实线为 $\lambda = 0.012, E = -100.044$ 的密度分布情况，这时密度分布为局域的。为了进一步证明我们的结果，我们对转变点两侧的 NPR 作标度分析。以 $b=0, U=-100$ 为例，我们分别计算了扩展区间 $\lambda = 0.008, E \approx -100, -100.044, -100.0732$ 和局域区间 $\lambda = 0.012, E \approx -100, -100.04, -100.08$ 所对应的本征态的 NPR 随尺寸变化的情况，如图 3.2(b) 所示。图中实线为拟合的结果，其表达式可以写为：

$$\eta(E) = p \left(\frac{1}{L} \right)^2 + q \left(\frac{1}{L} \right) + l \quad (3.12)$$

其中对于不同本征态的 NPR 随尺寸变化的拟合参数分别为 p, q 和 l 。在局域区间，波函数的 NPR 随着 $1/L^2$ 衰减到零，即参数 $l=0$ 。而在扩展区系统的 NPR 是随着 $1/L$ 线性衰减到一个有限的值约为 10^{-5} 量级，即 $p=0, q \neq 0$ 和 $l \sim 10^{-5}$ 。

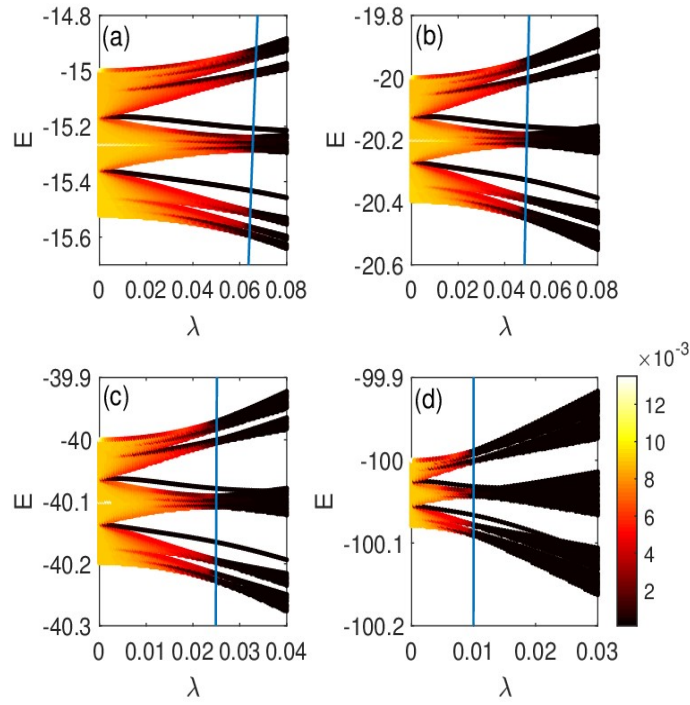


图 3.1 $b=0$ 时, NPR 在不同的相互作用强度 U 时, 随无序强度 λ 和能量本征值 E 的变化。

(a)、(b)、(c)、(d) 分别对应 $U = -15$ 、 $U = -20$ 、 $U = -40$ 和 $U = -100$, 蓝色的实线对应迁移率边的表达式(3.11), 这里取 $L = 150$ 。

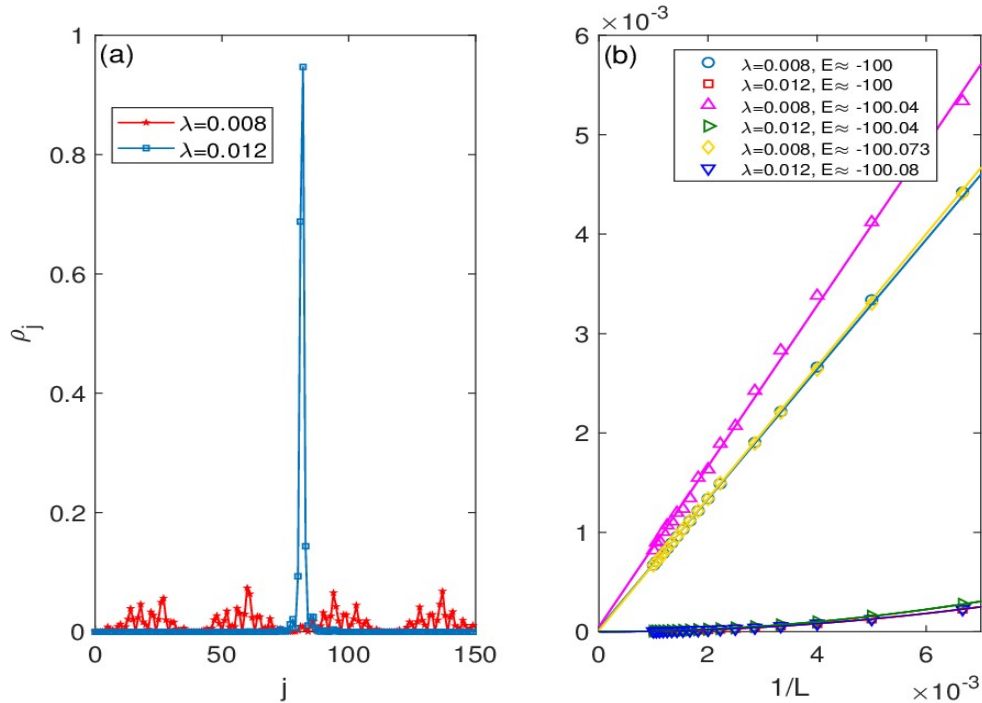


图 3.2 (a) $b=0, U=-100, E=-100.04$ 时, λ 分别为 0.008 和 0.012 所对应本征态的密度分布;

(b) $b=0, U=-100$ 时, 不同 λ 和 E 所对应的本征态的 NPR 随 $1/L$ 的变化。

在小 b 情况下，玻色子对的迁移率边由方程(3.10)所描述，通过求解方程(3.10)我们能够得到迁移率边的结果，如图 3.2 (a)蓝色实线所示。

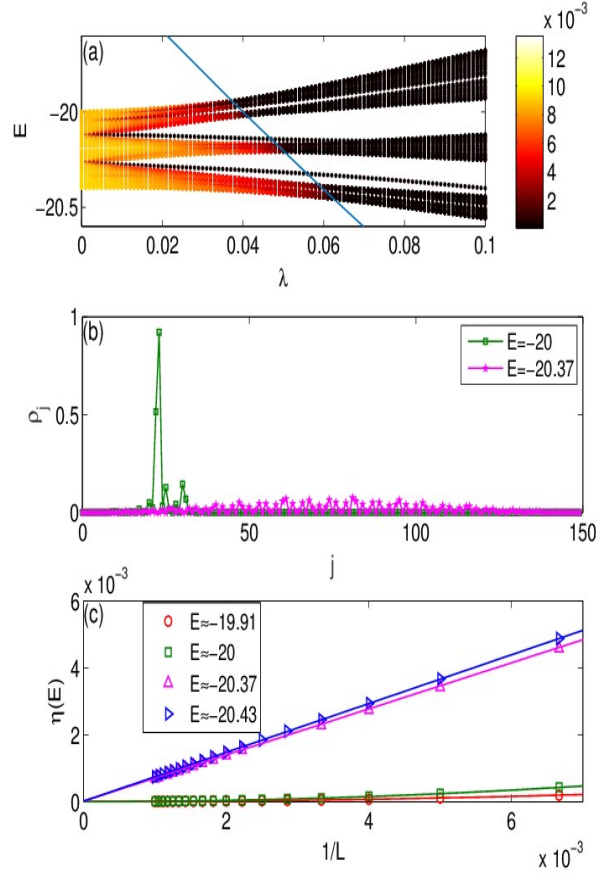


图 3.3 (a) NPR 在 $L = 150$ 时随无序强度 λ 和能量本征值 E 的变化，蓝色的实线对应迁移率边的表达式；(b) $\lambda = 0.048$ ， $L = 150$ 时，能量 $E = -20$ 和 -20.37 所对应的密度分布；(c) 不同能量的 NPR 在 $\lambda = 0.048$ 时随 $1/L$ 的变化。这里我们选取 $b = 0.2$ ， $U = -20$ 。

图 3.3 (a)中给出了 $b = 0.2, U = -20, L = 150$ 时，随着化学势强度 λ 的增加，不同能量的 NPR 。由图可以看出，我们解析结果和数值结果符合的很好，蓝色实线以上所有的态都为局域态，而实线以下的部分都为扩展态，存在迁移率边的区间为 $\lambda \in (0.0373, 0.0638)$ 。以 $\lambda = 0.048$ 为例，相应的迁移率边所对应的能量约为 -20.17 ，我们分别计算了 $E = -20$ 和 -20.37 所对应的本征态的密度分布，如图 3.3(b)所示。当能量处于迁移率边以下时，相应的密度展现扩展的特性，而能量处于迁移率边以上时，相应的密度分布为局域的。图 3.3(c)展示了 $b = 0.2, U = -20, \lambda = 0.048$ 时，不同能量所对应的 NPR 随尺寸变化的情况。其拟合曲线仍然符合方程(3.12)，在迁移率边以下的扩展态，其 NPR 线性依赖于 $1/L$ ，在 $L \rightarrow \infty$ 时， NPR 为有限大的值 $l \sim 10^{-5}$ ，而当对于

能量处于迁移率边以上的局域态，随着 L 的增加， $\eta(E) \sim (1/L)^2$ 衰减到零。

由于调制势在 b 趋近于 1 时趋近于发散，方程(3.9)式中的 $4\lambda_j^2/E$ 项对比于 $2\lambda_j$ 将不再是小量。图 3.4(a)、(b)分别展示了 $b = 0.5$ 和 0.96 时， $|2\lambda_j|$ 和 $|4\lambda_j^2/U|$ 在格点上的分布情况。在 $b = 0.5$ 时， $|2\lambda_j| \gg |4\lambda_j^2/U|$ ，因此方程(3.10)仍然适用。通过对 NPR 的计算，我们发现此时数值和解析结果符合的很好 [图 3.4(c)]。然而对于 $b = 0.96$ ， $|4\lambda_j^2/U|$ 和 $|2\lambda_j|$ 相比拟 [图 3.4(b)]，方程(3.9)式中 $4\lambda_j^2/E$ 不能被忽略，系统不存在自对偶特性，从而无法推导出迁移率边的解析形式。图 3.4(d)展示了 $b = 0.96, U = -20$ 时，系统的 NPR 随着调制强度 λ 变化的情况，其中蓝色实线为方程(3.10)给出的结果。可以看出数值结果和解析结果发生了较大偏离。然而通过数值计算我们发现即使在 $b \rightarrow 1$ 情况下，玻色子对系统仍然存在迁移率边。

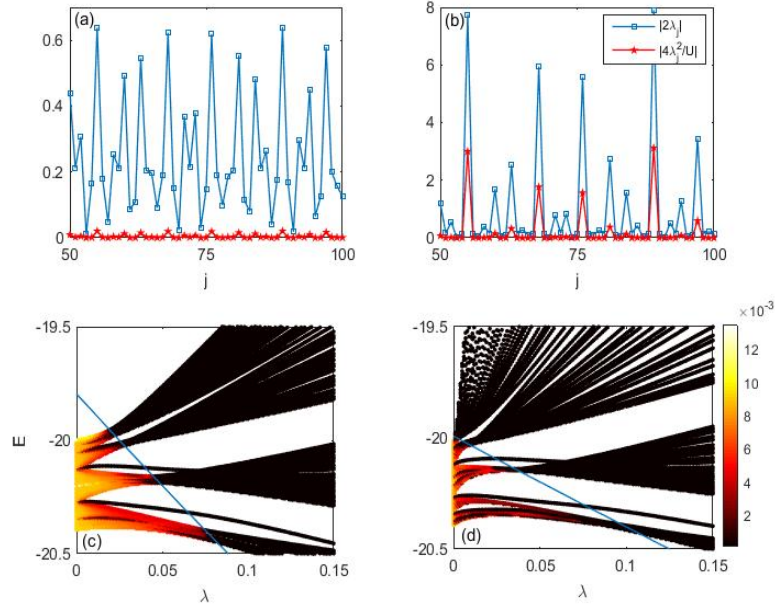


图 3.4 (a)、(b)分别为 $\lambda = 0.08$, $b = 0.5, 0.96$ 时， $|2\lambda_j|$ 与 $|4\lambda_j^2/U|$ 在格点上的分布情况；

(c)、(d) NPR 在 $L = 150$ 时随无序强度 λ 和能量本征值 E 的变化，其参数与(a)、(b)相同。

蓝色的实线对应迁移率边的表达式。

3.4 小结

多体迁移率边是研究多体局域化系统的过程中被提出的，已经吸引了广泛的兴趣，但是由于数值能力等限制，它的存在性仍然是一个开放问题。在本文中，我们证明了捕陷于一维准周期晶格的紧束缚的玻色子对系统存在迁移率边。在强相互作用

用极限下利用微扰方法扩展到三阶，我们得到了一个有效的玻色子对的哈密顿量，它具有和单粒子薛定谔方程相类似的形式，通过对比，我们给出 b 比较小时迁移率边的解析形式。数值结果和解析结果符合的很好。然而在 $b \rightarrow 1$ 时，由于化学势趋于发散导致解析结果发生偏离。数值结果表明，即使在 $b \rightarrow 1$ 极限，系统仍然存在迁移率边。我们希望我们的结果对研究多体迁移率边有一定的帮助。进一步，我们将研究在实验上如何去探测玻色子对系统中的迁移率边。

第四章 总结与展望

4.1 总结

本文我们首先以晶格系统为出发点，研究一维准周期系统中的安德森局域化现象。首先介绍了研究的背景，其中包括：超冷原子的概念以及它的实验室制备，玻色爱因斯坦凝聚体以及光晶格的形成；接着我们引入全文的焦点，无序以及安德森无序和它的实验实现，最后介绍了多体局域化的相关概念。

我们着眼于—维光晶格中的无序模型，主要介绍了 AA 模型以及它的实现和相关性质，这是研究无序的一个经典模型，通过该模型的自对偶性质，并且引入参数 IPR 的计算，说明该系统不存在区分扩展态和局域态的能量边界——迁移率边，即体系中的所有能量要么全为扩展态，要么全为局域态， $\lambda/J=1$ 为系统的安德森局域转变点。之后介绍了由 AA 模型的变形得到的几种具有迁移率边的一维准周期模型，并且给出了迁移率边的理论推导和数值结果。

最后，我们将强相互作用下的玻色子对作为研究对象，在一维准周期晶格中，利用精确对角化方法和微扰理论，得到玻色子对的有效哈密顿量，并与和它有类似形式的单粒子薛定谔方程作对比，得到了其迁移率边的表达式

$$b\left(\frac{E^2}{U} - E - \frac{4}{E}\right) = -4\left(\frac{1}{E} + \lambda\right).$$

在 $b=0$ 和小 b 情况下，数值结果和解析结果相吻合；在 $b \rightarrow 1$

时，调制势是发散的，解析表达式将不再适用。

4.2 展望

目前，在相互作用的无序系统中，由于系统希尔伯特空间的维度随粒子数的增多而超过了计算范围，因此，对多体迁移率边的研究存在一定困难。我们可以尝试在缓变势模型、随机无序模型等模型中研究粒子对的迁移率边问题，期望为这些模型下的多体迁移率边问题起到一定的参考作用。

参考文献

- [1] 王义道.原子的激光冷却与陷阱.北京大学出版社,2007,171-194.
- [2] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable and A. Ashkin, Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48(1985).
- [3] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould and H.J. Metcalf, Observation of atoms laser cooled below the Doppler limit, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169(1988).
- [4] P. G. Kevrekidis, R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis and I. G. Kevrekidis, Vortices in Bose-Einstein condensates: some recent developments, *Mod. Phys. Lett. B* **18**,1481(2005).
- [5] F. K. Diakonov, P. A. Kalozoumis and A. I. Karanikas, Geometric-phase-propagator approach to time-dependent quantum systems, *Phys. Rev. A* **85**, 062110(2012).
- [6] K. B. Davis, M. O. Mewes and M. R. Andrews, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969(1995).
- [7] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf, and C. Tannoudji, Channeling atoms in a laser standing wave. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1659-1662(1987).
- [8] I. Bloch, Ultracold quantum gases in optical lattices, *Nat. Phys.* **1**, 23 (2005).
- [9] 黄昆.固体物理学.高等教育出版社, 1985, 228-229.
- [10] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492(1958).
- [11] S. Aubry and G. André, Analyticity breaking and Anderson localization in Incommensurate lattice, *Israel Phys. Soc.* **3**, 18(1980).
- [12] J. Billy, V. Josse, Z. C. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. S. Palencia and P. Bouyer, Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder, *Nature*, **453**, 891-894(2008).
- [13] P. Bouyer, Quantum gases and optical speckle: a new tool to simulate disordered quantum systems, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 062401 (2010).
- [14] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, and

- M. Inguscio, Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate, *Nature* **453**, 895(2008).
- [15] N. F. Mott, Electrons in disordered structures, *Adv. Phys.* **16**, 49-144(1967).
- [16] J. Biddle and S. D. Sarma, Predicted mobility edges in one-dimensional incommensurate optical lattices: an exactly solvable model of Anderson localization, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 070601(2010).
- [17] E. A. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, Scaling theory of localization: absence of quantum diffusion in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673(1979).
- [18] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Tunable surface conductivity in $\text{Bi}_{2}\text{Se}_{3}$ revealed in diffusive electron transport, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287(1985).
- [19] J. H. Bardarson, F. Pollmann, and J. E. Moore, Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 017202(2012).
- [20] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin, Universal slow growth of entanglement in interacting strongly disordered systems, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 260601(2013).
- [21] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider and I. Bloch, Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice, *Science* **349**, 842-845(2015).
- [22] P. Bordia, H. Lüschen, S. Scherg, S. Gopalakrishnan, M. Knap, U. Schneider and I. Bloch, Probing slow relaxation and many-body localization in two-dimensional quasiperiodic systems, *Phys. Rev. X* **7**, 041047(2017).
- [23] T. Kohlert, S. Scherg, X. Li, H. P. Lüschen, S. Das Sarma, I. Bloch, M. Aidelsburger, Observation of many-body localization in a one-dimensional system with single-particle mobility edge, arXiv:1809.04055.
- [24] X. Cai, L. J. Lang, S. Chen and Y. Wang, Topological superconductor to Anderson localization transition in one-dimensional incommensurate lattices, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 176403(2013).
- [25] W. De Gottardi, D. Sen and S. Vishveshwara, Majorana fermions in superconducting 1D Systems Having Periodic, quasiperiodic, and disordered potentials, *Phys. Rev.*

- Lett. **110**, 146404(2013).
- [26] J. Wang, X. J. Liu, X. Gao and H. Hu, Anderson localization of Cooper pairs and Majorana fermions in an ultracold atomic Fermi gas with synthetic spin-orbit coupling, Phys. Rev. B **93**, 104504(2016).
- [27] S. Iyer, V. Oganesyan, G. Refael and D. A. Huse, Many-body localization in a quasiperiodic system, Phys. Rev. B **87**, 134202(2013).
- [28] Y. Wang, H. Hu and S. Chen, Many-body ground state localization and coexistence of localized and extended states in an interacting quasiperiodic system, Eur. Phys. J. B **89**, 77(2016).
- [29] F. Stellin and G. Orso, Mobility edge of two interacting particles in three-dimensional random potentials, arXiv:1903.06214.
- [30] S. Ganeshan, J. H. Pixley, and S. Das Sarma, Nearest neighbor tight binding models with an exact mobility edge in one dimension, Phys. Rev. Lett. **114**, 146601(2015).
- [31] M. Modugno, Exponential localization in one-dimensional quasi-periodic optical lattices, New J. Phys. **11**, 033023(2009).
- [32] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera and C. Fort, Ultracold atoms in a disordered crystal of light: towards a bose glass, Phys. Rev. Lett. **98**, 130404(2007).
- [33] V. Guarrera, L. Fallani, J. E. Lye, C. Fort and M. Inguscio, Inhomogeneous broadening of a Mott insulator spectrum, New J. Phys. **9**, 107(2007).
- [34] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner and P. Zoller, Cold bosonic atoms in optical lattice, Phys. Rev. Lett. **81**, 3108(1998).
- [35] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases. Rev. Mod. Phys. **80**, 885(2008).
- [36] M. Wilkinson, Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems, Proc. R. Soc. Lond. A **391**, 305(1984).
- [37] D. R. Hofstadter, Metal-insulator transition and scaling for incommensurate systems, Phys. Rev. Lett. **51**, 1198(1983).
- [38] X. Li, X. P. Li and S. Das Sarma, Mobility edges in one-dimensional bichromatic incommensurate potential, Phys. Rev. B **96**, 085119(2017).

- [39] J. Biddle, B. Wang, D. J. Priour, and S. Das Sarma, Localization in one-dimensional incommensurate lattices beyond the Aubry-André model, *Phys. Rev. A* **80**, 021603(R)(2009).
- [40] D. R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev. B* **14**, 2239(1976).
- [41] Y. E. Kraus, Y. Lahini, Z. Ringel, M. Verbin and O. Zilberberg, Topological states and adiabatic pumping in quasicrystals, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 106402(2012).
- [42] S. Da Sarma, H Song and X. C. Xie, Mobility edge in a model one-dimensional potential, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2144(1988).
- [43] S. Da Sarma, H. Song and X. C. Xie, Localization, mobility edges, and metal-insulator transition in a class of one-dimensional slowly varying deterministic potentials, *Phys. Rev. B* **41**, 5544(1990).
- [44] Y. Lanini, Y. Bromberg, D. N. Christodoulides and Y. Silberberg, Quantum correlations in two-particle Anderson localization, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 163905(2010).
- [45] Y. Lanini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides and Y. Silberberg, Anderson localization and Nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013906(2008).
- [46] T. Schwartz, Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices, *Nature* **44**, 652(2007).
- [47] F. Evers, A. D. Mirlin, Anderson Transitions, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1355(2007).
- [48] W. R. McGehee, S. S. Kondov, W. Xu, J. J. Zirbel, B. DeMarco, Three-dimensional Anderson localization in variable scale disorder, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 145303(2013).
- [49] H. P. Lüschen, S. Sebastian, K. Thomas, S. Michael, B. Pranjali, L. Xiao, S. Das Sarma and B. Immanuel, Single-particle mobility edge in a one-dimensional quasiperiodic optical lattice, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 160404(2018).
- [50] Y. Lahini, R. Pugatch, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, N. Davidson and Y. Silberberg, Observation of a localization transition in quasiperiodic photonic lattices, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 013901(2009).

-
- [51] D. Gabriel and O. Giuliano, Anderson localization of pairs in bichromatic optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 155306(2012).
- [52] A. Eilmes, U. Grimm, R. A. Römer and M. Schreiber, Two interacting particles at a metal-insulator transition, *Eur. Phys J. B* **8**, 547-554(1999).
- [53] D. Wiater, T. Sowiński and J. Zakrzewski, Two bosonic quantum walkers in one-dimensional optical lattices, *Phys. Rev. A* **96**, 043629(2017).
- [54] A. Borelli, J. Bellissard, P. Jacquod and D. L. Shepelyansky, Double butterfly spectrum for two interacting particles in the Harper model, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4752(1996).
- [55] D. L. Shepelyansky, Two interacting particles in the Harper model, *Phys. Rev. B* **54**, 14896(1996).
- [56] D. M. Basko, I. L. Aleiner and B. L. Altshuler, Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Ann. Phys.* **321**, 1126-1205(2006).
- [57] Y. B. Lev and D. R. Reichman, Dynamics of many-body localization, *Phys. Rev. B* **89**, 220201(R)(2014).
- [58] S. Nag and A. Garg, Many-body mobility edges in a one-dimensional system of interacting fermions, *Phys. Rev. B* **96**, 060203(R)(2017).
- [59] P. Ponte and Z. Papić, F. Huveneers, Localization of interacting fermions at high temperature, *Phys. Rev. B* **75**, 155111(2015).
- [60] M. T. Velinho and I. R. Pimentel, Lyapunov exponent for pure and random Fibonacci chains, *Phys. Rev. B* **61**, 1043(2000).
- [61] N. Macé, N. Laflorencie and F. Alet, Many-body localization in a quasiperiodic Fibonacci chain, arXiv: 1811. 01912.
- [62] S. Nag and A. Garg, Many-body mobility edges in a one-dimensional system of interacting fermions, *Phys. Rev. B* **96**, 060203(R)(1980).
- [63] F. Stellin and G. Orso, Mobility edge of two interacting particles in three-dimensional random potentials, arXiv:1903.06214.

攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目

徐志浩, 皇甫宏丽, 张云波, 一维准周期晶格中玻色子对的迁移率边, 物理学报, **68**(8): 087201(2019).

致 谢

又是一年春花烂漫时，春意盎然，蓬勃新生，眼前的事物还像三年前一样井然有序，到处都散发着青春的气息。那是我来这里复试的日子，一切都是陌生的，但同时也令人向往。时光过得竟是如此地快，还没有细细地享受这段时光就即将要离开了。对比三年前的自己，现在的我更成熟、稳重、自信和美丽，这归功于老师、亲爱的同学和至亲的亲人对我的爱护和帮助，还包括可爱的我自己。

首先，我要感谢我的导师徐志浩老师，在这三年里，他带着我做课题，不管我什么时候提问题，他都耐心地为我解答，并且他很细心地将浏览到的跟我的研究方向有关的论文发给我。我的事情他经常比我还着急，三年来真是没少让徐老师费心。非常感谢徐老师不断地鼓励我，包容我，感谢您对我的培养与指导。

其次，我要感谢张云波老师，张老师严谨的科研态度让我钦佩不已。印象中，张老师几乎从来没缺席过组会，每次组会他都很用心地听每个报告人的内容，他的问题基本都是一针见血的，虽然很难回答，但是对理解问题很有帮助。感谢张老师的批评与鼓励，每一次您的观点都对我有很大帮助，不论是哪一方面。

我还要感谢CAT小组的每一位老师和师兄师弟师姐师妹们，你们帮我耐心地解答问题、提出的宝贵意见以及每一个人最灿烂的微笑我都铭记于心，感谢这个大家庭。同时也非常感谢我们2016级的每一位同学，感谢你们给我的技术帮助、精神帮助和生活上的帮助，感谢我们一起经历这段不一样的时光！

最后，我要感谢我的家人们，感谢你们给我一个温馨幸福的家庭环境。谢谢亲爱的爸爸妈妈抚养我长大并一直供我读书，是你们不停的辛劳撑起我的未来。父母之恩无以言表，我爱你们！

感谢参与阅读和答辩的各位评审专家和教授！

皇甫宏丽

2019年3月于山西大学理论物理研究所

个人简况及联系方式

姓名：皇甫宏丽

性别：女

籍贯：山西省原平市

学习经历：2016年9月至2019年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

联系方式：17836228809

电子邮箱：hlhuangf8809@163.com

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日

