

2019 届硕士学位论文

一维光晶格中硬核玻色气体的  
量子关联

作者姓名	张奋华
指导教师	王 利 副教授
学科专业	理论物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	物理电子工程学院
学习年限	2016 年 9 月至 2019 年 6 月

二〇一九年六月



山西大学

2019 届硕士学位论文

# 一维光晶格中硬核玻色气体的量子关联

作者姓名	张奋华
指导教师	王 利 副教授
学科专业	理论物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	物理电子工程学院
学习年限	2016 年 9 月至 2019 年 6 月

二〇一九年六月

**Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2019**

**Quantum correlations of a hard-core bose gas in  
one-dimensional optical lattices**

Student Name	Fen-hua Zhang
Supervisor	Associate Prof. Li Wang
Major	Theoretical Physics
Specialty	Cold Atom Physics
Department	School of Physics and Electronic Engineering
Research Duration	2016.09-2019.06

June, 2019

## 目 录

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 量子关联.....	1
1.1.1 量子关联简介.....	1
1.1.2 超冷原子气体中量子关联的实验测量.....	2
1.1.3 量子关联探测量子相变.....	4
1.2 硬核玻色气体.....	6
1.3 AAH 模型介绍.....	8
1.4 玻色玻璃相变.....	9
1.5 论文结构安排.....	11
第二章 硬核玻色系统的严格求解方法.....	13
2.1 玻色费米映射.....	13
2.2 一维玻色-哈伯德模型中硬核玻色子的噪声关联.....	15
2.2.1 理论模型.....	15
2.2.2 均匀链中的噪声关联.....	17
2.3 噪声关联的标度.....	18
2.4 小结.....	20
第三章 非对角 AAH 晶格中硬核玻色子的量子关联.....	21
3.1 模型和方法.....	21
3.2 量子关联.....	24
3.2.1 动量分布.....	24
3.2.2 噪声关联.....	25
3.2.3 动量分布和噪声关联的标度.....	26
3.3 量子相变.....	27
3.4 小结.....	28
第四章 总结与展望.....	31
4.1 总结.....	31
4.2 展望.....	31

参考文献.....	33
攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目.....	39
致 谢.....	41
个人情况及联系方式.....	43
承 诺 书.....	45
学位论文使用授权声明.....	47

## Contents

<b>Chinese Abstract .....</b>	<b>I</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>III</b>
<b>Chapter 1 Preface.....</b>	<b>1</b>
1.1 Quantum correlation .....	1
1.1.1 A brief introduction to Quantum correlation.....	1
1.1.2 Experimental measurement of quantum correlations in ultracold atomic gases .....	2
1.1.3 Quantum correlation detects quantum phase transition .....	4
1.2 Hard-core bose gas.....	6
1.3 Introduction to AAH model .....	8
1.4 Bose glass phase transitions.....	9
1.5 Arranging of this thesis .....	11
<b>Chapter 2 Exact approach of hard core bose gas.....</b>	<b>13</b>
2.1 Bose-Fermi mapping.....	13
2.2 Quantum correlations of HCBs in 1D Bose-Hubbard model .....	15
2.2.1 Theoretical model .....	15
2.2.2 Noise correlation in homogeneous chains .....	17
2.3 Scaling of noise correlation .....	18
2.4 Summary .....	20
<b>Chapter 3 Quantum correlations of HCBs in off-diagonal AAH lattices .....</b>	<b>21</b>
3.1 Model and Method.....	21
3.2 Quantum Correlation .....	24
3.2.1 Momentum distributions.....	24
3.2.2 Noise correlations .....	25
3.2.3 Scaling of momentum distributions and noise correlations.....	26
3.3 Quantum phase transition .....	27
3.4 Summary .....	28
<b>Chapter 4 Summary and Outlook.....</b>	<b>31</b>
4.1 Summary.....	31
4.2 Outlook .....	31

<b>Refernces</b> .....	33
<b>Research Achievements</b> .....	39
<b>Acknowledgment</b> .....	41
<b>Personal Profiles</b> .....	43
<b>Letter of Commitment</b> .....	45
<b>Authorization Statement</b> .....	47



## 中文摘要

强关联多体量子体系中量子相变的确定与刻画一直是当今物理学研究前沿的一个重要研究课题，而且在这个研究领域已经涌现出许多重要的研究成果。其中，无序和无序引起的量子相变问题是此领域中的一个重要热点。著名的 Aubry-André Harper (AAH) 模型是研究这类无序问题的一个经典模型，它具有非公度的格点势，是一种准周期势，可以用来模拟一维紧束缚系统中的无序现象。在此基础上推广得到的广义 AAH 模型已成为研究无序诱导的局域化现象及分析拓扑性质的一个重要的研究框架。本文的主要研究对象为非对角 AAH 晶格中的一维硬核玻色系统。硬核玻色气体是一类重要的强关联量子多体系统。所谓硬核玻色气体，就是粒子与粒子之间具有强排斥相互作用的玻色气体，要求玻色子满足硬核极限。由于其独特的性质，硬核玻色气体自上世纪 60 年代起就备受关注。在本论文中，我们主要研究光晶格中硬核玻色系统的基态量子关联，并用其来确定和刻画一类晶格系统的基态量子相及量子相变。

在第二章中，我们基于一维对角 AAH 晶格模型的实例，从一种非常具体的角度详细介绍了光晶格中的一维硬核玻色系统严格的研究方法。这种严格的计算方法本质上是一种玻色费米映射，它基于 Holstein-Primakof 变换及 Jordan-Wigner 变换而来。借助于玻色费米映射，我们可以利用 Slater 行列式的性质获得系统的严格基态。进而，作为一个简单的实践与练习，我们介绍了利用以上方法计算得到的一维对角 AAH 晶格模型中硬核玻色子的噪声关联性质。

在第三章中，我们研究了一维非对角 AAH 光晶格中的硬核玻色子系统。其特点为系统的跃迁项受到一个模拟无序的外加非公度跃迁项的调制。利用第二章中介绍的研究硬核玻色系统的严格数值方法，我们得到了系统的严格基态。借助于并行数值运算，得到了体系在不同参数区域的动量分布和噪声关联。此外，对以上量子关联进行细致的标度分析，我们可以看到在此参数区域内，对于超流相、临界点和玻色玻璃相，显示出清晰而迥异的标度行为。体系具有两个性质区分明显的基态相：超流相和玻色玻璃相。最后，我们还分析了这些量子关联的中心强度及其关于准周期无序强度的导数。可以看到在临界点附近动量分布和噪声关联中心强度的一阶导数都出现了明显的峰值。这提供了一种强有力的信号，可用来在实验上探测无序诱导的量子相变。

**关键词：**硬核玻色子；噪声关联；量子相变；玻色玻璃相；AAH 模型

## ABSTRACT

The determination and characterization of quantum phase transitions in strongly correlated many-body quantum systems has always been an important research topic in the frontiers of physics nowadays, and many important research results have emerged in this field. Disorder and disorder-induced quantum phase transitions are one of the hottest topics in this field. The famous Aubry-André Harper (AAH) model is a typical model to investigate this kind of disorder problem. It has an incommensurate lattice potential and is a quasi-periodic potential that can be used to mimic the true disorder in 1D tight binding systems. The generalized AAH model popularized on this basis has become an important research framework for studying the localization phenomenon of disorder induction and analyzing the topological properties. We mainly investigate hard core bose systems in one dimensional off-diagonal AAH lattice. Hard-core bose gas is an important kind of strongly correlated quantum many-body system. The so-called hard-core bose gas is a bose gas with strong repulsion interaction between particles, which requires that the bosons satisfy the hard core limit. Due to its unique properties, hard-core bose gas has attracted much attention since the 1960s. In this thesis, we mainly investigate the ground state quantum correlation of hard core boson system in optical lattices and use it to determine and characterize quantum phase transitions of the ground state.

In Chapter 2, based on a 1D diagonal AAH lattice model, we introduce the exact approach of one-dimensional hard core bose system in optical lattice from a very specific point of view. This exact approach is essentially a Bose-Fermi mapping, which based on the Holstein-Primakof transformation and the Jordan-Wigner transformation. Utilizing Bose-Fermi mapping, we can obtain the exact ground state of the system by using the properties of Slater determinant. Furthermore, as a simple practice and exercise, we introduce the noise correlation of hard core

bosons in the one-dimensional diagonal AAH lattice model calculated by the above approach, and characterize the quantum phase transitions in the system.

In Chapter 3, we investigate a hard core boson system in 1D off-diagonal AAH optical lattices, in which hopping term of the system is modulated by an additional incommensurate hopping term mimicking disorder. By using the exact numerical method introduced in Chapter 2, we obtain the exact ground state of the hard core boson system. By means of parallel numerical calculation, we obtain the momentum distribution and noise correlation of the system in different parameter regions. In addition, by means of detailed scaling analysis of the above quantum correlations, we can see that the scaling behavior of superfluid phase, critical point and bose glass phase is clear and different in this parameter region, and the system has two distinct ground state phases: superfluid phase and Bose glass phase. Finally, we compute derivatives of the central intensities of these quantum correlations with respect to the strength of the quasiperiodic disorder, and there are clear peak appears at the critical point. This provides a powerful signal that can be used to detect quantum phase transition induced by disorder experimentally.

**Keywords:** hard-core bosons; noise correlations; quantum phase transition; bose-glass phase; AAH model

# 第一章 绪论

强关联量子系统 (strongly correlated quantum systems) 是当今物理学中非常基本又最吸引人的物理系统之一。本论文研究的光晶格中的一维硬核玻色气体就是这类系统的一个重要例子。在正式介绍我们研究工作之前, 我们先来简要概述一下相关的背景知识与模型方法。量子关联及其在实验上的测量是非常重要的, 此外, 量子关联还可以刻画量子相变。而光晶格中的一维硬核玻色气体系统是将超冷玻色原子构成的玻色爱因斯坦凝聚体载入到精妙设计好的光晶格中, 并辅以必要的光学势、磁势而得到的物理系统。本章结构即以此逻辑展开。

## 1.1 量子关联

### 1.1.1 量子关联简介

量子关联是量子理论中的一个基本概念, 它对于量子多体系统的描述非常重要, 所有的物理可观测量都可以用粒子产生和湮灭算符之间的关联函数来表示。量子关联刻画的是由至少两个部分组成的系统的量子特性。量子关联<sup>[1-3]</sup>的不断发展为核心量子技术奠定了基础。比如, 量子关联是完成许多量子信息<sup>[4]</sup>与量子计算任务的重要物理资源, 它们在信息处理任务中往往比经典理论更具有显著的优势。此外, 量子关联在量子物理中的应用也很广泛。众所周知, 它是各种潜在技术的核心, 例如超密集编码 (superdense coding)、量子隐形传输和量子密码术<sup>[5-8]</sup>。

对于量子关联, 物理学家可以从不同的角度对它们进行表征和量化。在历史上, 人们已经提出了许多类型方法来对物理系统的量子关联进行量化描述。比较著名的例子包括 2005 年 Genovese 提出的 Bell 型非局域关联和 2009 年 Horodecki 等人提出的量子纠缠等。在本世纪初, Henderson 和 Vedral 以及 Ollivier 和 Zurek 分别提出了量子失协 (quantum discord) 的概念。在此基础上, 其他物理学家们进一步提出了一系列类似量子失协度量的相关方法, 并从不同方面进行了研究, 例如 Modi 等人在 2012 年的相关研究工作<sup>[9]</sup>。

此外, 对量子关联时间演化的研究也是物理学者们所关注的。众所周知, 量子关联是非常脆弱的, 很容易被意料之外的与环境间相互作用破坏。因此, 量子关联在各种噪声环境中的时间演化一直是量子信息处理和量子计算的重要课题。2018 年, 刘霞及其实验研究小组利用熵不等式, 即 Braunstein-Caves (BC) 链式贝尔不等式, 研究了量子关联的演化<sup>[10]</sup>。她们利用全光学实验装置, 实验制备

了高保真度的两比特纠缠态，并模拟了比特翻转和相移噪声。然后，利用熵的信息差，研究了两比特纠缠系统在不同噪声信道和噪声环境下的量子关联演化。

### 1.1.2 超冷原子气体中量子关联的实验测量

相较于其它领域，在超冷原子物理系统中对量子关联的观测，其起步还是比较晚的。在量子光学、核与基本粒子物理学等领域，高阶量子关联中的噪声关联的实验观测与分析早已成为一种重要的基础研究手段。但是直到 1996 年，才有冷原子实验通过测量噪声关联 (noise correlations) 直接观测了非简并冷玻色子原子云的聚束效应 (bunching effect)。量子多体理论指出，所有物理可观测量都可以根据粒子产生或湮灭算符构成的关联函数来描述。因此，这些关联函数的测量可以被视为量子多体问题的一个操作性的解决方案。这就使得量子关联在超冷原子物理实验中的测量非常重要。

2004 年，I. Bloch 实验小组直接观测了从光晶格释放出来的自由扩散的超冷玻色原子气体的空间密度涨落的关联函数。实验中他们将超冷玻色原子气体制备在 Mott 相上，然后将光晶格势撤掉，让原子气体自由飞行，之后用一束探测激光照射扩散中的原子气体，获得吸收成像图。最后通数据分析获得体系的噪声关联。噪声关联的定义为<sup>[11]</sup>

$$C(d) = \frac{\int \langle n(x+d/2) \cdot n(x-d/2) \rangle d^2x}{\int \langle n(x+d/2) \rangle \langle n(x-d/2) \rangle d^2x} \quad (1.1)$$

它表示在两个由向量  $\vec{d}$  分隔的位置上找到两个粒子的条件概率，在所有这些位置上平均。在方程式 (1.1) 中， $n(x)$  是从单个吸收图像获得的列密度，括号  $\langle \rangle$  表示独立获取图像的集合的平均值。不关联粒子对应于  $C(d)=1$ ，而  $C(0)>1$  表示粒子具有聚束效应，这是玻色子的统计性质。I. Bloch 实验小组的实验结果表明，从完全混乱的密度涨落中利用高阶量子关联，即噪声关联，可以清晰提取出光晶

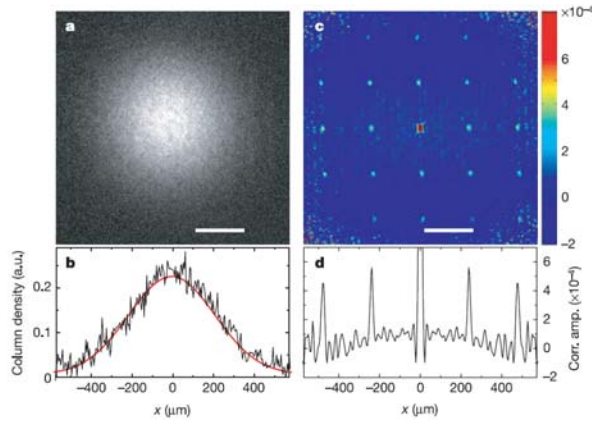


图 1.1 自由扩散的超冷玻色原子的吸收成像图及相应的噪声关联<sup>[11]</sup>

格的规则晶格序等信息，如图 1.1 所示。这个重要的超冷原子实验表明高阶量子关联可以获取物理体系许多隐含的信息。这正是物理学家开展量子关联相关研究的一个重要依据和动机。

近年来，更高阶的量子关联也越来越受到物理学家们的关注，其原因在于，基于现在的超冷原子实验技术，实验物理学家已经可以比较方便地从实验上测量这些量子关联。如 2011 年 S. S. Hodgman 研究小组通过综合利用两个关键实验因素实现了同时进行的二阶和三阶关联测量，即亚稳态氦原子  $H_e^*$  的单原子探测特性（亚稳态  $2^3S_1$  态的寿命约为  $8000s$ <sup>[12]</sup>，并含有  $20eV$  的内部能量，能够实现高检测效率<sup>[13]</sup>）和一种新的原子系综<sup>[14]</sup>的关联统计的大量数据的收集方法。

实验原理如图 1.2 所示。探测器记录了原子云中每个原子的位置和到达时间。然后，通过测量到达每个分析区域的原子之间的延迟时间  $\tau$ ，可以确定两粒子（二阶）和三粒子（三阶，放大显示）的关联。中间的插图（蓝色框）更详细地显示了原子系综的到达探测板时的过程，而右侧的插图（绿色圆柱）则显示了分析区域内三个原子的到达时序。三阶关联函数表征了三个原子的到达时间差  $\tau_1$  和  $\tau_2$ 。

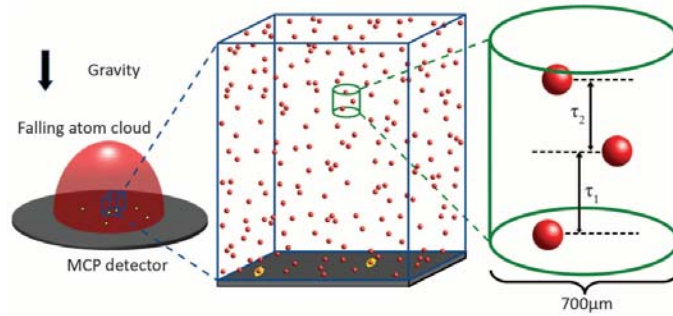


图 1.2 实验装置：一组氦原子（红色球体）在重力作用下落在 MCP 探测器上，形成一系列在空间和时间上分离的探测结果（黄色）。<sup>[15]</sup>

然后由相对到达时间为  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的重合个数确定非归一化三阶关联函数  $G^3(0, \tau_1, \tau_2)$ （第一个粒子的时间原点为  $\tau = 0$ ）（如图 1.2）。对于在 microchannel plate（MCP）上测量的每个检测活动，记录  $700\mu m$  内所有粒子在到达时间  $\tau_1$  中的差异。然后检查每对粒子，以确定第三个粒子是否到达相同半径内，在这种情况下，还记录了粒子 2 和粒子 3 之间的时间差  $\tau_2$ 。

然后通过除以局域粒子密度获得归一化时间关联函数  $g^3(0, \tau_1, \tau_2)$ 。这是通过在  $x-y$  平面上平均分析区域上的单个粒子数来实现的，并通过下落粒子的撞击速度来识别  $\tau$  与  $z$  相关来实现的。这产生了飞行时间关联函数<sup>[15]</sup>

$$g^3(0, \tau_1, \tau_2) = \frac{G^3(0, \tau_1, \tau_2)}{\rho(0)\rho(\tau_1)\rho(\tau_2)} \quad (1.2)$$

上式中， $\rho(\tau)$  是测量第一个粒子后在  $\tau$  时刻的密度。在理想情况下，对于热原子，探测器的分辨率是无限的，这会在非常大的延迟时间  $\tau$  下产生渐近值为 1，在零延迟时间的峰值为  $g^3(0,0,0)$ （即 6）；峰的宽度定义了原子系综的关联时间。

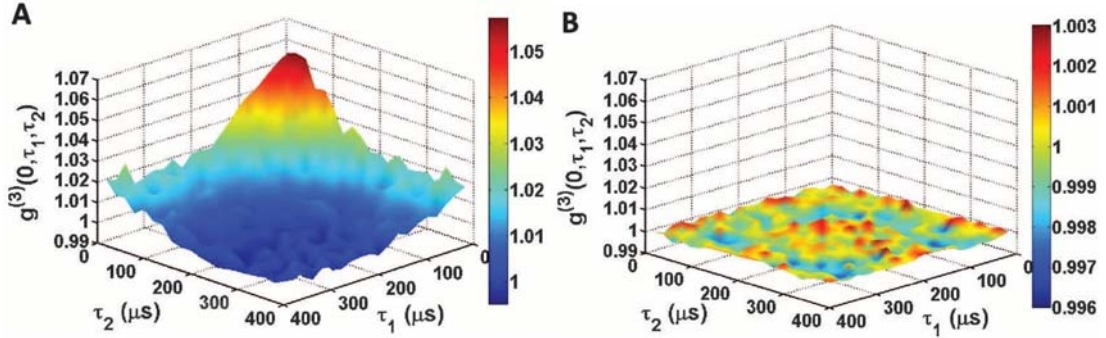


图 1.3 归一化三阶关联函数  $g^3(0,0,0)$ , A 是热原子系综, B 为 BEC。<sup>[15]</sup>

图 1.3 中是刚好高于 BEC 转变温度 ( $T_c = 1.0 \mu K$ ) 的热原子以及 BEC 的测量三阶关联函数。由于探测器的分辨率和实验时的分块方法有限，热原子的  $g^3(0,0,0)$  从理想情况下对应的值大大减小了。

### 1.1.3 量子关联探测量子相变

量子关联奠定了许多新型量子技术的核心基础，随着量子信息技术的快速发展，量子关联的应用也是物理学者们关注的热点。例如，利用量子关联可以检测量子相变的临界点。在这里，我们以一维 AA 模型中的费米子为例来介绍一种利用量子关联刻画量子相变的实验方法。

实验中所研究的是有相互作用的一维费米子 AA 模型，其哈密顿量描述为<sup>[16]</sup>,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -J \sum_{i,\sigma} (\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{i+1,\sigma} + h.c.) \\ & + \Delta \sum_{i,\sigma} \cos(2\pi\beta i + \phi) \hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{i,\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i,\uparrow} \hat{n}_{i,\downarrow} \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中， $J$  是近邻格点间的隧穿系数， $\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger$  ( $\hat{c}_{i,\sigma}$ ) 是带自旋费米子在格点  $i$  处的产生（湮灭）算符， $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ 。第二项描述了准随机无序，即由于外加的非公度晶格导致的格点能量偏移，其主要特征是晶格周期  $\beta$ 、无序强度  $\Delta$  和相偏移。 $U$  是格点相互作用能， $\hat{n}_{i,\sigma}$  是粒子数算符。

在研究中，该实验是在具有双色，准随机无序晶格势的超冷费米子的一维系统中进行的。他们通过监测系统参数淬火后局域可观测量的时间演化来识别多体



局域相。具体来说，首先准备一个具有强电荷密度波（charge density wave，简称 CDW）的高能初态，并在随后的单一演化中测量该电荷密度波的弛豫。主要观察的是偶数（ $N_e$ ）和奇数（ $N_o$ ）位置上各自原子数之间的不平衡性（ $I$ ）<sup>[16]</sup>，

$$I = \frac{N_e - N_o}{N_e + N_o} \quad (1.4)$$

它可以直接测量 CDW 序。虽然初始的 CDW（ $I \geq 0.9$ ）在热化情况下会迅速变至零，但在局域系统中并非如此，在该系统中，因为局域系统的遍历性被破坏，系统不能作为其自身的热浴。直观地说，如果系统是强局域化的，那么在时间演化过程中，所有的粒子都会保持在它们原来的位置附近，因此只会稍微抹掉一点 CDW。较长的局域化长度  $\xi$  对应于更大的扩展态，并将导致 CDW 值为较低的稳态值。因此，可以长时间将稳态值有效地用作多体局域（many-body localization）相的有序参数，并且人们在相互作用的参数空间与无序强度之间映射遍历和非遍历阶段之间的相界。特别是，在非相互作用系统中，CDW 渐渐地消失为  $\propto 1/\xi^2$ 。与之前研究无序对全局扩展动力学影响的实验相反，CDW 序参数作为一个纯粹的局域探测器，直接捕获遍历性破坏。

在实验中，研究小组通过在主短晶格（ $\lambda_s = 532nm$ ）上再叠加一个非公度的无序晶格  $\lambda_d = 738nm$ （因此  $\beta = \lambda_s/\lambda_d \approx 0.721$ ）并且同时通过晶格深度和两个晶格之间的相对相位控制  $J, \Delta$  和  $\phi$  来实现 AA 模型。两种不同自旋态的原子间的相互作用（ $U$ ）通过磁性 Feshbach 共振进行调谐。总的来说，这提供了对  $U$ 、 $J$  和  $\Delta$  的独立控制，使实验员能够连续地将系统从无相互作用情况下的安德森绝缘体调到相互作用粒子的多体局域状态。另外一个长晶格（ $\lambda_l = 1064nm = 2\lambda_s$ ）与短晶格一起形成一个 2 周期超晶格<sup>[17,18]</sup>，并且在初始 CDW 状态的准备期间和检测期间使用。沿正交方向（ $\lambda_{\perp} = 738nm$  和  $V_{\perp} = 36E_R$ ）的深晶格，创建一个去耦的一维管阵列。其中  $E_R = \hbar^2/(2m\lambda_{lat}^2)$  代表反冲能量， $\hbar$  为普朗克常数， $m$  为原子质量， $\lambda_{lat}$  为晶格激光器的相应波长。他们使用  $^{40}K$  原子的双组分简并费米气体，它由  $25-30 \times 10^3$  个原子在两个最低超精细态  $|9/2, -7/2\rangle \equiv |\uparrow\rangle$  和  $|F, m_F\rangle = |9/2, -9/2\rangle \equiv |\downarrow\rangle$  中的等量混合物组成，初始温度为  $0.24T_F$ ，其中  $T_F$  为费米子温度。原子最初在长且正交晶格中以有限温度带绝缘态<sup>[19]</sup>制备。然后，通过以倾斜的形式向上倾斜短晶格，向下倾斜长晶格，来分割每个晶格位置。这会产生电荷密度波，其中奇数晶格位置上没有原子，但每个偶数位置上只有零个，一个或两个原子。接着，允许初始 CDW 在  $8.0E_R$  深短晶格中的特定作用强度  $U$ ，

存在无序  $\Delta$  条件下演化一段时间。在最后一步中，通过采用带映射技术检测偶数和奇数晶格位置上的原子数，该技术将它们映射到超晶格的不同波段。

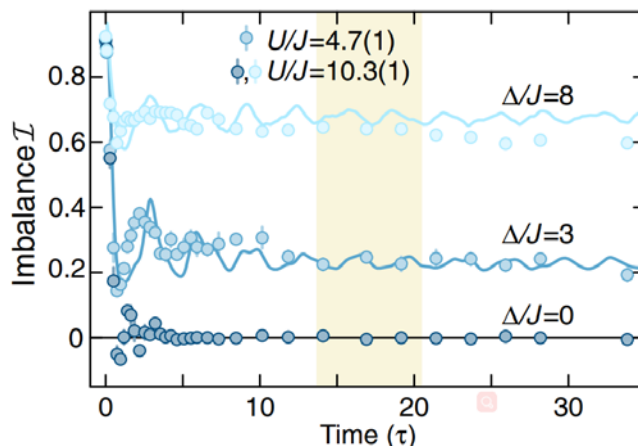


图 1.4 初始电荷密度波的时间演化。<sup>[16]</sup>

实验人员跟踪不同相互作用  $U$  和无序强度  $\Delta$  的不平衡  $I$  的时间演化（见图 1.4）。在短时间内，这种不平衡表现出一些由快衰减和一些阻尼振荡组成的动力学特性。在几个隧穿时间  $\tau = \hbar/(2\pi J)$  后，不平衡接近一个平稳值。在没有无序的系统（ $\Delta/J$ ）及弱无序系统中，不平衡的稳态值接近零。然而，对于更强的无序，这种行为会发生显著的变化，并且不平衡达到了一个不会消失的稳态值，这个值在所有观察时间内都会持续存在。由于在这些高能下接近热平衡时不平衡性必须衰减到零，因此  $I$  的非平稳值直接表示非遍历动力学。在局域相的深处，无偏差数值密度矩阵由于纠缠增长缓慢，重整化群（Density-Matrix Renormalisation Group）计算是可行的，并且发现模拟中得到的平稳值与实验结果非常吻合。这些模拟是在没有任何俘获电势的单一均质管上进行的。在实验中观察到的较强的振荡阻尼可归因于由不同 1D 管之间  $J$  的变化引起的失相。

## 1.2 硬核玻色气体

硬核玻色气体是现代物理学中的一个重要概念，又称 Tonks-Girardeau(TG) 气体，它以物理学家 Marvin D. Girardeau 和 Lewi Tonks 的名字命名。1960 年 Girardeau 首先从理论上研究了一维 TG 气体。在这个著名的理论工作中，他建立了 TG 气体与无相互作用极化费米子气体之间的精确映射<sup>[20]</sup>。所谓硬核玻色气体，就是粒子与粒子之间具有强排斥相互作用的玻色气体，即要求玻色子满足硬核极限。比如，考虑一维格点线上的一排玻色子，当两个玻色子接近时，它们彼此会感受到极强的排斥相互作用，而当两者远离时，彼此之间则没有相互作用，这让人联想到费米子系统的 Pauli 不相容原理。因此这种现象一般被称作玻色子

的“费米化”。事实上，Girardeau 的理论工作指出，这种一维硬核玻色子体系的许多特性的确与费米子系统的性质非常类似。不过，硬核玻色子系统的行为在几个重要方面与费米子的行为也有着明显的不同，比如，大量硬核玻色子可以占据相同的动量态，也就是其基态动量分布更符合玻色子的性质，但也不同于普通玻色子系统。

TG 气体被提出后，一直被看作是一个纯理论的模型（toy model），因为在当时这几乎是没有可能在实验上实现的。这种状态一直持续了将近半个世纪，直到超冷原子物理兴起。2004 年，实验物理学家贝伦·帕雷德斯 (Belén Paredes) 等人在光晶格中载入了超冷原子气体首次在实验上制备出了晶格中的硬核玻色气体系统，此工作发表在当年 5 月 20 日出版的科学杂志 Nature 上<sup>[21]</sup>。

实验中制备的光晶格中的 TG 气体可以用如下硬核 Bose Hubbard 哈密顿量来描述，

$$H_B = -J \sum_l (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l+1} + \hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a}_l) + V_H \sum_l l^2 \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \quad (1.5)$$

上式描述了光晶格中的一维超冷硬核玻色原子在简谐波势中的运动，而  $V_H$  是简谐势的强度，它与简谐势的频率  $\omega$  有关， $V_H = 1/8m\omega^2 \lambda^2$ 。 $\hat{a}_l^\dagger (\hat{a}_l)$  是玻色子在格点  $l$  处的产生（湮灭）算符，满足对易关系  $[\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{ll}$ ，此外产生湮灭算符还要满足附加的硬核条件  $\hat{a}_l^{\dagger 2} = \hat{a}_l^2 = 0$ ，这一条件排除了光晶格格点上的多粒子占据。

此外，除了上述光晶格中的一维 TG 气体的实验实现外，在同一年，来自宾夕法尼亚州立大学的 Kinoshita 等人成功地在实验上观测到了一维连续系统中的 TG 气体<sup>[22]</sup>。该实验实现的是连续的一维硬核玻色系统，它对应如下理论模型

$$H_{HCB} = \sum_{j=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^N V(x_j) \quad (1.6)$$

此模型可以通过 Bethe-Ansatz 方法精确求解。本论文着力研究晶格系统，故在此不作展开叙述。

众所周知，光晶格中的原子量子气体结合了各种特性，成为研究量子现象的独特实验平台。因为这些系统参数是高度可调的，包括维数、晶格几何、相互作用强度、自旋态数等。因此光晶格中硬核玻色气体也一直是理论物理学家和实验物理学家广泛关注的焦点，并已涌现出很多重要的成果。例如，在 2016 年 Karlo Lelas 等人研究了激光辅助隧穿效应在光晶格中 TG 气体的适用性<sup>[23]</sup>。2018 年，Luis A. Peña Ardila 及其小组成员提出了一个依赖于远距离晶格点之间的大型有

效隧穿耦合工程和基于两次连续淬火后测量位置占有的方案,并用其在实验上测量了光晶格中硬核玻色子的单粒子密度矩阵<sup>[24]</sup>。

### 1.3 AAH 模型介绍

过去的几十年中,在无序导致的局域化现象获得广泛关注的背景下,Aubry-André Harper (AAH)<sup>[25,26]</sup>模型在理论和实验上都引起了广泛的关注。随着实验技术和技能的快速发展,这个模型现在可以在光子晶体<sup>[27-29]</sup>和冷原子系统<sup>[30]</sup>中实现,这有助于我们对非公度系统有更多的理解。众所周知,在一维(1D)系统中,安德森局域化是平庸的,任意强度的无序都会使系统变为局域的,没有物理学家们关心的相变点,缺乏真正的量子相变,进而无法研究备受关注的无序诱导的金属-绝缘体相变问题。与一维 Anderson 局域化模型相比,AAH 模型则具有明显的局域化相变的特征,可以明确看到系统从扩展态到局域态的量子相变,因此在研究局域化时备受欢迎。目前,AAH 模型已成为在一维系统中研究局域现象和拓扑性质的重要平台。AAH 模型的原始形式仅包含非公度格点势,最初引入这样的非公度势就是用来在一维格点系统中研究局域化现象的,这种非公度势的存在可以模拟真正的无序。在本论文中我们主要研究非对角 AAH 模型。

原始的 AAH 模型可以用以下 Hamiltonian 描述<sup>[31]</sup>

$$H = \sum_{n=1}^N t (\hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n + H.c) + \sum_{n=1}^N v \cos(2\pi bn + \varphi) \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \quad (1.7)$$

其中,  $t$  是最近邻跃迁,  $\hat{c}_n^\dagger$  和  $\hat{c}_n$  分别是费米子的产生、湮灭算符,  $v$  是非公度势的强度,  $\varphi$  是相位因子。当  $b$  取为无理数时,格点势是准周期的,该模型具有有限的局域化相变临界值:  $0 < v < 2t$ , 所有的本征态都是扩展态;  $v > 2t$  时是局域态。

经过物理学者们的广泛研究,原始的 AAH 模型被推广到适应不同物理问题的各种形式。例如,具有纯非对角耦合的 AAH 模型已被用于研究拓扑绝热泵浦 (Adiabatic pumping) 现象<sup>[29,32,33]</sup>。近期的一些实验<sup>[29,34]</sup>已经在光晶格中实现了准周期 AAH 模型,并观察到了与理论一致的局域化相变的特征。一维 AAH 模型还可以精确地映射到二维 Hofstadter 模型<sup>[26,35]</sup>。

广义的 1D AAH 模型的哈密顿量具有如下形式<sup>[36]</sup>

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{n=1}^{N-1} w \left[ 1 + \lambda \cos(2\pi bn + \theta) \right] \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n + H.c. \\
& + \sum_{n=1}^N v \cos(2\pi bn + \theta_v) \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n
\end{aligned} \tag{1.8}$$

这是具有  $N$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) 个格点的一维链。采用的是开边界条件,  $n=1$  和  $n=N$  是两个边界点。在无相互作用的一维量子系统, 这对于玻色子也同样适用。哈密顿量中的第一项是最近邻跃迁的动能, 最后一项是格点势能。跃迁强度和势能项的不均匀性通过  $\lambda$  和  $v$  的余弦调制来描述。余弦调制周期为  $1/b$ , 相因子为  $\varphi_\lambda$  和  $\varphi_v$ 。其特殊情况,  $\lambda=0$ , 对应对角 AAH 模型,  $v=0$  即对应非对角 AAH 模型。

近年来, 基于对 AAH 模型的研究还提出了许多具有奇异特征的广义 AAH 模型, 如具有 P 波超导 (SC) 配对项的 AAH 模型。由于 SC 配对, 系统在从扩展相变到局域相之前会显示出一个临界区<sup>[37]</sup>, 目前已经有研究工作对此临界区域进行了深入的讨论。此外, 随着科学的发展, 许多物理现象都可以在 AAH 模型中被广泛研究, 比如, 在 2018 年 Archak Purkayastha 和 Sambuddha Sanyal 等人研究了 AAH 模型在孤立的热力学极限和开放系统中的传输特性<sup>[38]</sup>。

## 1.4 玻色玻璃相变

相变描述了物理系统整体状态的突然改变, 例如固体的熔化或液体的凝固。经典相变通常是热力学相变, 一般发生在物理系统温度低于临界温度的状态时, 且以宏观秩序<sup>[39]</sup>的明显变化为特征。而量子相变则发生在绝对零度, 它们是由外部参数或耦合常数<sup>[40]</sup>的变化引起的, 并由量子涨落驱动, 例如量子霍尔系统中的相变等。对于处于绝对零度附近的系统, 其几乎所有的热涨落都被冻结, 量子涨落占据主导地位。近年来, 量子相变一直是物理学研究领域的一个重要课题, 其中, 无序和无序引起的量子相变一直是该领域的热点之一, 这是由安德森的开创性工作所开启的一个重要研究方向。安德森在其著名的工作中指出当无序强度大于一个临界值时系统波函数会从扩展态变为局域态。

如今, 基于光晶格中的超冷原子体系来研究量子相变已经成为物理学家们一种理想途径<sup>[41]</sup>, 比如, 通过改变光晶格的深度可以观察到超流 (SF) 相和莫特绝缘 (MI) 相之间的量子相变<sup>[42]</sup>。光晶格中超冷原子系统的高度可控性使之尤其方便于研究无序效应。利用激光散斑或多色光晶格<sup>[43,44]</sup>产生的光学势, 可以方便地在冷原子系统中产生人为可控的无序 (或伪无序)。安德森局域研究的通常是弱相互作用或无相互作用系统中的无序效应。对于强相互作用的无序玻色系统

来说，则具有更多有趣的物理性质。对处于强相互作用区的无序玻色-哈伯德模型的研究工作<sup>[45,46]</sup>揭示了一种叫做玻色玻璃（BG）相的新型绝缘相的存在。无序和相互作用的竞争合作使凝聚态系统发生超流体到绝缘体的相变。对于玻色系统来说，这种绝缘体就是玻色玻璃（BG）相。与莫特绝缘体（MI）不同，玻色玻璃（BG）相具有无能隙激发谱的特征，并且是可压缩的。光晶格中囚禁的超冷原子气体于是成为研究玻色玻璃相的理想实验系统，此系统中无序振幅和相互作用强度<sup>[47-50]</sup>都可以进行可控地调节。

目前，已有许多超冷原子实验实现了玻色玻璃相。比如，在第一次尝试用超冷原子制备 BG 相时，物理学家使用了双色准无序光晶格。研究者在实验中测量了超冷玻色原子系统的吸收谱和长程空间相干性，来确认实验观测到的量子相即是 BG 相。而另一个稍后的实验工作<sup>[50]</sup>表明，在三维系统中，无序的存在导致 SF 相以及 SF 和 MI 共存相的凝聚因子（Condensation fraction）显著降低。他们将凝聚因子的消失作为 BG 相的探测手段。

如前文所述，光晶格势中相互作用玻色气体由玻色-哈伯德哈密顿量描述<sup>[48]</sup>

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j, j' \rangle} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) + \sum_j \varepsilon_j \hat{n}_j \quad (1.9)$$

其中  $\hat{b}_j$  ( $\hat{b}_j^\dagger$ ) 是格点  $j$  处粒子的湮灭（产生）算符， $\hat{n}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$  是粒子数算符， $\langle j, j' \rangle$  表示对最近邻格点的求和。这里的  $\varepsilon_j$  是依赖于格点位置的格点能，它的取值是随机的，用以描述体系中的无序。

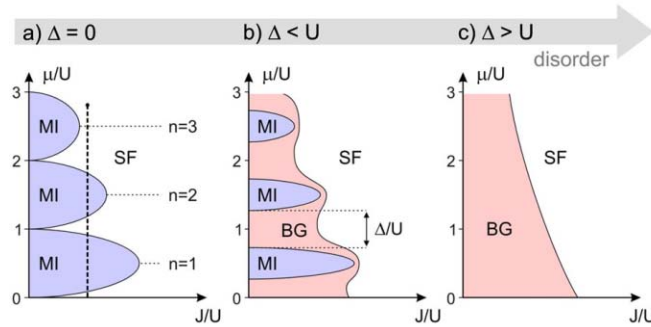


图 1.5 无序相互作用下玻色子的相图<sup>[48]</sup>

其中  $J$  表示跃迁能， $U$  表示相互作用能， $\Delta$  表示无序强度

当 (1.9) 式中  $\varepsilon_j = 0$  时，系统的基态由  $J$  和  $U$  之间的竞争决定。当  $U \ll J$  时，系统处于超流态，此时玻色子是扩展的且隧穿确保了长程相干性。而当  $U \gg J$  时，系统处于局域 MI 态，其中相位相干性消失，并且在晶格位置处产生 Fock 态。所以通过调节  $J$  和  $U$  的关系可以使系统发生从 SF-MI 的量子相变。

格点势是有界的随机变量，取值为  $\varepsilon_j \in [-\Delta/2, \Delta/2]$ ，对于弱无序  $\Delta < U$ ，MI

会逐渐缩小并出现一个新的相，即玻色玻璃相，如图 1.5 (b) 所示。当  $\Delta > U$ ，最终 MI 相消失，系统完全变为玻色玻璃相。此 BG 相与 MI 相有共同的特征，即两者都是绝缘状态，没有长程相干性，超流因子为零。

量子相变的刻画也一直是现代物理学家广泛研究的热点，近年来，许多物理学家们尝试用高阶量子关联来刻画量子相变，比如，我们前面提到噪声关联，它实质是涨落之间的关联，它可以刻画单粒子关联不能刻画的性质。本论文主要工作即为尝试利用一阶及二阶量子关联来刻画 AAH 晶格中的一维超冷玻色原子气体中的基态量子相及相应的量子相变的物理性质。我们计算了前文提到的玻色玻璃相的噪声关联，分析了其量子关联的标度性质。

## 1.5 论文结构安排

基于以上的背景知识及基础理论概述，本论文后面的内容的结构安排如下：在第二章中，我们基于一维 AAH 模型的一个实例，从一种非常具体的角度详细介绍了光晶格中的一维硬核玻色原子系统严格的研究方法。这种严格的计算方法是一种玻色费米映射，它基于 Holstein-Primakof 变换及 Jordan-Wigner 变换而来。借助于玻色费米映射，我们可以利用 Slater 行列式的性质获得系统的严格基态。进而，作为一个简单的实践与练习，我们介绍了利用以上方法计算的一维 AAH 模型中硬核玻色子的噪声关联，并以之刻画体系中的量子相变。在第三章中，我们研究了一维非对角 AAH 光晶格中的硬核玻色子系统。基于第二章中的研究硬核玻色系统的严格数值方法，我们得到了系统的严格的基态。借助于并行数值运算，我们得到了体系在不同的参数区域的动量分布和噪声关联。对以上量子关联进行细致的标度分析，我们可以看到在此参数区域内，体系具有两个性质区分明显的基态相：超流相及玻色玻璃相。最后，在第四章中，我们对论文工作进行了总结并在其基础上对未来研究工作及下一步可以具体着手的想法作了展望。





## 第二章 硬核玻色系统的严格求解方法

硬核玻色气体自其概念提出起，在物理学界就一直是一个备受物理学家们关注的重要研究课题，包括理论物理学家和实验物理学家，都对此有着浓厚的兴趣。由第一章的介绍，我们知道在硬核玻色系统中，粒子与粒子之间具有强排斥相互作用，对于这样的晶格系统在理论上通常很难直接求解。不过，鉴于一维硬核玻色子体系的许多特性与费米子系统的性质非常类似，一种间接的方法是将硬核玻色系统精确映射到无相互作用的费米子体系中，这样可以精确地计算出许多物理性质。本章我们基于一维 AAH 模型的这一具体实例，详细介绍了光晶格中的一维硬核玻色原子系统严格的研究方法即玻色费米映射，它是综合 Holstein-Primakof 变换及 Jordan-Wigner 变换得到的。借助于玻色费米映射，我们可以利用 Slater 行列式的性质获得系统的严格基态。然后利用以上方法计算一维 AAH 模型中硬核玻色子的噪声关联，并用来刻画体系中的量子相变。

### 2.1 玻色费米映射

在研究硬核玻色体系时，为了方便，通常需要借助于玻色费米映射将体系简化为费米子体系，这样系统变为无相互作用体系，本质上成为一个单粒子问题。此时，系统的很多性质如基态性质等都容易计算。对于晶格系统中的玻色子，玻色-费米映射其实就是 Jordan-Wigner(JW)变换<sup>[51]</sup>和 Holstein-Primakoff(HP)<sup>[52]</sup>变换的结合。

事实上，玻色-费米映射是分两步进行的。第一步是通过 Holstein-Primakoff 变换给出硬核玻色子和自旋系统之间的对应关系，Holstein-Primakoff 变换其实是玻色算符和自旋算符之间的变换

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^+ &= \hat{b}_i^\dagger \sqrt{1 - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i}, \hat{\sigma}_i^- = \sqrt{1 - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i} \hat{b}_i \\ \hat{\sigma}_i^z &= \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i - \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (2.1)$$

当玻色子为硬核玻色子时，有

$$\hat{b}_i^\dagger = \hat{\sigma}_i^+, \hat{b}_i = \hat{\sigma}_i^- \quad (2.2)$$

其中  $\hat{\sigma}_i^+$  是自旋升降算符且  $\hat{\sigma}_i^z$  是 spin-1/2 系统 Pauli 矩阵的  $z$  分量。一个简单的分析表明当且仅当硬核玻色子产生和湮灭算符按正规序 (normal order) 排列时， $\hat{b}_i^\dagger (\hat{b}_i)$  可直接用  $\hat{\sigma}_i^+ (\hat{\sigma}_i^-)$  替换；也就是说，在映射之前，所有产生算符都必须放置在湮灭算符的左侧。硬核玻色子和 spin-1/2 系统之间的这种差异的根源在于，尽管受到多重占有态的抑制，但多重占有的虚态可能出现在玻色-哈伯德模型的

无穷大的  $U$  极限中，因此需要适当考虑这些状态才能正确计算玻色子的关联性。如上所述，一般而言方程  $\hat{b}_i^{\dagger 2} = \hat{b}_i^2$  不适用于玻色子系统（与  $U$  的值无关）： $\langle 0 | \hat{b} \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger | 0 \rangle = \langle 1 | \hat{b} \hat{b}^\dagger | 1 \rangle = 2$ ，如果用自旋算符直接替代了硬核玻色子算符将会导致一个严格的零期望值。因此，为了避免这个问题，正确的方法是在做替换  $\hat{b}_i^\dagger (\hat{b}_i) \rightarrow \hat{\sigma}_i^+ (\hat{\sigma}_i^-)$  之前，使用玻色对易关系使硬核玻色子算符按正常顺序排列。

在第二步中， $\text{spin}-1/2$  系统的升降算符可以通过 Jordan-Wigner 变换映射到无相互作用的费米子系统的产生、湮灭算符

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^+ &= \hat{f}_i^\dagger \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta}, \hat{\sigma}_i^- = \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_i \\ \hat{\sigma}_i^z &= \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_i - \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (2.3)$$

其中  $\hat{f}_i^\dagger$  和  $\hat{f}_i$  分别是无自旋费米子的产生和湮灭算符。(2.3)式的变换是最常用的将硬核玻色子算符映射到费米子算符的变换，但最初 Jordan-Wigner 变换是一种将自旋升降算符映射到费米子产生和湮灭算符的变换，它首先由 Pascual Jordan 和 Eugene Wigner 提出用于一维晶格模型，但现在二维晶格模型也已经有了类似的变换。Jordan-Wigner 变换通常用于精确求解一维自旋链，例如 Ising 和 XY 模型，方法是将自旋算符转换为费米子算符，然后在费米子基础上进行对角化。这个变换实际上表明  $\text{spin}-1/2$  粒子和费米子之间是没有区别的，它可以应用于任意维度的系统。

下面我们先介绍一下如何将自旋  $\text{spin}-1/2$  粒子的 1D 自旋链映射到费米子体系。将自旋  $\text{spin}-1/2$  泡利算符用于一维链的格点  $j$ ， $\hat{\sigma}_j^+$ ， $\hat{\sigma}_j^-$ ， $\hat{\sigma}_j^z$ 。其中  $\hat{\sigma}_j^+$ ， $\hat{\sigma}_j^-$  满足反对易关系  $\{\hat{\sigma}_j^+, \hat{\sigma}_j^-\} = 1$ ，正如从费米子产生和湮灭算符所预期的那样。然后将会试图设定

$$\hat{\sigma}_j^+ = (\hat{\sigma}_j^x + i\hat{\sigma}_j^y)/2 = \hat{f}_j^\dagger \quad (2.4)$$

$$\hat{\sigma}_j^- = (\hat{\sigma}_j^x - i\hat{\sigma}_j^y)/2 = \hat{f}_j \quad (2.5)$$

$$\hat{\sigma}_j^z = 2\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_j - 1 \quad (2.6)$$

我们可以得出在同一格点费米子的反对易为  $\{\hat{f}_j^\dagger, \hat{f}_j\} = 1$ ，但是，在不同的格点费米子的产生湮灭算符之间的关系为  $[\hat{f}_j^\dagger, \hat{f}_k] = 0$ ，其中  $j \neq k$ ，可见，不同格点是对易关系而不是反对易关系，因此上述变换即(2.4-2.6)式存在问题。由此我们可知，在将自旋算符和费米子算符进行类比之前，必须要加以纠正。在此基础上，

Jordan 和 Wigner 于 1928 年重新进行了一次变换。这是 Klein 变换的一个特例，采用了费米子链来定义一组新的算符，它们与前面定义的式子相比只是多了一个相因子  $e^{\pm i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k}$ ，

$$\hat{a}_j = e^{-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-} \sigma_j^- \quad (2.7)$$

$$\hat{a}_j^\dagger = e^{i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-} \sigma_j^+ \quad (2.8)$$

$$\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j = \sigma_j^+ \sigma_j^- = \hat{f}_j^\dagger \hat{f}_j \quad (2.9)$$

$$\hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger = \sigma_j^- \sigma_j^+ = \hat{f}_j \hat{f}_j^\dagger$$

其中，

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0, \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0 \quad (2.10)$$

由此可得出自旋算符和费米子算符之间的映射关系可变为

$$\hat{\sigma}_j^+ = e^{-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k} \hat{f}_j^\dagger \quad (2.11)$$

$$\hat{\sigma}_j^- = e^{+i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k} \hat{f}_j$$

结合前面 HP 变换及上述 JW 变换，经过多次验证和修正，最终我们得到的硬核玻色子和费米子之间的映射关系为

$$\hat{b}_j^\dagger = \hat{f}_j^\dagger \prod_{\beta=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta}, \quad \hat{b}_j = \prod_{\beta=1}^{j-1} e^{+i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_j \quad (2.12)$$

## 2.2 一维玻色-哈伯德模型中硬核玻色子的噪声关联

### 2.2.1 理论模型

在 Bose-Hubbard 模型的硬核极限中，哈密顿量可以写成<sup>[53]</sup>

$$\hat{H}_{HCB} = -t \sum_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + H.c.) + \sum_i V_i \hat{n}_i \quad (2.13)$$

其中  $t$  代表跃迁参数， $\{V_i\}$  是一组格点势。在格点  $i$  处硬核玻色子的产生和湮灭算符分别可以表示为  $\hat{b}_i^\dagger$  和  $\hat{b}_i$ ， $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$  表示格点  $i$  处的粒子数算符。玻色对易关系  $[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j] = \delta_{ij}$  适用于所有格点，但同一格点产生和湮灭算符满足关系  $\hat{b}_i^{\dagger 2} = \hat{b}_i^2 = 0$ ，由上节我们知道，这一关系排除了晶格位置的多重占有。对于上述硬核玻色子体系，利用 2.1 节中得到的最终的玻色费米映射可以将硬核玻色子的哈密顿量映射到精确可解的无相互作用的费米子的哈密顿量，如下式

$$\hat{H}_F = -t \sum_i (\hat{f}_i^\dagger \hat{f}_{i+1} + H.c.) + \sum_i V_i \hat{n}_i^f \quad (2.14)$$

其中  $\hat{n}_i^f = \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_i$  是格点  $i$  处费米子的粒子数算符。该映射表明，硬核玻色子的所有

热力学性质和实空间密度关联与无相互作用费米子系统相同。因为本论文我们是要借助费米子体系进而研究系统的量子关联，所以在计算量子关联时，为了计算单粒子关联，可以将单粒子密度矩阵写为  $\hat{\rho}_{ij} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j = \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^-$ ，此外，

$$\hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- = \delta_{ij} + (-1)^{\delta_{ij}} \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_i^+ \quad (2.15)$$

因此，要计算单粒子密度矩阵  $\rho_{ij} = \langle \hat{\rho}_{ij} \rangle$ ，可转化为计算下列格林函数

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \langle \hat{\sigma}_i^- \hat{\sigma}_j^+ \rangle = \langle \Psi_F | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_i \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} | \Psi_F \rangle \\ &= \det \left[ \left( P^i \right)^\dagger P^j \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中

$$| \Psi_F \rangle = \prod_{\kappa=1}^N \sum_{l=1}^L P_{l\kappa} \hat{f}_l^\dagger | 0 \rangle \quad (2.17)$$

(2.16)式是对应于费米子波函数的斯莱特行列式（ $L$ 是格点数），并且  $\left( P^\alpha \right)_{L, N+1}$ ， $\alpha = i, j$ ，是使用斯莱特行列式的性质得到的，并写为

$$P_{l\kappa}^\alpha = \begin{cases} P_{l\kappa} & \text{for } l < \alpha, \kappa = 1, \dots, N \\ P_{l\kappa} & \text{for } l \geq \alpha, \kappa = 1, \dots, N \\ \delta_{\alpha l} & \text{for } \kappa = N+1 \end{cases} \quad (2.18)$$

一旦计算出  $\rho_{ij}$ ，就可以用傅立叶变换确定动量分布函数

$$n_k = \frac{1}{L} \sum_{ij} e^{ika(i-j)} \rho_{ij} \quad (2.19)$$

其中， $a$ 是晶格常数。

此外，噪声关联可定义为<sup>[54]</sup>

$$\Delta_{kk'} \equiv \langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle - \langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_{k'} \rangle - \langle \hat{n}_k \rangle \delta_{k-k', nK} \quad (2.20)$$

其中  $K = 2\pi/a$ 是倒格矢， $n$ 是非零整数。这里重点讨论如何计算第一项  $\langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle$

$$\langle \hat{n}_k \hat{n}_{k'} \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{ijlm} e^{ika(i-j) + ik'a(l-m)} \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \rangle \quad (2.21)$$

为此，扩展了计算两点关联的方法<sup>[55,56]</sup>以获得四点关联，从而获得噪声关联。根据硬核玻色算符和自旋算符之间的映射，可得到自旋算符中四点关联函数的以下表达式

$$\begin{aligned}
\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \rangle &= \delta_{jl} \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_m \rangle + \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_j \hat{b}_m \rangle \\
&= 2\delta_{jl} \langle \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_m^- \rangle + (-1)^{\delta_{jl}} \langle \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_l^+ \hat{\sigma}_m^- \rangle
\end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.22)式中的  $\langle \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_l^+ \hat{\sigma}_m^- \rangle$  可化简为下式

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_l^+ \hat{\sigma}_m^- \rangle \\
&= \delta_{ij} \delta_{lm} + (-1)^{\delta_{ij}} \delta_{lm} \langle \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_i^+ \rangle \\
&+ (-1)^{\delta_{lm}} \delta_{ij} \langle \hat{\sigma}_m^- \hat{\sigma}_l^+ \rangle + (-1)^{\delta_{ij} + \delta_{lm}} \delta_{lm} \langle \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_l^+ \rangle \\
&+ (-1)^{\delta_{ij} + \delta_{lm} + \delta_{im}} \langle \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_m^- \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_l^+ \rangle \\
&= \delta_{ij} + \delta_{lm} + (-1)^{\delta_{ij}} \delta_{lm} G_{ji} + (-1)^{\delta_{lm}} \delta_{ij} G_{ml} \\
&+ (-1)^{\delta_{ij} + \delta_{lm}} \delta_{lm} G_{jl} + (-1)^{\delta_{ij} + \delta_{lm} + \delta_{im}} G_{jmil}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中  $G_{ijkl} = \langle \hat{\sigma}_i^- \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_k^+ \hat{\sigma}_l^+ \rangle$ 。与上文中计算两点格林函数的方法类似，可得到四点格林函数为

$$\begin{aligned}
G_{ijkl} &= \langle \Psi_F | \prod_{\alpha=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha} \hat{f}_i \prod_{\beta=1}^{j-1} e^{i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_j \\
&\times \hat{f}_k^\dagger \prod_{\gamma=1}^{k-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \hat{f}_l^\dagger \prod_{\delta=1}^{l-1} e^{-i\pi \hat{f}_\delta^\dagger \hat{f}_\delta} | \Psi_F \rangle
\end{aligned} \tag{2.24}$$

使用 Slater 行列式的性质，(2.24)可计算为

$$G_{ijkl} = \det \left[ \left( P^{ij} \right)^\dagger P^{kl} \right] \tag{2.25}$$

### 2.2.2 均匀链中的噪声关联

下面我们将以均匀链中的硬核玻色子为例，具体介绍利用上述方法计算得到的噪声关联，并详细分析了其性质，对于本小节中考虑的所有硬核系统，都是周期性边界条件。

在图 2.1 中，展示了强相互作用超流体系统的典型噪声关联模式图，其中格点数为 200，体系处于半填充状态。该模式图中有三个明显的特征。首先，在  $k = k' = 0$  时出现一个非常大的峰值，这反映了系统中的准凝聚。其次，由于玻色子系统中通常存在聚束现象，因此可以找到  $k = k'$  的极大值线。最后，沿着  $k, 0$  和  $0, k'$  线出现了下降，这一现象与系统中的量子耗散有关。

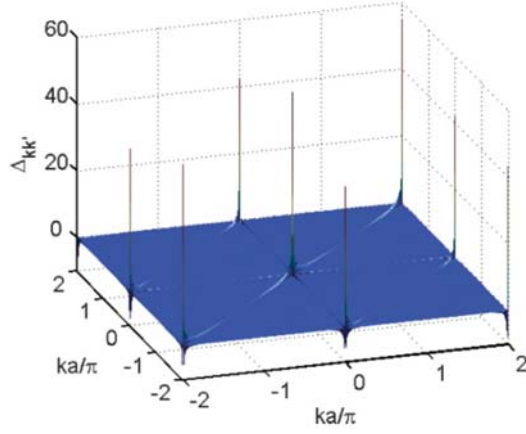


图 2.1 在 200 个格点上具有 100 个硬核玻色子的均匀系统中，  
噪声关联作为  $k$  和  $k'$  的函数。<sup>[53]</sup>

图 2.2 是噪声关联  $\Delta_{k0}$  作为密度  $\rho = N/L$  的函数，描述了沿  $k, 0$  线的噪声关联的演化。在图 2.2 中可以更清楚地看到  $k = 0, \pm K$  峰值周围噪声关联  $\Delta_{k0}$  的下降。可以看到，在  $\rho > 0.5$  时， $\Delta_{00}$  的最大值出现，这表明了粒子-空穴对称性的破坏。

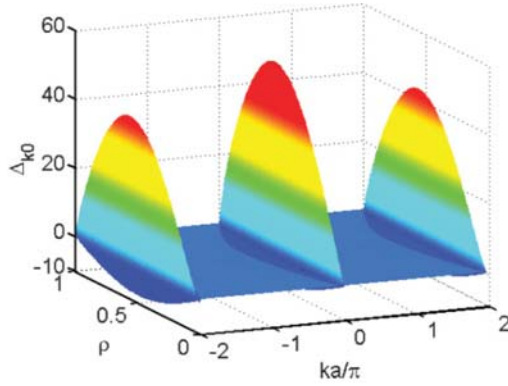


图 2.2 在  $L = 200$  的系统中， $k' = 0$  的噪声关联随着  $k$  和  $\rho$  的改变。<sup>[53]</sup>

此外，在这样的硬核玻色体系中还可以对不同密度范围的  $\Delta_{00}$  做标度分析，并可通过此噪声关联  $\Delta_{00}$  的标度性质来刻画系统的量子相变。这在下一节及第三章我们的研究工作中会详细分析，所以在此不作具体描述。

### 2.3 噪声关联的标度

在此，我们以非公度超晶格中的一维硬核玻色系统为例，对硬核玻色系统精确求解后，可计算出系统的噪声关联，进而对噪声关联进行标度分析的结果，以此来研究准周期无序中硬核玻色子（HCBs）的量子相变。

在单带近似下，非公度超晶格中的一维硬核玻色子的哈密量为<sup>[57]</sup>

$$\hat{H}_{HCB} = -t \sum_j (\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} + H.c.) + \sum_i V_j \hat{n}_j^b \quad (2.26)$$

其中设定  $t = 1$ ， $V_j$  是格点  $j$  处的外势，由次晶格产生，主晶格是紧束缚近似中唯

一描述的晶格。另一方面， $V_j$ 的形式如下，

$$V_j = 2\lambda \cos(2\pi\sigma j + \delta) \quad (2.27)$$

其中参数 $\lambda$ 与用于产生次晶格的激光强度成比例， $\sigma$ 是两个晶格的波矢之间的比率， $\delta$ 是一般的相位因子。这里，选择 $\delta$ 为零且在整个工作中都考虑的是周期边界条件。准周期晶格的特征在于无理数 $\sigma$ ，这是由两个叠加晶格的非公度周期性引起的。在本节中，设定 $\sigma$ 为黄金比率的倒数， $\sigma = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.61803\dots$ 。同样利用玻色-费米映射将硬核玻色系统映射到无相互作用的费米子体系，然后可以进行数值求解并计算关联函数。

研究中关注可观测量噪声关联 $\Delta_{kk'}$ （定义见式(2.20)）。对不同区域中的噪声关联进行有限系统尺寸大小的标度研究见图 2.3 所示。如图 2.3 计算了对于三个不同的 $\lambda$ 值的噪声关联 $\Delta_{k0}$ ，分别代表超流体相，临界点，以及局域相。

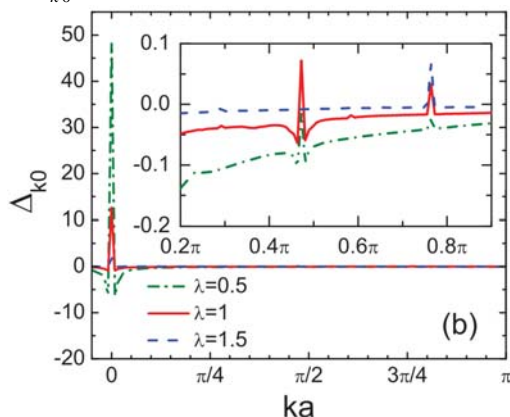


图 2.3 在三个不同 $\lambda$ 值下，硬核玻色子的噪声关联 $\Delta_{k0}$ 。

其中， $L = 233, N = 166$ ，并且 $\sigma = 166/233$ 。

插图表示了噪声关联中的一组子晶格峰。<sup>[57]</sup>

在这里研究的各种量子相中，噪声关联峰的高度在显著变化。例如，在超流体相中峰值是负的，此外，亚晶格峰消失在单位填充时的莫特绝缘相。

此外，还可以计算噪声关联峰 $\Delta_{00}$ 的标度，它是系统尺寸 $L$ 的函数，且图 2.4 中画出了各种 $\lambda$ 值的情况。填充因子固定在 $\rho = 0.5$ ，因此超流体与 $\lambda < 1$ 的情况相关，且扩展相、相变点和局域相中的标度行为有明显的区别。从图 2.4 中可以看到， $\Delta_{00}$ 在超流相和临界状态下都表现出幂律标度，而在玻色玻璃相，它们基本上随系统尺寸 $L$ 的变化保持不变。对于 $\lambda < 1$ ，体系是一种 $K = 1$ 的 Luttinger 液体<sup>[58]</sup>。对于 $\lambda > 1$ ，图 2.4 显示， $\Delta_{00}$ 不随系统尺寸改变而变化，这表明在玻色玻璃相中的关联是指数衰减的，因此不具备 Luttinger 液体行为。

在临界点时， $\Delta_{00}$ 的幂律标度，其指数大约是 Luttinger 液体状态指数的一半。

在图 2.4 中，相变点的拟合指数在  $\rho=1/2$  时为  $0.48\pm 0.03$ ，在  $\rho=1/3$  时为  $0.45\pm 0.02$ 。可看到，随着系统尺寸的增加，这些数据在临界点及以上会出现明显的波动，这些是有限尺寸效应引起的，其主要来源可能是填充因子以及  $\sigma$  在不同尺寸的晶格尺寸之间的轻微波动。

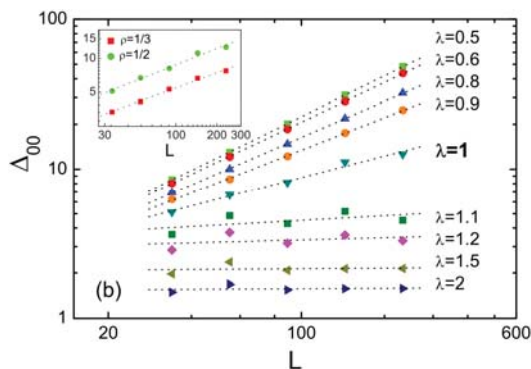


图 2.4 在各种不同  $\lambda$  值下半填充系统  $\Delta_{00}$  中心峰的标度。

黑色虚线是幂律拟合。<sup>[57]</sup>

为了更好地理解强相互作用系统中无序诱导的相变及其特征，还可以研究临界点附近的噪声关联的行为，可分析峰值强度及其导数随着  $\lambda$  的变化。可知在临界值处噪声关联下降的速度剧增且其导数最大值出现在临界值处，从而可得知在临界值处发生了量子相变，这将在我们的研究工作第三章中详细描述。

## 2.4 小结

本章主要介绍了硬核玻色系统的严格求解方法及其应用。首先介绍了玻色-费米变换的发展及推导。其次，以具体的一维光晶格中硬核玻色体系为例，说明利用此精确求解方法，在计算得到严格基态之后，可进而计算其噪声关联等量子关联性质，分析在各种量子相中，噪声关联峰的高度在显著变化。而对噪声关联进行标度分析后发现扩展相、相变点和局域相中的标度行为有明显的区别，以此也可判断出系统处于不同的量子相。同时还可以通过研究噪声关联的峰值强度及其导数随无序强度的变化趋势，可发现系统在临界值处的明显特征，这可作为判断量子相变的依据。下一章我们将用本章介绍的严格的求解方法研究非对角非公度 AAH 光晶格中硬核玻色子的量子关联，并详细研究其物理特性。



### 第三章 非对角 AAH 晶格中硬核玻色子的量子关联

在本章中，我们考虑一维非对角 AAH 模型中的硬核玻色系统，其中系统的跃迁由一个模拟无序的外加非公度跃迁相调制。理论上可以在无序强度的有限临界值处观察到无序诱导的从超流到玻色玻璃相的量子相变。利用第二章中介绍的基于玻色-费米映射和 Slater 行列式性质的精确数值方法，我们详细计算了体系在不同参数区域的动量分布和噪声关联，此外，对以上量子关联进行细致的标度分析，我们可以看到在此参数区域内，对于超流相、临界点和玻色玻璃相，显示出清晰而明显的标度行为。最后，我们通过监测随着非对角准周期无序的调制动量分布和噪声关联的行为，重新审视了非对角准周期性无序的量子相变。在临界点附近动量分布和噪声关联中心强度的一阶导数都显示了明显的极大值。这提供了一个强大的实验信号，可用来在实验上探测无序诱导的量子相变。

#### 3.1 模型和方法

在单带近似下，一维非对角非公度光晶格中的硬核玻色子由如下紧束缚哈密顿量<sup>[59]</sup>描述

$$H = \sum_{i=1}^L J_i (\hat{b}_{i+1}^\dagger \hat{b}_i + H.c.) + \sum_{i=1}^L \mu_i \hat{n}_i \quad (3.1)$$

其中

$$J_i = t + \lambda_{od} \cos(2\pi\alpha i + \phi) \quad (3.2)$$

$J_i$  的第二项是非公度跃迁调制， $\alpha$  是一个无理数，在本章中我们选择  $\alpha$  为  $(\sqrt{5}-1)/2$ 。这里  $t$  是相邻格点之间的主要跃迁能量，并且设置为能量单位 ( $t=1$ )。 $\lambda_{od}$  描述了非对角线余弦调制的强度。 $\hat{b}_i^\dagger$  ( $\hat{b}_i$ ) 是玻色子在格点  $i$  处的产生(湮灭)算符，满足玻色对易关系  $[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}$  和同一格点的硬核约束  $\hat{b}_i^{\dagger 2} = \hat{b}_i^2 = 0$ 。 $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$  表示格点  $i$  处的粒子数，且  $\mu_i$  为格点  $i$  处的化学势。 $L$  表示晶格尺寸， $N = \sum_i \hat{n}_i$  为总粒子数。在本章中，我们研究了具有固定非整数填充因子  $\nu = N/L = 0.2$  的不同大小的系统。最后，我们考虑了 HCBs 的周期性边界条件，并且在整个工作中将所有  $\mu_i$  都设置为零。

在硬核极限下，根据第二章中我们介绍的硬核玻色系统的求解方法，即遵循由两个步骤组成的玻色-费米映射过程，(3.1)式可映射到精确可解的无相互作用的费米子哈密顿量

$$H = \sum_{i=1}^L J_i \left( \hat{f}_{i+1}^\dagger \hat{f}_i + H.c. \right) + \sum_{i=1}^L \mu_i \hat{n}_i \quad (3.3)$$

其中  $\hat{f}_i^\dagger$  ( $\hat{f}_i$ ) 是格点  $i$  处无自旋费米子的产生(湮灭)算符。并且无自旋费米子哈密顿方程(3.3)的基态波函数  $|\Psi_F\rangle$  与第二章中的(2.17)式形式相同即

$$|\Psi_F\rangle = \prod_{j=1}^N \sum_{i=1}^L P_{ij} \hat{f}_i^\dagger |0\rangle \quad (3.4)$$

我们的工作致力于分析两个观测量，动量分布函数  $n_k$  和噪声关联  $\Delta_{kk'}$ ，它们的定义见第二章(2.19)和(2.20)式。动量分布和噪声关联中的两点关联  $\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle$  和四点关联  $\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \rangle$  同样可转化为计算两个半自旋格林函数  $G_{ij}$  和  $G_{ijkl}$ ，在这里我们

详细介绍了计算过程，首先计算  $\hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} |\Psi_F\rangle$ ，则有

$$\begin{aligned} & \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} |\Psi_F\rangle \\ &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \prod_{j=1}^N \sum_{i=1}^L P_{ij} \hat{f}_i^\dagger |0\rangle \\ &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \prod_{j=1}^N \left( P_{Lj} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{2j} \hat{f}_2^\dagger + P_{1j} \hat{f}_1^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \left( P_{L1} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{21} \hat{f}_2^\dagger + P_{11} \hat{f}_1^\dagger \right) \dots \left( P_{LN} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{2N} \hat{f}_2^\dagger + P_{1N} \hat{f}_1^\dagger \right) |0\rangle \quad (3.5) \\ &= \left[ \hat{f}_j^\dagger \left( P_{L1} \hat{f}_L^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} + \dots + P_{j1} \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - \dots - P_{21} \hat{f}_2^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - P_{11} \hat{f}_1^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \right) \right. \\ & \quad \left. \dots \left( P_{LN} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{2N} \hat{f}_2^\dagger + P_{1N} \hat{f}_1^\dagger \right) |0\rangle \right] \\ &= \left[ \hat{f}_j^\dagger \left( P_{L1} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{j1} \hat{f}_j^\dagger - \dots - P_{21} \hat{f}_2^\dagger - P_{11} \hat{f}_1^\dagger \right) \dots \right. \\ & \quad \left. \left( P_{LN} \hat{f}_L^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} + \dots + P_{jN} \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - \dots - P_{2N} \hat{f}_2^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - P_{1N} \hat{f}_1^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \right) |0\rangle \right] \\ &= \left[ \hat{f}_j^\dagger \left( P_{L1} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{j1} \hat{f}_j^\dagger - \dots - P_{21} \hat{f}_2^\dagger - P_{11} \hat{f}_1^\dagger \right) \dots \right. \\ & \quad \left. \left( P_{LN} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{jN} \hat{f}_j^\dagger - \dots - P_{2N} \hat{f}_2^\dagger - P_{1N} \hat{f}_1^\dagger \right) |0\rangle \right] \\ &= \left[ \left( P_{L,N+1} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{j,N+1} \hat{f}_j^\dagger - P_{j-1,N+1} \hat{f}_{j-1}^\dagger - \dots - P_{1,N+1} \hat{f}_1^\dagger \right) \right. \\ & \quad \left. \left( P_{LN} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{jN} \hat{f}_j^\dagger - \dots - P_{2N} \hat{f}_2^\dagger - P_{1N} \hat{f}_1^\dagger \right) \dots \left( P_{L1} \hat{f}_L^\dagger + \dots + P_{j1} \hat{f}_j^\dagger - \dots - P_{21} \hat{f}_2^\dagger - P_{11} \hat{f}_1^\dagger \right) |0\rangle \right] \\ &= \prod_{j=1}^{N+1} \sum_{i=1}^L P_{ij}^j \hat{f}_i^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

新的矩阵  $(P^j)_{L \times (N+1)}$  的第  $N+1$  列中， $P_{j,N+1} = 1$ ，其余的元素都为零。

同理可求得  $\langle \Psi_F | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_{\beta}^{\dagger} \hat{f}_{\beta}} \hat{f}_i$  的形式，如下式

$$\langle \Psi_F | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_{\beta}^{\dagger} \hat{f}_{\beta}} \hat{f}_i = \langle 0 | \prod_{j'=1}^{N+1} \sum_{i'=1}^L (P_{j'}^i)^* \hat{f}_{i'} \quad (3.6)$$

根据式 (3.5) 和 (3.6) 可计算出  $G_{ij}$  为

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \langle \hat{\sigma}_i^- \hat{\sigma}_j^+ \rangle = \langle \Psi_F | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_{\beta}^{\dagger} \hat{f}_{\beta}} \hat{f}_i \hat{f}_j \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_{\gamma}^{\dagger} \hat{f}_{\gamma}} | \Psi_F \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_{j'=1}^{N+1} \sum_{i'=1}^L (P_{j'}^i)^* \hat{f}_{i'} \prod_{j=1}^{N+1} \sum_{i=1}^L P_{ij}^j \hat{f}_i^{\dagger} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_{j=1}^{N+1} \left( \hat{f}_1 (P_{j1}^i)^* + \hat{f}_2 (P_{j2}^i)^* + \dots + \hat{f}_L (P_{jL}^i)^* \right) \prod_{j=1}^{N+1} \left( P_{Lj}^j \hat{f}_L^{\dagger} + \dots + P_{2j}^j \hat{f}_2^{\dagger} + P_{1j}^j \hat{f}_1^{\dagger} \right) | 0 \rangle \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{N+1} \\ i_1, \dots, i_{N+1}}}^L (P_{1, i_1}^i)^* \dots (P_{N+1, i_{N+1}}^i)^* (P_{i_1, j}^j) \dots (P_{i_{N+1}, N+1}^j) \times \langle 0 | \hat{f}_{i_1}^{\dagger} \dots \hat{f}_{i_{N+1}}^{\dagger} \hat{f}_{i_{N+1}} \dots \hat{f}_{i_1} | 0 \rangle \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{N+1} \\ i_1, \dots, i_{N+1}}}^L (P_{1, i_1}^i)^* \dots (P_{N+1, i_{N+1}}^i)^* (P_{i_1, j}^j) \dots (P_{i_{N+1}, N+1}^j) \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}} \delta_{i_{N+1}, i_{N+1}}' \delta_{i_N, i_N} \dots \delta_{i_1, i_1} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{N+1}}^L (P_{1, i_1}^i)^* \dots (P_{N+1, i_{N+1}}^i)^* (P_{i_1, j}^j) \dots (P_{i_{N+1}, N+1}^j) \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}} \\ &= \det \left[ (P^i)^{\dagger} P^j \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

上式的推导中用到了下列公式

$$\langle 0 | \hat{f}_{i_1}^{\dagger} \dots \hat{f}_{i_{N+1}}^{\dagger} \hat{f}_{i_{N+1}} \dots \hat{f}_{i_1} | 0 \rangle = \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}} \delta_{i_1, i_1}' \dots \delta_{i_{N+1}, i_{N+1}}' \quad (3.8)$$

式中当  $\varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}}$  是 Levi-Civita 符号<sup>[60]</sup>，还可以写为下标形式  $\varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}}$ ，且行列式的定义形式可以写为

$$\det D = \sum_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} a_{1\mu_1} a_{2\mu_2} \dots a_{m\mu_m} \quad (3.9)$$

式中  $\varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}}$  的值的计算可以写为

$$\varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}} = \begin{cases} 1, & \mu_1 \mu_2 \mu_3 \\ -1, & \mu_2 \mu_3 \mu_1 \\ 0, & \mu_1 = \mu_2 \text{ or } \mu_1 = \mu_3 \text{ or } \mu_2 = \mu_3 \end{cases} \quad (3.10)$$

利用同样的方法可得到四点关联函数为

$$\begin{aligned}
 G_{ijkl} &= \langle \hat{\sigma}_i^- \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_k^+ \hat{\sigma}_l^+ \rangle = \langle \Psi_F | \prod_{\alpha=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha} \hat{f}_i \prod_{\beta=1}^{j-1} e^{i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_j \\
 &\quad \times \hat{f}_k^\dagger \prod_{\gamma=1}^{k-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \hat{f}_l^\dagger \prod_{\delta=1}^{l-1} e^{-i\pi \hat{f}_\delta^\dagger \hat{f}_\delta} | \Psi_F \rangle \\
 &= \det \left[ \left( P^{ij} \right)^\dagger P^{kl} \right]
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

式中当  $r \leq u-1$  时  $P_{rs}^{uv} = -P_{rs}^v$ ，当  $r \geq u$  时  $P_{rs}^{uv} = P_{rs}^v$ ，其中  $s \leq N+1$ ，且  $P_{r,N+2}^{uv} = \delta_{ru}$ 。在上面的表达式中  $u(v) = i, j, k, l$ 。随着 HCBs 系统尺寸的增大，半自旋费米子格林函数的计算变得相当耗费时间。例如，每个涉及  $(P^{ij})^\dagger$  与  $P^{kl}$  的矩阵乘法和矩阵结果的行列式计算，其计算量分别正比于  $(N+2)^2 L$  和  $(N+2)^3$ 。

式(3.1)中的非对角 AAH 模型的显著特征是无理数  $\alpha$ ，介于周期性和完全随机性之间，并表现出从超流相到玻色玻璃相的量子相变。为了进一步了解基态量子相的性质，我们利用精确的数值方法，通过计算两个可观测量动量分布和噪声关联，来研究它们的关联性质。

## 3.2 量子关联

### 3.2.1 动量分布

首先，我们计算了所有局域单粒子关联  $\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle$  并研究了 HCBs 系统的两个基态量子相的动量分布  $n_k$ 。动量分布定义为单粒子关联傅里叶变换的对角部分。典型的动量分布图如图 3.1 所示。

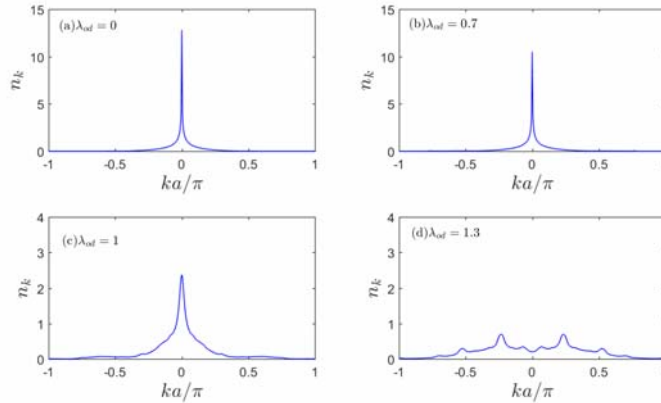


图 3.1  $L = 400$  且填充因子  $\nu = 0.2$  时，在四个不同的  $\lambda_{od}$  值下非对角非公度晶格中 HCBs 基态的典型动量分布图。(a)  $\lambda_{od} = 0$ ，(b)  $\lambda_{od} = 0.7$ ，(c)  $\lambda_{od} = 1$ ，(d)  $\lambda_{od} = 1.3$ 。

对于四个不同的  $\lambda_{od}$  值，计算格点数为  $L = 400$  和固定填充因子  $\nu = 0.2$  的动量分布， $\lambda_{od}$  的不同值分别表示没有无序的超流相、无序超流相、临界点和玻色玻璃相。正如预期的那样，图 3.1 (a) 和 (b) 中零动量点有清晰尖锐的峰，这反

映了 HCBs 系统在该参数区域中的强量子相干性，并表明该系统处于有扩展态的超流相。并且可看出随着非对角非公度调制强度  $\lambda_{od}$  的增大， $n_k$  的中心峰值受到了轻微的抑制。然而，对于图 3.1 (c) 中的临界点  $\lambda_{od} = 1$ ， $k = 0$  时的动量分布  $n_k$  的中心峰值受到明显抑制。而且分布范围大大变宽，高动量态占据明显。此时的动量分布曲线仍然相当平滑和规则。此外，当调制强度增加到超过临界点时，如图 3.1 (d) 所示的  $\lambda_{od} = 1.3$  时，动量分布曲线变得非常平坦，并出现了几个小的峰值。需要提到的是，在  $k = 0$  点时图出现了一个明显的谷而不是像先前一样的峰。

### 3.2.2 噪声关联

然后，我们同样利用精确数值方法计算所有四点局域关联  $\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \rangle$ ，以获得非对角非公度晶格中 HCBs 相应的噪声关联  $\Delta_{kk'}$ 。我们详细研究了不同晶格尺寸的系统。典型的噪声关联图如图 3.2 中所示，为了获得关键精细结构的最佳清晰度，这里我们以格点数为  $L = 50$  的系统为例。

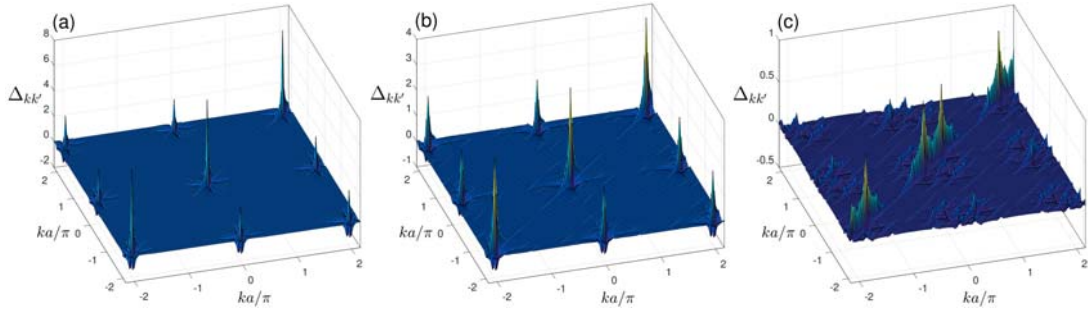


图 3.2 非对角非公度晶格中的 HCBs 在三种不同调制强度值下的噪声关联图。相应的晶格大小为  $L = 50$ ，填充因子固定为  $\nu = 0.2$ 。(a)  $\lambda_{od} = 0.1$ 。(b)  $\lambda_{od} = 1$ 。(c)  $\lambda_{od} = 1.3$ 。

在图 3.2 (a) 中，非对角调制强度  $\lambda_{od} = 0.1$ ，特征峰出现在倒晶格位置处，反映了主晶格的周期性。沿着  $k = k'$ ，噪声关联  $\Delta_{kk'}$  保持为正，这表明由于 HCBs 的玻色子量子统计产生了聚束效应，见图 3.3 (a)。并且如图 3.2 (b) 所示，沿着线  $k, 0$  和  $0, k'$  在  $\Delta_{00}$  附近发现有下降，反映了 HCBs 系统的量子耗散。在低于临界点  $\lambda_{od} = 1$  时，随着非对角调制强度的增加，除了峰值略微降低之外， $\Delta_{kk'}$  的特征结构在性质上保持一致。然而，在图 3.2 (b) 中的临界点  $\lambda_{od} = 1$  处， $\Delta_{00}$  处的峰值在很大程度上受到抑制，而且沿  $k = k'$  线，峰基处明显变宽，见图 3.3 (c)。在图 3.2 (c) 中， $\lambda_{od} = 1.3$ ，噪声关联中的峰被强烈抑制，并且在整个  $(k, k')$  平面中出现了许多小峰。图 3.2 (c) 与图 3.2 (a) 中的特征结构在性质上不同，这表明系统处于不同的量子相。如图 3.3 (e) 所示，沿着对角线，噪声关联  $\Delta_{kk}$  的

曲线与  $\lambda_{od} = 0.1$  时相比有显著差异。峰值出现在高动量点处，而相对下降发生在  $\Delta_{00}$ 。此外，如图 3.3 (f) 所示，沿线  $k, 0$  和  $0, k'$ ，除了原始峰外，还出现了几个小峰，这反映了非对角调制的结构。

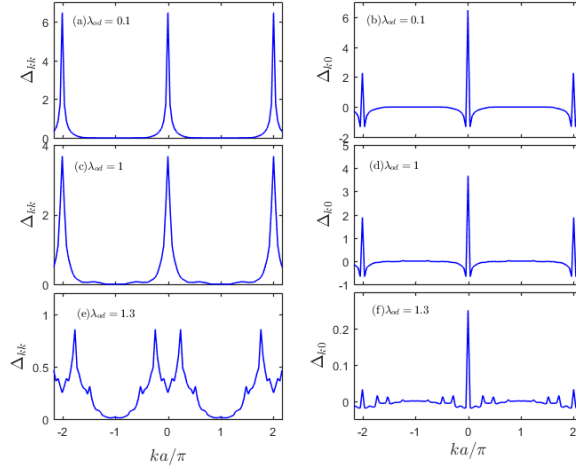


图 3.3 对于不同的  $k$  值， $k = k'$ （左列）和  $k' = 0$ （右列）的噪声关联  $\Delta_{kk'}$  和  $\Delta_{k0}$ 。上、中、下三行分别对应  $\lambda_{od} = 0.1$ ， $\lambda_{od} = 1$  和  $\lambda_{od} = 1.3$ 。

### 3.2.3 动量分布和噪声关联的标度

接着，我们研究了非对角非公度晶格中 HCBs 的量子关联的有限尺寸标度，主要是动量分布  $n_k$  和噪声相关  $\Delta_{kk'}$  的标度。对于不同的  $\lambda_{od}$  值， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  作为系统尺寸  $L$  的函数如图 3.4 所示。而且虚线是对相应离散数据的幂律拟合，其拟合函数的形式为  $aL^\alpha$ 。很明显，随着非对角调制强度的增加，出现了具有不同标度特性的三种不同的区域。对于区域  $\lambda_{od} < 1$ ， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  都随着晶格尺寸  $L$  的增加而增大。根据定义， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  实际上分别是所有两点和四点局域关联的总和。 $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  随  $L$  的增大意味着系统中的量子关联随系统尺寸的增加而增大。这就意味着在这个区域内系统具有准长程序。在临界点  $\lambda_{od} = 1$  时， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  也都随着晶格尺寸的增大而增大，但是速度要慢得多。对于第三种情况，随着系统尺寸的增大， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  基本上保持不变。这意味着该区域中系统缺乏准长程序。

在图 3.4 (a) 中，对于  $n_{k=0}$ ，其中  $\lambda_{od} = 0.1, 0.5, 0.8$  和  $0.9$  时，幂律拟合指数分别为  $\alpha \approx 0.5414, 0.5265, 0.5036$  和  $0.4895$ 。这与众所周知的超流体量子相中 HCBs 的  $n_{k=0} \sim \sqrt{L}$  标度行为相符。注意，这里填充因子固定为  $\nu = 0.2$ ，因此对于  $\lambda_{od} < 1$ ，HCBs 系统处于超流体相。在图 3.4 (b) 中，对于扩展区域  $\lambda_{od} < 1$  的  $\Delta_{00}$ ，其拟合指数分别约为  $1.085, 1.059, 1.005$  和  $0.9467$ 。这些结果与超流相的线性标度行为  $\Delta_{00} \sim L$  一致。另一方面，对于  $\lambda_{od} > 1$ ， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  都不与晶格尺寸成比例，

这是量子关联指数衰减的结果，表明系统处于玻色玻璃相。

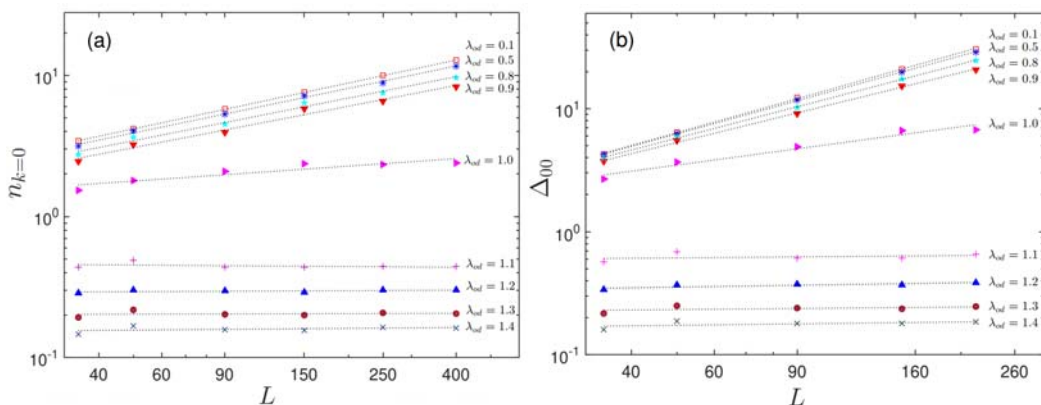


图 3.4 对于不同的  $\lambda_{od}$  值，具有固定填充因子  $\nu = 0.2$  的非对角非公度晶格中 HCBs 的动量分布和噪声关联的有限尺寸标度。(a)  $n_{k=0}$  vs.  $L$ . (b)  $\Delta_{00}$  vs.  $L$ . 黑色虚线是离散数据的幂律拟合。

显然，超流相、临界点和安德森绝缘相的指数是不同的。

### 3.3 量子相变

在这一部分中，我们将重新讨论由非对角无序引起的从超流体到玻色玻璃相的量子相变。临界点为  $\lambda_{od} = 1$ ，这也可以通过 3.2 小节中的非对角非公度晶格中 HCBs 的有限尺寸标度性质推断出来。为了更好地理解这种量子相变，我们进一步详细研究了在临界点  $\lambda_{od} = 1$  附近动量分布和噪声关联的行为。我们研究这些量子关联的中心强度及其导数随着非对角非公度强度调制的变化特点。

在图 3.5 (a) 中，对于  $L = 150, N = 30$  的系统，绘制了  $n_{k=0}$  作为非对角调制强度  $\lambda_{od}$  的函数图像。结果表明，随着非对角无序强度的增加， $n_{k=0}$  将缓慢下降，但是在临界点  $\lambda_{od} = 1$  附近，下降速度显著增大。从  $n_{k=0}$  的一阶导数可以更清楚地看出这一点，其在临界点  $\lambda_{od} = 1$  附近出现尖峰。这是无序诱导的量子相变的一个明显信号。

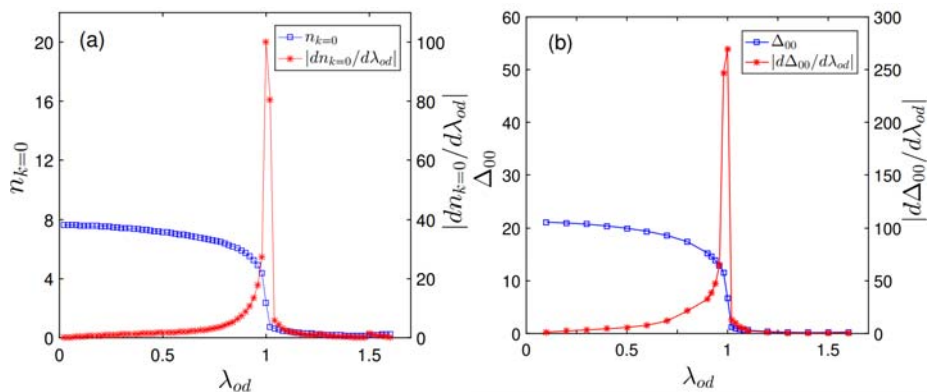


图 3.5  $L = 150, N = 30$  的系统中，(a) 动量分布 (b) 噪声关联及它们的导数作为非对角调制强度  $\lambda_{od}$  的函数图。在  $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  的一阶导数中，尖峰标志着量子相变的开始。

有趣的是，在噪声关联  $\Delta_{00}$  中也可以看到量子相变的清晰信号。在图 3.5 (b) 中，还描绘了  $L = 150, N = 30$  的系统中作为  $\lambda_{od}$  的函数  $\Delta_{00}$  的图像，与  $n_{k=0}$  类似，在  $\lambda_{od} = 1$  附近，显示出一个明显的结点。并且在临界点附近， $\Delta_{00}$  的一阶导数也有一个尖峰。

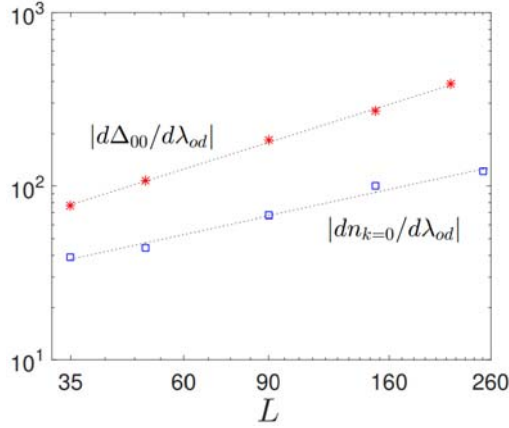


图 3.6 HCBs 系统中， $\Delta_{00}$  和  $n_{k=0}$  关于  $\lambda_{od}$  的一阶导数的最大值，其作为系统尺寸  $L$  的函数图像。显然，随着系统尺寸  $L$  的增加， $|d\Delta_{00}/d\lambda_{od}|$  和  $|dn_{k=0}/d\lambda_{od}|$  最大值的发散是可预测的。

对于具有不同晶格尺寸  $L$  的系统， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  的一阶导数的最大值都可以在临界点  $\lambda_{od} = 1$  附近找到。和  $n_{k=0}$   $\Delta_{00}$  的一阶导数峰值的有限大小标度如图 3.6 所示。我们可以清楚地看到， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  的一阶导数的最大值将随着系统大小的增加而发散，即一阶导的最大值随着系统尺寸的增大而增大。因此我们可以预测它们将提供非常明显的实验信号，有助于定位量子相变。

因此，如图 3.5 和图 3.6 所示， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  都可以通过它们关于准周期无序强度的一阶导数来表征无序诱导的量子相变。由于动量分布  $n_k$  和噪声关联  $\Delta_{kk'}$  都是借助飞行时间成像技术<sup>[61]</sup>得到的实验可观测量，因此图 3.5 和图 3.6 中所示的结果表明无序引起的量子相变可以通过实验检测。HCBs 系统可以在超冷原子实验中制备，例如，使用超冷  $^{87}\text{Rb}$  原子。并且如图 3.6 所示，尖峰的高度随着晶格尺寸的增大而发散。因此，这些理论预测的峰值应该在噪声背景中存在，并且在未来的超冷原子实验中可见。

### 3.4 小结

综上所述，本章我们研究了非对角非公度光晶格中 HCBs 的量子相关特性。利用精确的数值方法，计算了多体 HCBs 系统中的所有两点 and 四点局域量子关联函数。基于这些局域关联函数，然后获得包括动量分布和噪声关联的实验可观测量的非局域量子关联。有趣的是，虽然超流体相中 HCBs 系统出现了预期的量子关联性质，但在玻色玻璃相中的 HCBs 系统的动量分布和噪声关联的中心都出



现了相对下降而不是峰。

对不同晶格尺寸  $L$  和不同非对角调制强度  $\lambda_{od}$  的各种 HCBS 系统做了类似的计算，以证明 HCBS 在不同基态量子相中的标度特性。对于两个不同的量子相，有限尺寸标度行为显示出明显的差异。对于超流相，量子关联的中心强度随着系统尺寸的增大而增大。而对于玻色玻璃相，量子关联的中心强度随着  $L$  的变化基本上保持不变。

最后，我们重新讨论了由非对角无序引起的超流体相到玻色玻璃相的量子相变。随着准周期无序强度  $\lambda_{od}$  的调制，我们重点研究了动量分布和噪声关联的中心强度的行为。对于动量分布和噪声关联，在临界点  $\lambda_{od} = 1$  附近显示出明显的节点。此外， $n_{k=0}$  和  $\Delta_{00}$  的一阶导数在临界点附近出现清晰的峰，表明无序诱导的相变发生。因此，这提供了一种检测量子相变的实验方法。



## 第四章 总结与展望

### 4.1 总结

基于我们的工作,本文首先介绍了一些背景和基本理论,简单介绍了光晶格、硬核玻色气体、AAH 模型及量子相变等。接着,主要介绍了在一维光晶格中硬核玻色气体的求解方法,并利用此方法重复计算了晶格模型中的动量分布和噪声关联,研究硬核玻色气体的量子关联及量子相变。

在有了基本理论和基本方法的基础上,进而展开我们的工作。在第三章我们重点研究了非对角非公度 AAH 晶格中硬核玻色气体的量子关联,采用前面所介绍的精确的数值方法,主要计算了两个可观测量动量分布和噪声关联,我们发现随着无序强度的增大,动量分布的峰值会降低,而当无序强度  $\lambda_{od}=1$  时,峰值受到明显的抑制,当无序强度  $\lambda_{od}>1$  时, HCBs 系统的动量分布和噪声关联的中心都出现了相对下降而不是峰,这表明系统处于不同的量子相。接着对 HCBs 系统的动量分布和噪声关联做了相对于晶格尺寸  $L$  的标度,我们发现随着无序强度的增大,动量分布和噪声关联都有三种不同的标度行为。对于两个不同的量子相,有限尺寸标度行为显示出明显的差异。对于超流相,量子关联的中心强度随着系统尺寸的增大而增大。而对于玻色玻璃相,量子关联的中心强度随着  $L$  的变化基本上保持不变。对于临界值,动量分布和噪声关联也都随着晶格尺寸的增大而增大,但是速度要慢得多。此外,我们又计算了动量分布和噪声关联的中心强度及其导数随着非对角非公度强度的变化,我们发现随着非对角无序强度的增加,动量分布和噪声关联都将缓慢下降,并且在临界点  $\lambda_{od}=1$  附近,下降速度显著增大。它们的一阶导在临界点  $\lambda_{od}=1$  附近出现尖峰。这是无序诱导的量子相变的一个明显信号,这为实验检测量子相变提供了一种新的方法。

### 4.2 展望

在本文中我们研究的是硬核玻色子在非对角非公度晶格中的量子关联,考虑其他粒子如费米子会有什么样的现象呢?动量分布和噪声关联会有不同的行为吗?

而且在本论文中我们只研究了系统的基态量子相变,如果考虑含时关联函数,可以研究系统随时间演化的动力学性质。



## 参考文献

- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, 81,865.
- [2] O.Gühne and G. Toth. Entanglement detection. *Phys. Rep.*,2009, 474,1.
- [3] A. Bera,T. Das, D. Sadhukhan, S. Singha Roy, A. Sen(De), and U. Sen. Quantum discord and its allies: a review of recent progress. *Rep. Prog. Phys.*,2018,81,02400.
- [4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang.*Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2010, 50-58.
- [5] C. H. Bennett, and S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*,1992, 69, 2881 - 2884.
- [6] A. K.Ekert. Quantum cryptography based on Bell’ s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 1991,67, 661 - 663.
- [7] A. Datta, A. Shaji and C. M. Caves. Quantum discord and the power of one qubit. *Phys. Rev. Lett.*,2008, 100, 050502.
- [8] S. Pirandola. Quantum discord as a resource for quantum cryptography. *Sci. Rep.*,2014, 4, 1-5.
- [9] K. Modi, A. Brodutch ,H. Cable,T. Paterek and V. Vedral. The classical-quantum boundary for correlations:Discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.*, 2012, 84,1655.
- [10] X. Liu, H.X. Lu and J. Q. Zhao. Evolution of quantum correlation undergoing decoherence using the information entropy inequality. *Laser Phys. Lett.*, 2018, 15, 125207.
- [11] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch.Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds. *Nature (London)*, 2005, 443, 481-484.
- [12] S. S. Hodgman et al. Metastable helium: a new determination of the longest atomic excited-state lifetime. *Phys. Rev. Lett.*, 2009,103,053002.
- [13] K. G. H. Baldwin. Metastable helium: Atom optics with nano-grenades. *Contemp. Phys.*, 2005, 46, 105.
- [14] A. G. Manning, S. S. Hodgman, R. G. Dall, M. T. Johnsson, A. G. Truscott. The

- Hanbury Brown-Twiss effect in a pulsed atom laser. *Opt. Express*, 2010, 18, 18712.
- [15] S. S. Hodgman, R. G. Dall, A. G. Manning, K. G. H. Baldwin, A. G. Truscott. Direct Measurement of Long-Range Third-Order Coherence in Bose-Einstein Condensates. *Science*, 2011, 331,1046.
- [16] M. Schreiber et al. Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasi-random optical lattice. *Science*, 2015, 349, 842.
- [17] J. Sebby-Strabley, M. Anderlini, P. S. Jessen, J. V. Porto. Lattice of double wells for manipulating pairs of cold atoms. *Phys. Rev. A*, 2006, 73,033605.
- [18] S. Fölling, S. Trotzky, P. Cheinet, M. Feld, R. Saers, A. Widera, T. Müller, I. Bloch. Direct observation of second-order atom tunnelling. *Nature*, 2007,448, 1029 – 1032.
- [19] U. Schneider et al. Metallic and insulating phases of repulsively interacting fermions in a 3D optical lattice. *Science*, 2008, 322, 1520 – 1525.
- [20] M. Girardeau. Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension. *Math.Phys*, 2004, 1, 516.
- [21] B. Paredes, A. Widera, and V. Murg. Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice, *Nature*, 2004, 429, 277.
- [22] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss. Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas. *Science*, 2004, 305, 1125.
- [23] K. Lelas, N. Drpić and T. Dubček. Laser assisted tunneling in a Tonks – Girardeau gas. *New J. Phys*, 2016, 18, 095002.
- [24] L. A. Peña Ardila, M. Heyl and A. Eckardt. Measuring the Single-Particle Density Matrix for Fermions and Hard-Core Bosons in an Optical Lattice. *Phys. Rev. Lett*, 2018, 121,260401.
- [25] S. Aubry and G. André. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. *Ann. Isr. Phys. Soc*, 1980, 3, 133.
- [26] P. G. Harper. Single Band Motion of Conduction Electrons in a Uniform Magnetic Field. *Proc. Phys. Soc. London Sect. A*, 1955, 68,874.
- [27] L. Dal Negro, C. J. Oton, Z. Gaburro, L. Pavesi, P. Johnson, A. Legendijk, R. Righini, M. Colocci, and D. S. Wiersma. Light Transport through the Band-Edge States of Fibonacci Quasicrystals. *Phys. Rev. Lett*, 2003, 90,055501.

- 
- [28] Y. Lahini, R. Pugatch, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, N. Davidson, and Y. Silberberg. Observation of a Localization Transition in Quasiperiodic Photonic Lattices. *Phys. Rev. Lett*, 2009, 103, 013901.
- [29] Y. E. Kraus, Y. Lahini, Z. Ringel, M. Verbin, and O. Zilberberg. Topological States and Adiabatic Pumping in Quasicrystals. *Phys. Rev. Lett*, 2012, 109, 106402.
- [30] G. Roati, C. D’Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio. Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. *Nature*, 2008, 453, 895.
- [31] S. Ganeshan, K. Sun and S. D. Sarma. Topological Zero-Energy Modes in Gapless Commensurate Aubry-André-Harper Models. *Phys. Rev. Lett*, 2013, 110, 180403.
- [32] F. Liu, S. Ghosh, and Y. D. Chong. Critical exponents and intrinsic broadening of the field-induced transition in  $\text{NiCl}_2 \cdot 4\text{SC}(\text{NH}_2)_2$ . *Phys. Rev. B*, 2015, 91, 014108.
- [33] Y. Ke, X. Qin, F. Mei, H. Zhong, Y. S. Kivshar, and C. Lee. Topological phase transitions and Thouless pumping of light in photonic waveguide arrays. *Laser & Photonics Reviews*, 2016, 10, 6, 995-1001.
- [34] Y. Lahini, R. Pugatch, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, N. Davidson, and Y. Silberberg. Observation of a Localization Transition in Quasiperiodic Photonic Lattices. *Phys. Rev. Lett*, 2009, 103, 013901.
- [35] D. R. Hofstadter. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 1976, 14, 2239.
- [36] X. L. Zhao, Z. C. Shi, C. S. Yu, and X. X. Yi. Effect of loss on the topological features of dimer chains described by the extended Aubry-André-Harper model. *Phys. Rev. A*, 2017, 95, 043837.
- [37] J. Wang, X. J. Liu, G. Xianlong and H. Hu. Phase diagram of a non-Abelian Aubry-André-Harper model with p-wave superfluidity. *Phys. Rev. B*, 2016, 93, 104504.
- [38] A. Purkayastha, S. Sanyal, A. Dhar, and M. Kulkarni. Anomalous transport in the Aubry-André-Harper model in isolated and open systems. *Phys. Rev. B*, 2018, 97, 174206.
- [39] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*.

- Addison Wesley, New York, 1992.
- [40] S. Sachdev. Quantum Phase Transitions. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, 3-6.
- [41] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett*, 1998, 81, 3108.
- [42] M. Greiner et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature*, 2002, 415, 39 -43.
- [43] B. Damski et al. Atomic Bose and Anderson Glasses in Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett*, 2003, 91, 080403.
- [44] R. Roth and K. Burnett. Phase diagram of bosonic atoms in two-color superlattices. *Phys. Rev. A*, 2003, 68, 023604.
- [45] M.P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Phys. Rev. B*, 1989, 40, 546.
- [46] T. Giamarchi and H. J. Schulz. Anderson localization and interactions in one-dimensional metals. *Phys. Rev. B*, 1988, 37, 325.
- [47] H. Moritz et al. Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas. *Phys. Rev. Lett*, 2003, 91, 250402.
- [48] L. Fallani et al. Ultracold Atoms in a Disordered Crystal of Light: Towards a Bose Glass. *Phys. Rev. Lett*, 2007, 98, 130404.
- [49] Y. P. Chen et al. Phase coherence and superfluid-insulator transition in a disordered Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 2008, 77, 033632.
- [50] M. White et al. Strongly Interacting Bosons in a Disordered Optical Lattice. *Phys. Rev. Lett*, 2009, 102, 055301.
- [51] P. Jordan and E. Wigner. Über das Paulische Äquivalenzverbot. *Zeitschrift Für Physik*, 1928, 47(9-10), 631-651.
- [52] T. Holstein and H. Primakoff. Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet, *Phys. Rev*, 1940, 58, 1098.
- [53] K. He and M. Rigol. Scaling of noise correlations in one dimensional lattice hard core boson systems. *Phys. Rev. A*, 2011, 83, 023611.
- [54] A. M. Rey, I. I. Satija, and C. W. Clark. Noise correlations of hard-core bosons: quantum coherence and symmetry breaking. *Phys. Rev. B*, 2006, 73, S177.



- 
- [55] M. Rigol and A. Muramatsu. Universal properties of hard-core bosons confined on one-dimensional lattices. *Phys. Rev. A*, 2004, 70,031603(R).
- [56] M. Rigol and A. Muramatsu. Ground-state properties of hard-core bosons confined on one-dimensional optical lattices. *Phys. Rev. A*, 2005, 72, 013604.
- [57] K. He, I. I. Satija, C.W. Clark, A. M. Rey, and M. Rigol. Noise correlation scalings: Revisiting the quantum phase transition in incommensurate lattices with hard-core bosons. *Phys. Rev. A*, 2012, 85,013617.
- [58] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, One dimensional bosons: From condensed matter systems to ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.*, 2011, 83, 1405.
- [59] J. C. C. Cestari, A. Foerster, and M. A. Gusmao. Fate of topological states in incommensurate generalized Aubry-Andre models. *Phys. Rev. B*, 2016, 93, 205441.
- [60] 马中骥, 物理学中的群论, 科学出版社, 2006.
- [61] S. S. Hodgman, R. I. Khakimov, R. J. Lewis-Swan, A. G. Truscott, and K. V. Kheruntsyan. Solving the Quantum Many-Body Problem via Correlations Measured with a Momentum Microscope. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 118, 240402.



## 攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目

1. 张奋华, 王利, 张云波, 简谐势中非对角AAH晶格上费米气体的基态性质, 山西大学学报(自然科学版).
2. Li Wang, Fenhua Zhang, and Yunbo Zhang. Quantum correlations of hard-core bosons in off-diagonal incommensurate lattices. (已投稿)



## 致 谢

转眼间，三年的研究生求学生涯即将画上句号。在毕业前夕，回首往事，三年的点点滴滴已成为丝丝的回忆。在这学习期间，有很多美好的瞬间，也有太多的人和事值得我去感激和思念。值此论文完成之际，我谨向所有关心、爱护和帮助过我的人表示最诚挚的感谢和最美好的祝愿。

首先最应该向我的导师王利老师表示衷心的感谢。王老师渊博的学识、严谨的态度和对学科前沿敏锐的洞察力将使我受益终身。论文阶段，无论从课题的选择，还是到研究的每个环节，甚至到论文的修改无不倾注着王老师大量的心血和智慧。三年来，每次我感觉问题很难解决，自己都想放弃的时候，王老师总会耐心地指导我，一点一点去推导，每次经过王老师的耐心讲解，问题就会变得很容易了。王老师也总会及时督促我学习，虽然我一直做得都不够好，有时候自己都很内疚，没能达到老师的要求，但他总是给予鼓励和帮助。在生活上，王老师也非常关心我们，每次假期留宿，王老师总会叮嘱我们注意安全，是一个很负责的老师，很幸运能遇到这样的老师。

同时，我还要感谢张云波老师，张老师是一个对待工作非常认真、严谨的人。在学术问题的讨论中一丝不苟，从最基础的问题出发，学习物理的本质。每次讨论中他总会给我们提出很多的建议，让我们能够做的更完美。对于张老师，我心里也充满了感激与感谢，感谢他这三年来对我们的指导，三年来，张老师对科研工作、对学生倾注太多的心血，会关心我们小组中每一个学生的学习，会帮助每一个学生修改论文。衷心感谢张老师对我的谆谆教诲和辛勤培养。

其次还要感谢我们CAT小组里面帮助过我的老师：徐志浩老师，尹相国老师，陈立老师和郭利平老师。感谢CAT小组里面的所有的师兄师姐师弟师妹们，他们总会耐心地帮我解决问题。特别感谢我的两位师姐刘娜和田康康，她们帮助过我很多。感谢我的两个小伙伴薛娅婷和皇甫宏丽，感谢她们三年的陪伴。感谢2016级所有的同学和参加阅读和答辩的各位评审专家和教授。

另外感谢一直以来关心我与支持我的舍友们。感谢白宇星和李洁，感谢她们对我的关心和帮助。同窗之情，终身难忘！

最后感谢我最挚爱的家人，谢谢他们始终如一的关怀、理解和无尽的爱。

张奋华

2019年3月于山西大学理论物理研究所



## 个人情况及联系方式

姓名：张奋华

性别：女

籍贯：山西省吕梁市

学习经历：2016年9月至2019年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

2012年9月至2016年6月在太原师范学院物理系攻读学士学位

联系方式：18335182519

电子邮箱：1528005140@qq.com.





## 承 诺 书

本人郑重声明：所提交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日



## 学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日

