

山西大学

2016 届博士学位论文

# 偶极旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的 耦合自旋涡旋对

作者姓名	李甜甜
指导教师	张云波
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2011 年 9 月至 2016 年 6 月

二〇一六年六月

**Thesis for Doctor's Degree, Shanxi University, 2016**

Coupled Spin-Vortex Pair in Dipolar Spinor  
Bose-Einstein Condensates

Student Name	Tiantian Li
Supervisor	Prof. Zhang Yunbo
Major	Condensed Matter Physics
Specialty	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2011.09-2016.06

June, 2016

## 目 录

<b>中文摘要</b> .....	<b>IX</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>X</b>
<b>第一章 绪论</b> .....	<b>1</b>
1.1 旋量玻色爱因斯坦凝聚体简介.....	1
1.1.1 单粒子哈密顿量.....	1
1.1.2 自旋交换相互作用.....	3
1.1.3 平均场 GP 方程.....	5
1.1.4 均匀磁场中的基态.....	7
1.1.5 偶极相互作用.....	10
1.2 磁涡旋态简介.....	13
1.2.1 磁畴.....	13
1.2.2 磁涡旋结构.....	13
1.2.3 耦合涡旋动力学.....	16
1.3 碰撞动力学简介.....	18
1.3.1 量子牛顿摆.....	18
1.3.2 物质波孤子碰撞.....	19
1.3.3 半量子涡旋碰撞.....	20
1.4 我们的工作.....	22
1.5 本文内容.....	22
<b>第二章 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体</b> .....	<b>23</b>
2.1 单模近似下的偶极相互作用.....	23
2.2 自旋纹理.....	25
2.2.1 平均场理论.....	25
2.2.2 无磁场平均场相图.....	26
2.3 外磁场中的自旋涡旋态.....	32
2.3.1 外加纵向磁场.....	32
2.3.2 外加横向磁场.....	35

2.4 Einstein-de Haas 效应 .....	35
2.5 数值方法简介 .....	37
2.5.1 虚时演化 .....	38
2.5.2 时间劈裂傅里叶谱方法 .....	38
2.6 本章小结 .....	40
<b>第三章 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体中的耦合涡旋对 .....</b>	<b>41</b>
3.1 引言 .....	41
3.2 双势阱 .....	41
3.3 模型 .....	42
3.4 数值参数 .....	43
3.5 无磁场下的基态 .....	43
3.6 横向磁场下的基态 .....	47
3.7 本章小结 .....	50
<b>第四章 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体中的耦合涡旋对的动力学 .....</b>	<b>51</b>
4.1 引言 .....	51
4.2 模型与数值参数 .....	51
4.3 涡旋碰撞动力学 .....	52
4.4 横向磁场的淬火动力学 .....	54
4.4.1 单层凝聚体中的涡旋动力学 .....	54
4.4.2 PSVP 和 ASVP 中自旋涡旋对的动力学 .....	56
4.4.3 PSVP 和 ASVP 中单涡旋态的动力学 .....	60
4.4.4 PSVP 和 ASVP 中极化态的动力学 .....	60
4.5 本章小结 .....	61
<b>第五章 总结与展望 .....</b>	<b>63</b>
<b>参 考 文 献 .....</b>	<b>65</b>
<b>攻读学位期间取得的研究成果 .....</b>	<b>79</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>81</b>
<b>个人简况及联系方式 .....</b>	<b>83</b>
<b>承 诺 书 .....</b>	<b>85</b>



学位论文使用授权声明 ..... 87



## CONTENTS

Chenese Abstract .....	IX
Abstract .....	X
Chaper 1 Intruduction .....	1
1.1 Intruduction of spinor BEC .....	1
1.1.1 The Hamiltonian of single-particle .....	1
1.1.2 The exchange interaction .....	3
1.1.3 Meam-field GP equations.....	5
1.1.4 The ground state in a uniform magnetic field.....	7
1.1.5 The dipolar interaction .....	10
1.2 Intruduction of the magnetic vortex.....	13
1.2.1 Magnetic domain.....	13
1.2.2 Magnetic vortex .....	13
1.2.3 The interaction of the coupled vortices.....	16
1.3 Intruduction of collision dynamics .....	18
1.3.1 Quantum newton's cradle.....	18
1.3.2 Collision of matter-wave solitons .....	19
1.3.3 Collision of half-quantum vortices .....	20
1.4 Our work .....	22
1.5 Contents.....	22
<b>Chapter 2 Dipolar spinor BEC .....</b>	<b>23</b>
2.1 Dipolar interaction in single mode approximation .....	23
2.2 The spin texture.....	25
2.2.1 Mean-Field theory.....	25
2.2.2 Phase diagram in absence magnetic field .....	26
2.3 Spin vortex in external magnetic field.....	32
2.3.1 Longitudinal magnetic field.....	32
2.3.2 Transverse magnetic field .....	35

2.4 Einstein-de Haas effect.....	35
2.5 Numerical method.....	37
2.5.1 The imaginary time evolution.....	38
2.5.2 The time-splitting fourier pseudo-spectrum.....	38
2.6 Summary .....	40
<b>Chapter 3 Coupled spin-vortex pair in dipolar spinor BEC.....</b>	<b>41</b>
3.1 Intruduction .....	41
3.2 The double well.....	41
3.3 The model.....	42
3.4 The numeric parameters.....	43
3.5 The ground state in the absence of magnetic field.....	43
3.6 The ground state in the transverse magnetic field .....	47
3.7 Summary .....	50
<b>Chapter 4 Dynamics of coupled spin vortex in dipolar BEC.....</b>	<b>51</b>
4.1 Introduction .....	51
4.2 The model and numerical parameters .....	51
4.3 The collision dynamics of spin vortex .....	52
4.4 The quenching dynamics of transverse magnetic field .....	54
4.4.1 The dynamics of spin vortex in the single layer .....	54
4.4.2 The dynamics of spin vortex pair in PSVP and ASVP .....	56
4.4.3 The dynamics of single vortex in PSVP and ASVP.....	60
4.4.4 The dynamics of polarized state in PSVP and ASVP .....	60
4.5 Summary .....	61
<b>Chapter 5 Conclusion and new perspective.....</b>	<b>63</b>
<b>Bibliography .....</b>	<b>65</b>
<b>Research achievements .....</b>	<b>79</b>
<b>Acknowledgment.....</b>	<b>81</b>
<b>Personal profiles .....</b>	<b>83</b>
<b>Letter of commitment .....</b>	<b>85</b>

**Authorization statement .....87**



## 中文摘要

磁涡旋态由于其简单的拓扑结构以及丰富的动力学性质，在未来信息存储和通讯领域具有非常大的潜力。由于偶极相互作用强烈依赖外势的几何形状，能够将自旋自由度和轨道自由度耦合起来，其作用等效于一个有效磁场，使得原子自发地形成自旋涡旋态，类似于纳米磁性材料中的磁涡旋态。我们通过数值求解平均场近似下自旋 1 偶极旋量 BEC 的 GP 方程，研究系统在双势阱中的基态和磁性响应性质，得到两种不同的基态自旋涡旋对结构，并且通过实时演化研究其碰撞动力学和磁场淬火动力学，为实验提供依据。

首先，我们研究自旋 1 偶极旋量 BEC 束缚在对称双势阱中的基态和磁性响应性质。我们主要研究自旋涡旋态，所以假设势阱在  $z$  方向被高度压缩。研究发现，由于双势阱的出现，产生了两种不同的自旋涡旋结构，即平行耦合涡旋对和反平行耦合涡旋对。我们还研究了耦合自旋涡旋对在横向静磁场下的磁响应，发现上下两层涡旋中心随磁场强度的增加而依次消失。

其次，我们数值模拟了平均场理论下自旋 1 偶极旋量 BEC 系统中耦合自旋涡旋对的碰撞动力学和磁场淬火动力学。当系统制备到双势阱的基态后，突然撤掉双势阱，上下两层的涡旋开始碰撞，而且每次碰撞后两个涡旋的手征发生交换，其密度特征表明耦合平行涡旋对的碰撞是同相碰撞而耦合反平行涡旋对的碰撞是反相碰撞。当突然撤掉磁场后，单层凝聚体的涡旋中心开始做螺旋运动，它在  $x$ - $y$  平面上的轨迹为椭圆，在  $y$  方向的投影为以固有频率和阻尼率衰减的阻尼振荡。自旋涡旋对的振荡模式可以通过初始磁场的强度以及高斯势垒的高度来调节，如平行涡旋对中两层涡旋的螺旋运动不同步，而反平行涡旋对中涡旋的运动轨迹为双螺旋结构，两层涡旋中心朝着相反的方向运动，但是振荡幅度相同。

**关键词：** 偶极旋量玻色-爱因斯坦凝聚体； 双势阱； 平行（反平行）自旋涡旋对；  
淬火动力学

## ABSTRACT

As the simple topological nature and rich dynamic properties, magnetic vortices state become a potential applications in information storage and communications in the future. Because the dipolar interaction depending strongly on the geometric shape of the external potential trap can couple the spin and orbital degrees of freedom, it is equivalent to an effective magnetic field making the atoms form a spin vortex state spontaneously which is very analogous to the magnetic vortex state found in magnetic thin films.

Firstly, we investigate the ground-state and magnetic properties of a dipolar spin-1 Bose-Einstein condensate trapped in a symmetric double-well potential. In particular, we focus on the spin-vortex states by assuming that each potential well is highly pancake shaped. We show that the presence of the double-well potential gives rise to two different spin configurations for the spin-vortex pair states. We also study the response of the coupled spin-vortex pair to static transverse magnetic fields.

Secondly, the coalitional and magnetic field quench dynamics of a coupled spin-vortex pair in dipolar spinor Bose-Einstein condensates in a double well potential are numerically investigated in the mean field theory. Upon a sudden release of the potential barrier the two layers of condensates collide with each other in the trap center with the chirality of the vortex pair exchanged after each collision, showing the typical signature of in-phase collision for the parallel spin vortex phase, and out-of-phase collision for the antiparallel phase. When quenching the transverse magnetic field, the vortex center in the single-layered condensate starts to make a helical motion with oval-shaped trajectories and the displacement of the center position is found to exhibit a damped simple harmonic oscillation with an intrinsic frequency and damping rate. The oscillation mode of the spin vortex pair may be tuned by the initial magnetic field and the height of the Gaussian barrier, e.g. the gyrotropic motions for parallel spin vortex pair are out of sync with each other in the two layers, while those for the antiparallel pair exhibit a double-helix-structure with the vortex centers moving opposite to each other with the same amplitude.

**Key words:** Dipolar spinor BEC; Double well; Parallel (antiparallel) spin vortex pair; Quenching dynamics.



# 第一章 绪论

## 1.1 旋量玻色爱因斯坦凝聚体简介

当理想的玻色气体的温度降到临界温度时，宏观数量的粒子就会占据系统的基态，这样就形成了玻色爱因斯坦凝聚体，简称 BEC[1-3]。超冷原子、分子体系，由于具有独特的量子波动性、宏观量子相干性以及人工可调控性，已经成为当前量子调控的一个重要国际前沿方向。它既与光晶格以及原子关联效应带来的凝聚态物理现象有关，还可以与量子涨落、拓扑量子态、量子磁性、量子涡旋以及超冷异核分子的新奇量子相等联系起来。毫无疑问，它为量子调控提供了一个理想的研究平台，打开了认识新事物的全新视野。

自从实验上利用光学囚禁的方法捕获了碱金属的玻色-爱因斯坦凝聚体[4]，旋量凝聚体成为当今冷原子物理研究最活跃的领域之一。所谓旋量玻色爱因斯坦凝聚体，是指凝聚体原子被磁势阱“冻结”的自旋自由度在光势阱系统中被释放出来，是相对于由磁阱束缚的标量凝聚体而言的。原子之间的碰撞相互作用可以产生一个有效的自旋交换相互作用，相当于磁性理论里中的交换能。旋量凝聚体最早的理论工作是 1998 年由 Ho, Ohmi 和 Machida 等人建立的[5]，他们采用平均场近似的方法研究了超精细自旋  $F=1$  的旋量凝聚体的基态，后来在实验上可以观察到自旋磁畴的形成，自旋混合动力学以及系统在塞曼场下的自旋布居数振荡行为，从而打开了旋量凝聚体研究的大门[11-15]。

国际上从事冷原子研究的小组很多，其中关注旋量凝聚体的主要包括 Berkeley 的 Stamper-Kurn 小组，康奈尔大学的 Vengalattore 小组，东京大学的 Ueda 小组，汉堡大学的 Sengstock 小组，NIST 的 Lett 小组，佐治亚理工大学的 Chapman 小组，德国的 Pfau 小组等。国内也有若干实验小组实现了超冷原子的 BEC 而进入这一研究领域的国际前沿。近几年来由光诱导的原子间自旋轨道耦合也成为旋量 BEC 方面的理论和实验关注热点[16-18]，在一维情况下的有效自旋链模型的理论 and 实验研究也成为近期研究的热门课题[19-22]。

### 1.1.1 单粒子哈密顿量

对于由  $N$  个超精细自旋  $F=1$  原子形成的玻色爱因斯坦凝聚体，将它囚禁在一个轴对称的谐振子势阱中，

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M (\omega_{\perp}^2 x^2 + \omega_{\perp}^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (1.1.1)$$

其中  $\omega_{\perp}$  和  $\omega_z$  分别为水平方向和垂直方向的谐振子频率,  $\lambda = \omega_z / \omega_{\perp}$  称作压缩比,  $M$  是原子的质量, 我们选择对称轴  $\mathbf{z}$  为量子化轴, 在均匀磁场  $\mathbf{B}$  下, 单粒子系统的二次量子化哈密顿量可以写成

$$H_s = \int d\mathbf{n} \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) h_0 \delta_{\alpha\beta} \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}) + H_z. \quad (1.1.2)$$

这里  $\hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r})$  是自旋分量  $\alpha = 1, 0, -1$  的场算符,  $h_0 = -\hbar^2 \nabla^2 / (2M) + U(\mathbf{r})$ ,  $H_z$  是系统的塞曼能, 可以表示为

$$H_z = \int d\mathbf{n} \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) [-g_F \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_{\alpha\beta}] \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}), \quad (1.1.3)$$

其中  $g_F$  Landé  $g$  因子,  $\mu_B = e\hbar / 2m_e$  是玻尔磁子 ( $m_e$  是电子质量),  $\mathbf{F}$  是自旋  $F=1$  的自旋角动量矩阵, 其分量分别为:

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.4)$$

如果磁场沿着量子化轴的方向,  $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$ , 则它诱导的每个原子的塞曼能移表示为

$$E_z(B_z) = \begin{pmatrix} E_+ & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_- \end{pmatrix}. \quad (1.1.5)$$

事实上, 超精细自旋态的塞曼能移并不是严格线性的, 还应该考虑二阶塞曼效应。对碱金属而言

$$H_z = \int d\mathbf{n} \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) [-pF_z + qF_z^2] \hat{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}), \quad (1.1.6)$$

其中  $p = g_F \mu_B B_z$  和  $q = (g_F \mu_B B_z)^2 / E_{HFS}$  分别表示线性塞曼能和二阶塞曼能,  $E_{HFS}$  为超精细能级劈裂。虽然二阶塞曼效应破坏了旋转对称性, 但是它依然保持  $SO(2)$  对称性, 对研究旋量 BEC 的基态相图和自旋混合动力学具有重要意义。图 1.1 描写了  $^{87}\text{Rb}$  原子的  $p$  和  $q$  跟磁场的关系, 可见磁场比较大的时候二阶塞曼能与一阶塞曼能是可以比较的, 不能忽略, 而等磁场很小时, 两者差的比较大, 二阶塞曼能可以不考虑。

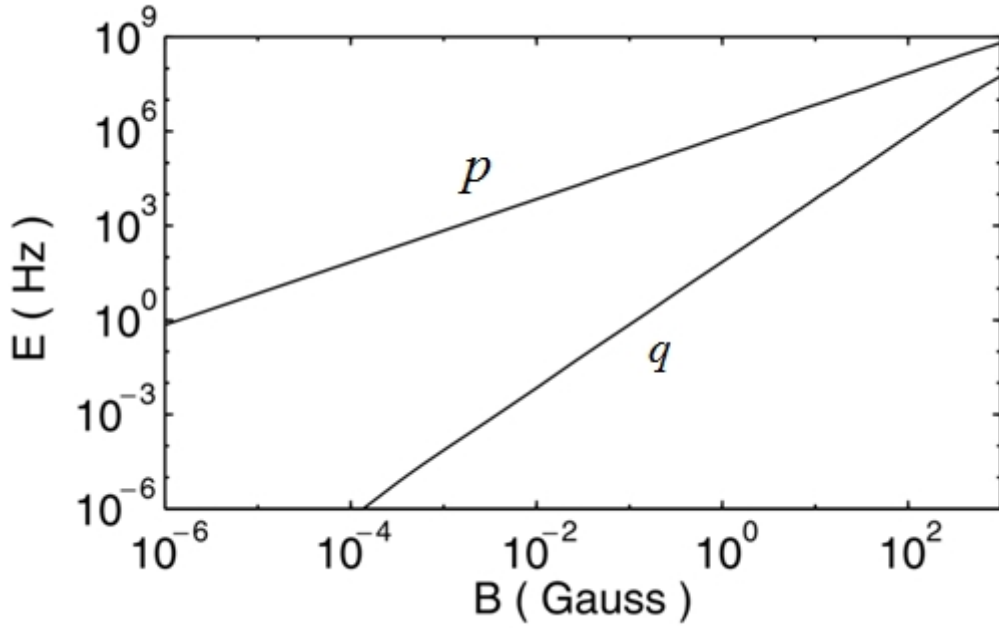


图 1.1  $^{87}\text{Rb}$  原子近似的线性塞曼效应  $p$  和二阶塞曼效应  $q$  与外磁场之间的关系[23]。

### 1.1.2 自旋交换相互作用

上一节我们了解了旋量 BEC 的单粒子哈密顿量，下面我们将介绍两个原子间的相互作用。在一个球对称的势阱中，如果没有外磁场，两个相互作用的原子的总角动量是守恒的。这里说的总角动量不仅包括两个原子的内部角动量还包括这两个原子相对运动的轨道角动量。我们假设两个原子的碰撞只发生在  $s$ -波通道，则轨道角动量可认为  $0$ 。这个假设对两原子间的短程两体碰撞是适用的，而在下一章我们会提到这种假设并不适用于偶极旋量 BEC 系统。

在这种假设下，入射态的总角动量正好是两个原子超精细自旋的和， $\mathbf{F}_{\text{pair}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ ， $\mathbf{F}_i$  是粒子  $i$  的自旋密度矢量。对于两个理想的玻色子，交换对称性要求碰撞的总角动量量子数  $F_{\text{pair}}$  必须是偶数。

通常原子之间的接触相互作用采用赝势近似，则两原子之间的相互作用可以写作[24]

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \sum_{\text{even } F_{\text{pair}}} \frac{4\pi\hbar^2 a_{F_{\text{pair}}}}{M} P_{F_{\text{pair}}}, \quad (1.1.7)$$

其中求和是对粒子对  $i$  和  $j$ ， $a_{F_{\text{pair}}}$  是碰撞通道  $\mathbf{F}_{\text{pair}}$  的散射长度，实验上可以通过费什巴赫共振调节  $a_{F_{\text{pair}}}$  的大小， $P_{F_{\text{pair}}}$  是将两个原子态投影到总角动量  $F_{\text{pair}}$  的子空间的投影

算符。首先介绍由两个自旋为  $F$  的粒子组成的系统的恒等算符

$$I_1 \otimes I_2 = \sum_{\text{all } F_{\text{pair}}} P_{F_{\text{pair}}}, \quad (1.1.8)$$

其中求和是对所有的  $F_{\text{pair}} \in \{0, 1, 2, \dots, 2F\}$ ,  $I_i$  表示第  $i$  个粒子的恒等算符,  $\otimes$  表示直积。根据自旋算符的合成法则

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = \sum_{\text{all } F_{\text{pair}}} \left[ \frac{1}{2} F_{\text{pair}} (F_{\text{pair}} + 1) - F(F + 1) \right] P_{F_{\text{pair}}}, \quad (1.1.9)$$

如上文提到的由于玻色子的交换对称性, 只考虑偶数通道, 所以对于自旋  $F = 1$  的两个粒子, 我们有

$$[I_1 \otimes I_2]_s = P_0 + P_2, \quad (1.1.10)$$

以及

$$[\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2]_s = P_2 - 2P_0, \quad (1.1.11)$$

其中下标  $s$  表示对称态限制。投影算符可以表示为

$$P_0 = \frac{[I_1 \otimes I_2]_s - [\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2]_s}{3}, \quad (1.1.12)$$

$$P_2 = \frac{2[I_1 \otimes I_2]_s + [\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2]_s}{3}. \quad (1.1.13)$$

所以两个原子间的碰撞相互作用除  $\delta$  函数外可以写成

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2}{M} (a_0 P_0 + a_2 P_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left\{ \frac{a_0 + 2a_2}{3} [I_1 \otimes I_2]_s + \frac{a_2 - a_0}{3} [\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2]_s \right\} \\ &= \frac{c_0}{2} [I_1 \otimes I_2]_s + \frac{c_2}{2} [\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2]_s, \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

其中  $c_0$  和  $c_2$  是相互作用系数, 定义为

$$c_0 \equiv \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_0 + 2a_2}{3}, \quad (1.1.15)$$

$$c_2 \equiv \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_2 - a_0}{3}. \quad (1.1.16)$$

则短程碰撞相互作用(1.1.14)的二次量子化形式为

$$H_{col} = \frac{c_0}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) + \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{F}_{\alpha'\beta'} \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{r}). \quad (1.1.17)$$

### 1.1.3 平均场 GP 方程

当温度接近于零温，而且凝聚体的粒子数比较大时，系统的基态可以用平均场理论来求解。所谓平均场理论，就是将系统的场算符  $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})$  用它的期待值来代替。

在平均场近似下，自旋  $F=1$  旋量 BEC 的哈密顿量就变成了它能量泛函[15]:

$$E[\psi] = \int d\mathbf{r} \sum_\alpha \psi_\alpha^* [h_0 - p\alpha + q\alpha^2] \psi_\alpha + \int d\mathbf{r} \left[ \frac{c_0 n^2(\mathbf{r})}{2} + \frac{c_2 \mathbf{S}^2(\mathbf{r})}{2} \right], \quad (1.1.18)$$

其中粒子数密度

$$n(\mathbf{r}) = \sum_\alpha |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2, \quad (1.1.19)$$

自旋密度矢量定义为

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha,\beta} \psi_\alpha^*(\mathbf{r}) \mathbf{F}_{\alpha\beta} \psi_\beta(\mathbf{r}), \quad (1.1.20)$$

它的各个分量分别表示为

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* (\psi_1 + \psi_{-1}) + \psi_{-1}^* \psi_0], \\ S_y &= \frac{i}{\sqrt{2}} [-\psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* (\psi_1 - \psi_{-1}) + \psi_{-1}^* \psi_0], \\ S_z &= |\psi_1|^2 - |\psi_{-1}|^2. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

由系统的能量泛函，可以得到平均场近似下波函数随时间演化的方程：

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\alpha(\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_\alpha^*(\mathbf{r})}. \quad (1.1.22)$$

描述旋量 BEC 动力学行为的多组份耦合 Gross-Pitaevskii (GP) 方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} = [h_0 - p\alpha + q\alpha^2 + c_0 n(\mathbf{r})] \psi_\alpha + c_2 \sum_\beta \mathbf{S}(\mathbf{r}) \mathbf{F}_{\alpha\beta} \psi_\beta. \quad (1.1.23)$$

为得到定态 GP 方程，首先将波函数写成下面的形式

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \psi_\alpha(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}. \quad (1.1.24)$$

其中  $\mu$  是化学势，将方程(1.1.24)代入方程(1.1.23)中，可以得到

$$\left[ h_0 - p\alpha + q\alpha^2 + c_0 n \right] \psi_\alpha + c_2 \sum_{\beta} \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_{\alpha\beta} \psi_\beta = \mu \psi_\alpha. \quad (1.1.25)$$

为了更加明确地得到三组份的形式，我们将上式做进一步展开，其中关键的一项是

耦合项  $c_2 \sum_{\beta} \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_{\alpha\beta} \psi_\beta$ ，当  $\alpha = 1$  时，

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_{1\beta} \psi_\beta &= \sum_{\beta} (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{1\beta} \psi_\beta \\ &= (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{11} \psi_1 + (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{10} \psi_0 \\ &\quad + (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{1-1} \psi_{-1} \\ &= (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \psi_1 + (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \psi_0 \\ &\quad + (S_x, S_y, S_z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_{-1} \\ &= S_z \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (S_x - iS_y) \psi_0. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

这里我们定义

$$S_{\pm} \equiv \frac{S_x \pm iS_y}{\sqrt{2}}, \quad (1.1.27)$$

所以有

$$\sum_{\beta} \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_{1\beta} \psi_\beta = S_z \psi_1 + S_- \psi_0. \quad (1.1.28)$$

我们可以得到当  $\alpha = 0$  和  $-1$  时,

$$\sum_{\beta} \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_{0\beta} \psi_{\beta} = S_{+} \psi_1 + S_{-} \psi_{-1}, \quad (1.1.29)$$

$$\sum_{\beta} \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_{-1\beta} \psi_{\beta} = S_{+} \psi_0 - S_{z} \psi_{-1}. \quad (1.1.30)$$

方程(1.1.25)可以写成如下三个耦合方程

$$\begin{aligned} [h_0 - p + q + c_0 n + c_2 S_z - \mu] \psi_1 + c_2 S_{-} \psi_0 &= 0, \\ c_2 S_{+} \psi_1 + [h_0 + c_0 n - \mu] \psi_0 + c_2 S_{-} \psi_{-1} &= 0, \\ c_2 S_{+} \psi_0 + [h_0 + p + q + c_0 n - c_2 S_z - \mu] \psi_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

通过求解方程组(1.1.31), 就可以求解自旋  $F = 1$  的旋量 BEC 的基态性质。

#### 1.1.4 均匀磁场中的基态

对均匀系统, 粒子数密度  $n$  为常数, 平均场波函数可表示为

$$\psi_{\alpha} = \sqrt{n} \zeta_{\alpha}, \quad (1.1.32)$$

其中旋量波函数  $\zeta_{\alpha}$  满足归一化条件  $\sum_{\alpha} |\zeta_{\alpha}|^2 = 1$ , 定义归一化的自旋密度

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}, \quad (1.1.33)$$

其形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^* \mathbf{F}_{\alpha\beta} \psi_{\beta} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \zeta_{\alpha}^* \mathbf{F}_{\alpha\beta} \zeta_{\beta} \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

由公式(1.1.27), 可以得到如下关系式

$$s_{\pm} = \frac{s_x \pm i s_y}{\sqrt{2}}. \quad (1.1.35)$$

在磁场为零的情况下, 塞曼能项  $p$  和  $q$  消失, 系统基态的磁性是显而易见的。通过最小化系统的能量泛函可以得出, 当  $c_2 < 0$  时, 如自旋 1 的旋量气体  $^{87}\text{Rb}$ , 系统的总能量最低要求  $|\langle \mathbf{F} \rangle| = 1$ , 这时系统倾向于占据铁磁态。当  $c_2 > 0$  时, 如自旋 1 的旋量气体  $^{23}\text{Na}$ , 系统倾向于占据 polar 态, 满足  $\langle \mathbf{F} \rangle = 0$ 。定义 polar 态的量子化轴为  $\mathbf{k}$ 。当  $p = 0$  且  $q \neq 0$  时, 根据  $q$  的正负, 凝聚体被分为两种不同的相:  $q > 0$  时的易轴极化

相(EAP), 满足  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}$  和  $\langle F_z \rangle^2 = 1$ ;  $q < 0$  时的易平面极化相(EPP), 满足  $\mathbf{k} \perp \mathbf{z}$  和  $\langle F_z \rangle^2 = 0$ 。这两个相分别记做极化相 (P) 和反铁磁相 (AF), 相应的序参量分别为  $\zeta = (0, 1, 0)^T$  和  $1/\sqrt{2}(1, 0, 1)^T$ 。两者可以通过  $y$  轴旋转  $\pi/2$  互相转化, 在无外磁场的情况下, 这两个态是等价且简并的。

因为原子间的碰撞相互作用(1.1.17)和两个碰撞原子的总角动量是守恒的, 遵循 GP 方程的自旋动力学的总磁化强度也守恒。所以, 如果想找到系统在给定磁化

$$M_z = \int d\mathbf{r} S_z(\mathbf{r}) \quad (1.1.36)$$

下的基态, 应该将方程(1.1.22)中的  $E$  换成  $E - \lambda M_z$ , 其中  $\lambda$  是拉格朗日乘子。相应地, (1.1.31)中的  $p$  就变成了  $\tilde{p} = p + \lambda$ 。

下面简单介绍凝聚体在参数空间  $(q, p)$  的基态。在 Thomas-Fermi 近似下忽略动能项, 在均匀系统中势能为 0, 则通过比较单粒子的能量

$$\varepsilon = \sum_{\alpha} (-p\alpha + q\alpha^2) |\zeta_{\alpha}|^2 + \frac{1}{2} c_0 n + \frac{1}{2} c_2 n |\mathbf{s}|^2, \quad (1.1.37)$$

就可以得到系统的基态。由于系统关于  $z$  轴对称, 我们不失一般性地假设  $f_y = 0$ , 即

$$s_+ = s_- = s_x. \quad (1.1.38)$$

则耦合 GP 方程组变为

$$(-p + q + c_2 n s_z - \tilde{\mu}) \zeta_1 + c_2 n s_x \zeta_0 = 0, \quad (1.1.39)$$

$$c_2 n s_x (\zeta_1 + \zeta_{-1}) - \tilde{\mu} \zeta_0 = 0, \quad (1.1.40)$$

$$c_2 n s_x \zeta_0 + (p + q - c_2 n s_z - \tilde{\mu}) \zeta_{-1} = 0, \quad (1.1.41)$$

其中

$$s_x = \sqrt{2} (\zeta_1 + \zeta_{-1}) \zeta_0, \quad (1.1.42)$$

$$s_z = |\zeta_1|^2 - |\zeta_{-1}|^2. \quad (1.1.43)$$

以及  $\tilde{\mu} = \mu - c_0 n$ 。联立(1.1.39)-(1.1.43)这五个方程组, 然后分情况讨论, 例如: 当  $\zeta_0 = 0$  时, 可以有三种可能的情况, 它们分别是:

$$\begin{aligned} \text{(I): } & \zeta_1 \neq 0, \zeta_1 = 0, \zeta_{-1} = 0; \\ \text{(II): } & \zeta_1 = 0, \zeta_1 = 0, \zeta_{-1} \neq 0; \\ \text{(III): } & \zeta_1 \neq 0, \zeta_1 = 0, \zeta_{-1} \neq 0. \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

根据归一化条件, (I) 和 (II) 对应的基态分别为



$$\begin{aligned}
 \text{(I)}: & \left( e^{i\chi_0} e^{-iF_z \chi_z}, 0, 0 \right)^T; \\
 \text{(II)}: & \left( 0, 0, e^{i\chi_0} e^{-iF_z \chi_z} \right)^T;
 \end{aligned} \tag{1.1.45}$$

其中  $e^{i\chi_0}$  是整体的规范变换,  $e^{-iF_z \chi_z}$  是关于  $z$  轴旋转  $\chi_z$  角

$$e^{-iF_z \chi_z} = \begin{bmatrix} e^{-i\chi_z} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi_z} \end{bmatrix}. \tag{1.1.46}$$

可见这两个态被完全极化,  $s_z$  分别为 1 和 -1, 这就是所谓的铁磁态。对于情况 (III), 将  $\zeta_0 = 0$  带入方程(1.1.39)和(1.1.41)得到

$$s_z = |\zeta_1|^2 - |\zeta_{-1}|^2 = \frac{p}{c_2}, \tag{1.1.47}$$

根据归一化条件可得

$$\text{(III)}: e^{i\chi_0} e^{-iF_z \chi_z} \left( \sqrt{\frac{1+p/c_2}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1-p/c_2}{2}} \right)^T; \tag{1.1.48}$$

依次类推考虑到所有可能的情况  $\zeta_0 \neq 0$ ,

$$\text{(IV)}: \left( 0, e^{i\chi_0} e^{-iF_z \chi_z}, 0 \right)^T; \tag{1.1.49}$$

$$\text{(V)}: e^{i\chi_0} e^{-iF_z \chi_z} \begin{pmatrix} \frac{q+p}{2q} \sqrt{\frac{(-p^2+q^2+2c_2 nq)}{2c_2 nq}} \\ \sqrt{\frac{(q^2-p^2)(-p^2-q^2+2c_2 nq)}{2c_2 nq^3}} \\ \frac{q-p}{2q} \sqrt{\frac{(-p^2+q^2+2c_2 nq)}{2c_2 nq}} \end{pmatrix}. \tag{1.1.50}$$

然后根据能量泛函(1.1.37)可以得到它们所对应的能量,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_I &= -p + q + \frac{1}{2}c_0n + \frac{1}{2}c_2n; \\
 \varepsilon_{II} &= p + q + \frac{1}{2}c_0n + \frac{1}{2}c_2n; \\
 \varepsilon_{III} &= q + \frac{1}{2}c_0n - \frac{p^2}{2c_2n}; \\
 \varepsilon_{IV} &= \frac{1}{2}c_0n; \\
 \varepsilon_V &= \frac{(-p^2 + q^2 + 2c_2nq)^2}{8c_2nq^2} + \frac{1}{2}c_0n.
 \end{aligned} \tag{1.1.51}$$

最后通过比较它们之间的大小，得出相边界，从而得出序参量  $p$  和  $q$  下的基态相图，如图 1.2。

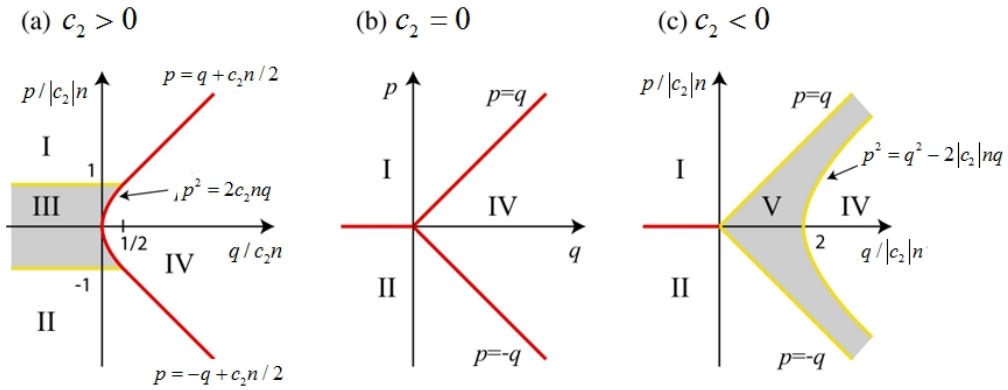


图 1.2 当(a)  $c_2 > 0$ ，(b)  $c_2 = 0$  和 (c)  $c_2 < 0$  时，自旋 1 旋量玻色爱因斯坦凝聚体的  $p-q$  相图[24]。

### 1.1.5 偶极相互作用

随着超冷原子和分子物理领域实验技术的发展，研究人员可以利用 Feshbach 共振技术来调节原子间的散射长度（如 Cr、K、Li）[1, 25-27]。这样，原子-原子之间的非常弱的偶极相互作用成为决定这些凝聚体自旋性质的主导因素。最早提出偶极玻色-爱因斯坦凝聚现象的理论工作是 2000 年的三篇论文[28-30]。之后偶极玻色爱因斯坦凝聚体的概念被推广到旋量玻色爱因斯坦凝聚体中[31-33]，螺旋状自旋纹理在 2008 年被伯克利的实验组在 Rb 原子的旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中观察到[34]，

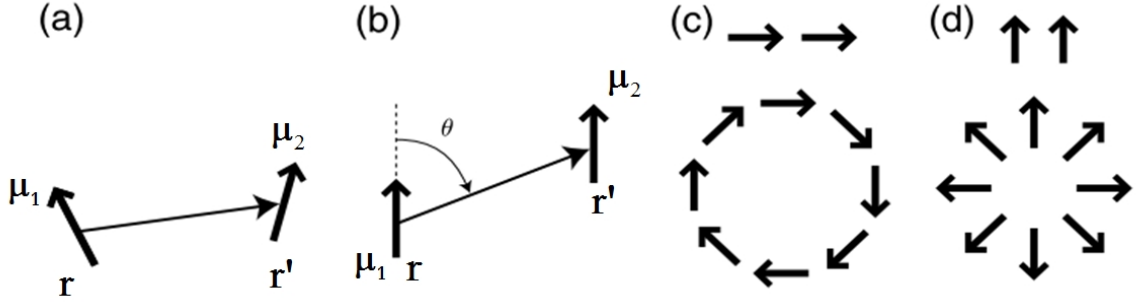


图 1.3 两个偶极矩之间的相互作用，其中(a)是没有极化的情况，(b)是极化的情况。(c)偶极相互作用为吸引相互作用时自旋倾向于首尾相接的结构，(d)偶极相互作用为排斥相互作用的边对边的结构，(c)和(d)下面的表示相关的自旋结构[15]。

与 s-波接触短程相互作用不同，偶极相互作用是长程且各向异性的，它们之间的竞争会展示很丰富的物理图像[35]。虽然相对于背景散射长度，碱金属之间的偶极相互作用远小于自旋碰撞交换相互作用，但是实验上对 Cr 原子，Dy 原子以及 Er 原子等玻色爱因斯坦凝聚体的实现，极性超冷分子的产生，以及精确测量和调控技术的进步都使得人们对偶极相互作用产生很大的兴趣。

两个位于空间  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  点的偶极子之间的偶极相互作用可以表示为

$$V_{dd}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = c_d \frac{\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2 - 3(\mathcal{D}_1 \cdot \mathbf{e})(\mathcal{D}_2 \cdot \mathbf{e})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.1.52)$$

其中  $\mathcal{D}_i$  ( $i=1,2$ ) 是原子的偶极矩， $\mathbf{e} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  为单位矢量， $c_{dd} = 1/(4\pi\epsilon_0)$  和  $c_{dd} = \mu_0/(4\pi)$  分别电偶极矩和磁偶极矩的偶极相互作用系数， $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为介电常数和真空磁导率， $\mu$  表示偶极矩的大小。对于磁偶极矩  $\mathcal{D}_i = g_F \mu_B \mathbf{F}_i$ ，如图 1.3(a) 所示。在特殊情况下，当两个偶极矩被外场极化时，(1.1.52) 的偶极相互作用可以简化为

$$V_{dd}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = c_d \frac{1 - 3\cos^2 \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.1.53)$$

其中  $\theta$  为极化方向和相对位移的夹角，如图 1.3(b)。因为当  $\theta = 0$  时， $V_{dd}$  为负，偶极相互作用倾向于首尾相接 (head-to-tail) 的结构，如图 1.3(c)，当  $\theta = \pi/2$  时， $V_{dd}$  为正值，边对边 (side-by-side) 结构更加稳定，如图 1.3(d) 所示。

利用两个偶极矩之间的相互作用形式(1.1.52)，旋量玻色爱因斯坦凝聚体中磁偶

极相互作用的哈密顿量形式为

$$H_{dd} = \frac{c_d}{2} \iint \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \left[ \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{r}')\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{F}_{\alpha'\beta'}\hat{\psi}_\beta(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. - 3\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{r}')(\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{F}_{\alpha'\beta'} \cdot \mathbf{e})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\beta'}(\mathbf{r}') \right] \quad (1.1.54)$$

其中偶极相互作用参数为

$$c_d = \frac{\mu_0\mu_B^2g_F^2}{4\pi} \quad (1.1.55)$$

自旋交换相互作用  $c_2$  项与偶极相互作用  $c_d$  项为两种典型的和自旋相关的相互作用，正是这两种相互作用的相互影响和竞争，才产生了丰富多彩的自旋纹理结构。存在长程各向异性的偶极相互作用系统很多，极性分子就是一种理想的电偶极相互作用占主导的系统。实验冷却分子的方法有很多，比如缓冲气体冷却[38-40]和完全减速冷却[41]。而且实验上也已经得到直接用激光冷却的 SrF 分子[42]。据我们所知，异核的 Feshbach 共振已经在  ${}^6\text{Li}{}^{23}\text{Na}$  [43]， ${}^6\text{Li}{}^{40}\text{K}$  [44]， ${}^6\text{Li}{}^{87}\text{Rb}$  [45]， ${}^{40}\text{K}{}^{85}\text{Rb}$  [45]， ${}^{87}\text{Rb}{}^{133}\text{Cs}$  [46] 分子中观察到，而且实验制备光缔合分子也在  ${}^7\text{Li}{}^{133}\text{Cs}$  [48]， ${}^6\text{Li}{}^{40}\text{K}$  [49]， ${}^{23}\text{Na}{}^{133}\text{Cs}$  [50]， ${}^{39}\text{K}{}^{87}\text{Rb}$  [51]， ${}^{41}\text{K}{}^{87}\text{Rb}$  [52]， ${}^{85}\text{Rb}{}^{133}\text{Cs}$  [53]， ${}^{174}\text{Yb}{}^{87}\text{Rb}$  [54]，和  ${}^{176}\text{Yb}{}^{87}\text{Rb}$  [54] 获得成功。另外强电偶极相互作用已经在里德伯激发的玻色爱因斯坦凝聚体中实现[55]。

与短程接触相互作用相比，自旋 1 偶极旋量 BEC 相互作用系统的另外一个特征是对外势几何形状的强烈依赖。当 BEC 气体处在一个三维谐振子势中，通过改变势阱的纵横压缩比就可以改变 BEC 形状。BEC 形状不同，会导致系统的基态性质也不同，易俗和蒲晗已经给出了自旋 1 铁磁和反铁磁旋量 BEC 关于势阱的纵横压缩比和偶极相互作用与自旋交换相互作用的相对强度的基态相图，我们在下一章会详细介绍他们的工作。

量子化涡旋是量子流体的普遍特性，其形成的根本原因是描述量子系统的复数序参量的单值性。小到超流液体氦，大到中子星都存在着量子化涡旋现象。实验上最早是在超流液氦中观察到量子化涡旋，但是由于液氦原子之间的相互作用非常强，很难用简单的理论来精确的描述。后来随着超冷稀薄原子气体 BEC 的实验实现[36]，可以采用专门处理弱相互作用玻色气体的平均场理论来描述，才使得人们对量子化涡旋的研究更为深入。偶极旋量 BEC 能自发形成自旋涡旋态，这与纳米磁性材料中磁涡旋态非常类似。

## 1.2 磁涡旋态简介

### 1.2.1 磁畴

为了降低静磁能，磁性材料在自发磁化的过程中会产生自发磁矩，而且相邻原子的自发磁矩之间存在着一种很强的“交换耦合”作用，这使得磁体内部分化成许多方向不同的小磁化区域，而且每个区域内部都存在大量原子。这些原子的磁化区域在磁体中整齐排列，但相邻的不同磁化区域之间原子的磁矩排列方向是不同的，称为磁畴。磁畴的种类很多，图 1.4 表示矩形的铁磁性材料中的不同结构的磁畴排列，从左到右分别为单磁畴，两个反向的磁畴，多个磁畴排列，闭合的磁畴以及多个闭合的磁畴。磁畴连接面则形成磁畴壁[56]。

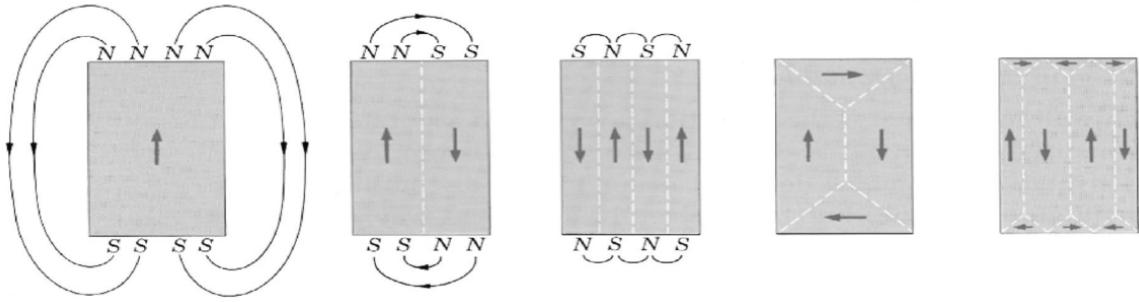


图 1.4 矩形铁磁材料中自发形成的不同种类的磁畴分布[57]。

### 1.2.2 磁涡旋结构

在玻色爱因斯坦凝聚体中，波函数可以写成

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \exp(i\theta(\mathbf{r})), \quad (1.2.1)$$

其中  $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$  为凝聚体的密度， $\theta(\mathbf{r})$  为它的相位，相位的相干性是玻色爱因斯坦凝聚体的重要的秉性。虽然根据量子力学的原理，波函数乘以一个常数相因子并不改变自身的性质，但是在空间不同位置的相位可以通过函数  $\theta$  建立联系。如将 (1.2.1) 波函数的具体形式带入量子力学几率流的表达式

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})\hbar}{M} \nabla\theta(\mathbf{r}), \quad (1.2.2)$$

其中  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  和流速的关系为  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ，则超流速度  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  定义为相位  $\theta(\mathbf{r})$  的梯度

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \nabla\theta(\mathbf{r}). \quad (1.2.3)$$

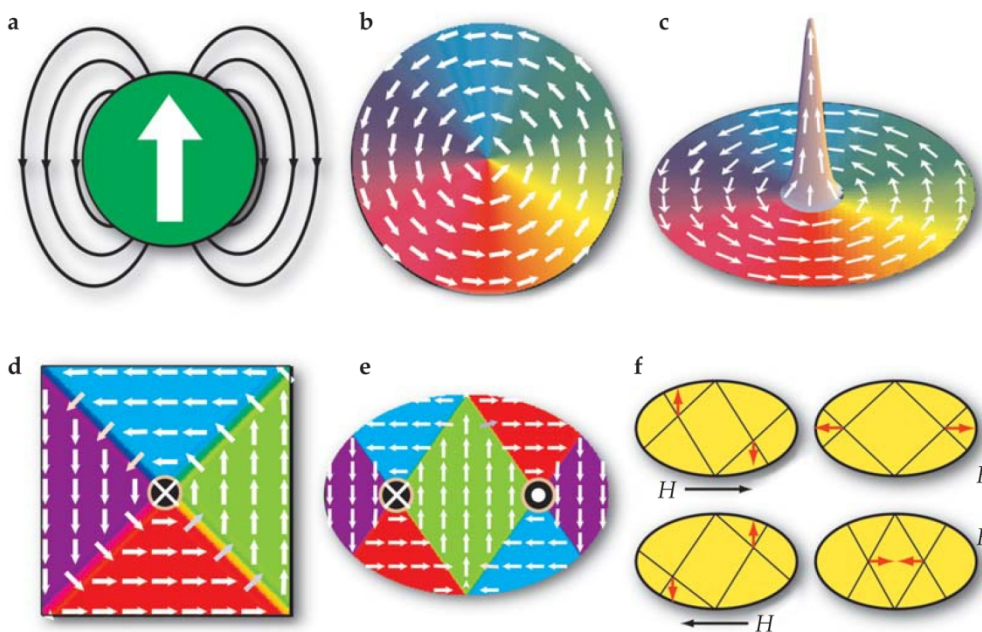


图 1.5 纳米磁子的自旋结构。(a) 圆盘上的单独磁畴态，所有的磁矩都平行排列，在它的周围产生的磁场会导致静磁能的产生。(b) 无散杂磁场的涡旋态，但是磁矩间的交换能不为 0。(c) 涡旋核的磁矩垂直于圆盘平面，从而减少涡旋中心的交换能。(d) 和(e) 分别表示方形的磁盘和椭圆形磁盘中的自旋涡旋结构。(f) 椭圆形磁盘的涡旋中心随外加磁场的变化[58]。

从(1.2.3)可以看出，凝聚体波函数的相位的梯度与超流体的速度成正比，而且超流速度是个无旋场，因为它满足关系式

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (1.2.4)$$

从超流体内的任意一点出发，超流速度沿闭合的路径的积分满足

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{M} \oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.2.5)$$

式(1.2.5)的环路积分表示经过闭合曲线一周后回到原来位置时相位的变化，由波函数的单值性可以得到起点和终点虽然是同一个点，但是它们的相位不一定相同，可以相差  $2\pi$  的整数倍。故有

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi\hbar}{M} \kappa, \quad (1.2.6)$$

其中  $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，这就是所谓的昂萨格-费曼 (Onsager-Feynman) 涡旋量子化条件，是波函数单值性的一个直接推论。

涡旋态是形成 BEC 的标志之一，从拓扑的意义上说，涡旋是序参量空间的一种

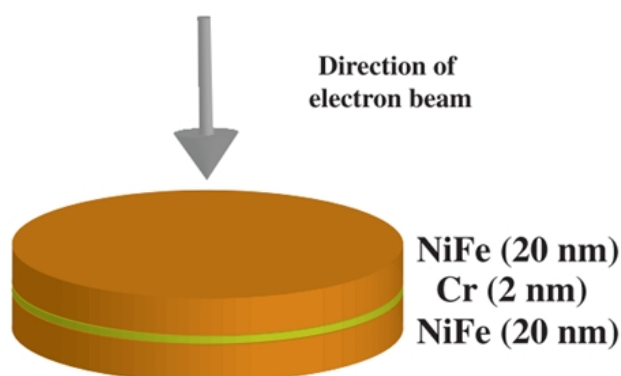


图 1.6 由镍铁导磁合金组成的铁磁-非磁-铁磁结构的纳米磁性材料,在受到电子束的激发时的示意图[60]。

点缺陷。磁涡旋态是纳米磁性材料中很常见的态,它的形成是几个能量相互竞争的结果,如原子磁矩之间的交换相互作用能,磁场自身带来的静磁能和磁晶体的各向异性性能,而且影响这三个相互作用能的因素大致为:磁体的大小,磁体的形状以及磁性材料的性质[58]。图 1.5 是一个直径为  $D$  的薄磁盘的磁涡旋结构,其厚度远远小于  $D$ , a 为圆盘上的一个单独磁畴态, b 图表示的是一个无核的涡旋,它没有静磁场和漏磁场,只消耗交换能, c 图表示一个有极性的涡旋,方形的磁盘也能产生涡旋态,产生四个磁畴和四个畴壁,它们在涡旋核的地方交叉,如 d 图。椭圆形的磁盘中能够形成一个涡旋对, e 图, f 图表示在细黑线的交叉处有两个涡旋核,当外加磁场作用时(黑色箭头),它们朝着彼此相反的方向移动。涡旋的旋度  $c$  (circulation) 有两种可能的情况(顺时针和逆时针),涡旋的中心的极性  $\mathcal{P}$  (polarity) 也有两种可能的情况(垂直于磁盘面朝上或者朝下),它们分别定义为[59]:

$$c = \text{sgn}\left\{\mathbf{e}_z \cdot [(\mathbf{r} \times \mathbf{M}_\perp)(\mathbf{r} \neq 0)]\right\}, \quad (1.2.7)$$

和

$$\mathcal{P} = \text{sgn}\left\{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{M}_\perp(\mathbf{r} = 0)\right\}, \quad (1.2.8)$$

其中  $\mathbf{M}_\perp$  是在平面上的磁化。所以一个涡旋就可以有四种手征,即  $h = c\mathcal{P}$ 。除了这些基本性质,磁片中的涡旋还被提议用作量子存储器和纳米振荡器[61-68]。图 1.6 是由镍铁磁导合金组成的多层纳米磁性材料,其中上下两层由铁磁性材料构成,可形成磁涡旋态,中间层由没有磁性的 Cr 原子组成,当受到电子束的激发时,上下层的涡旋会展现出丰富的动力学行为[69-78],如观察到非平庸的拓扑自旋结构——有效自旋 meron 对[60,80],以及涡旋的极性反转动力学过程等等[81,82]。



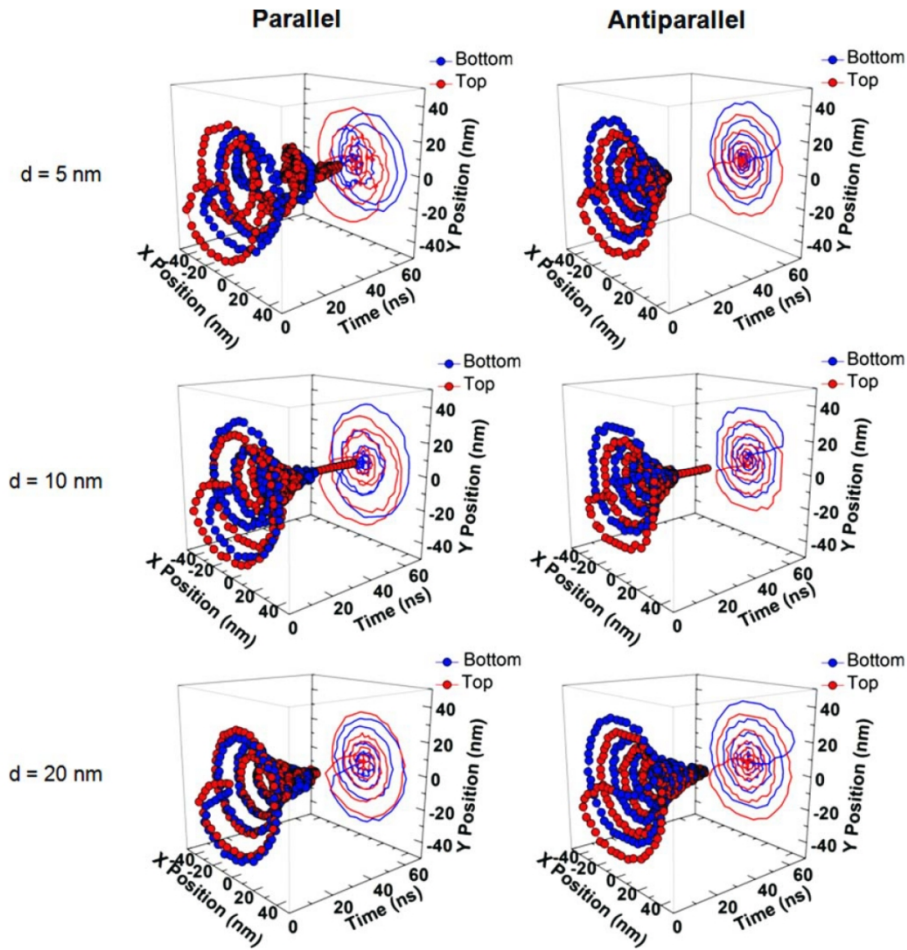


图 1.7 不同的层间距下，相对手征平行和反平行的两个涡旋在受到脉冲的激发后，涡旋核在  $x$ - $y$  平面上的运动轨迹，从上到下的层间距分别为  $d = 5, 10,$  和  $20 \text{ nm}$  [92].

### 1.2.3 耦合涡旋动力学

在磁性材料中，掌握磁涡旋之间的相互作用机制，对研究涡旋动力学行为具有很大意义。许多研究者都致力于去研究涡旋结构以及涡旋动力学[83-86]。特别是近几年纳米尺寸的电子器件和存储设备的兴起，使得研究和掌握涡旋动力学变得非常重要[87,88]。磁涡旋在受到外磁场或者自旋转矩的激发时，处在激发态的涡旋就会开始做螺旋运动，并伴随有圆形的轨迹[83-89]。研究发现当涡旋之间存在弱耦合相互作用时，由铁磁-非磁-铁磁组成的三层薄磁片中涡旋的运动就类似于一个阻尼谐振子[90]。另外，在实验上也观察到了三层结构中涡旋的螺旋运动，而且由于层间的耦合相互作用使得它们有  $180^\circ$  的相移[91]。

文献[92]研究了强耦合相互作用下纳米尺寸的三层涡旋结构的动力学行为。镍铁



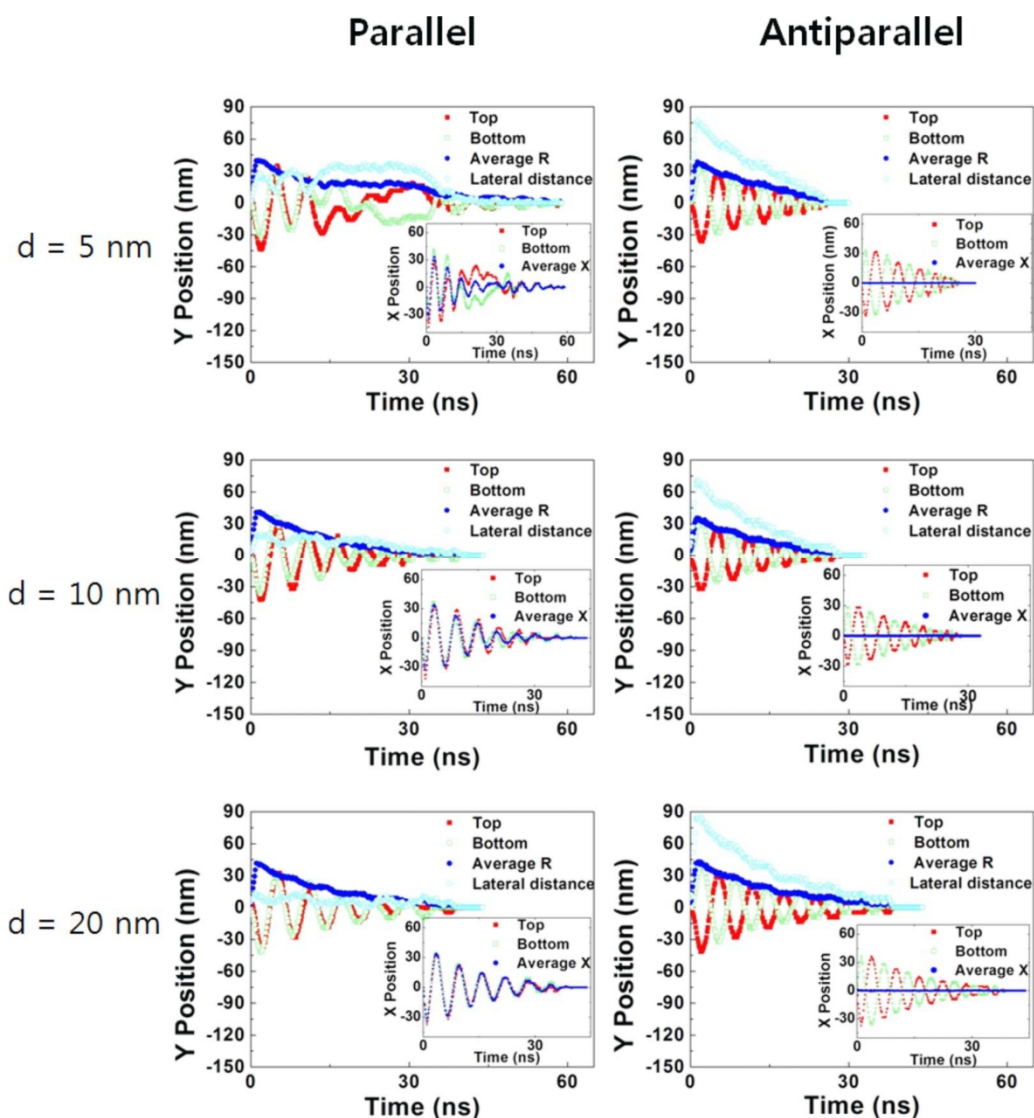


图 1.8 不同的层间距  $d = 5, 10,$  和  $20 \text{ nm}$  下，两个涡旋核运动的位移在  $y$  轴上的投影、平均径向距离以及横向距离随时间的变化。插图表示上下涡旋的核位移，平均径向距离在  $x$  轴上的投影[92]。

导磁合金组成的铁磁-非磁-铁磁纳米磁性材料在受到持续脉冲的激发时，相对手征为平行或者反平行的两种耦合涡旋随时间的动力学演化轨迹如图 1.7 所示。当两个涡旋的相对手征为平行时，涡旋核的初始运动方向是相同的，而当相对手征为反平行时，它们的初始运动方向却是相反的。尽管涡旋核的初始运动方向由涡旋结构的手征决定，但是它们做螺旋运动的方向只决定于涡旋核的极性，这里涡旋核的极性都一样，所以涡旋核做螺旋运动的旋转方向都一样，都为逆时针旋转，与它们的相对手征无关，如图 1.7 所示。当两个涡旋之间的距离增大为  $d = 20 \text{ nm}$ ，螺旋运动似乎变得跟两者的相对手征没有关系，然而，当层间距  $d$  较小时( $d = 5 \text{ nm}$ )，相对而言，反平行

涡旋核螺旋运动的振荡衰减得更快，这是由于此时上层和下层涡旋之间存在较强的耦合相互作用。图 1.8 分别展示了上下层涡旋核的螺旋运动在  $y$  轴上的投影、平均径向距离以及横向距离随不同层间距离的变化规律。这里横向距离定义为两个涡旋核的相对距离，平均径向距离定义为两个涡旋核距离原点的径向距离的平均值，两者皆为  $x$ - $y$  平面的投影值。由图 1.8 可见，在所有情况下，涡旋核的位移都随时间做衰减振荡。但是对于反平行涡旋，上下层间距越小，振荡行为就衰减的越快。从横向距离和平均径向距离随时间的变化能够很直观的看出，层间距越小 ( $d = 5 \text{ nm}$ )，它们衰减到零的速度就越快。这种行为可以归结于上下两层涡旋之间的相互作用为吸引相互作用。由于这两个核有着相同的极性 ( $p = +1$ )，且磁芯磁化强度产生闭合的磁通，它们更倾向于彼此之间的距离最短。

在平行涡旋的情况下，上文提到的快速衰减的行为并不存在。虽然两个涡旋核之间也存在吸引相互作用，但是在初始时刻两核间距很小，减小层间距对快速衰减振荡作用不大。设想如果这两个涡旋之间不存在耦合相互作用，那么这两个涡旋核之间的横向距离就会一直保持为 0，而事实是，尽管把磁性材料之间的距离增加到最大 ( $d = 20 \text{ nm}$ )，这意味着两个涡旋之间的耦合强度最弱，两个涡旋核之间的横向距离也不为 0，而是在附近小幅振荡。更有趣的是，当  $d = 5 \text{ nm}$  时，耦合振荡行为振荡的时间最长，跟它相应的平均径向距离也存活的时间最长。而且两个周期之后，两个涡旋核的振荡开始变得混乱无序。在无序的耦合运动中，两个核之间的横向距离甚至变得比平均径向距离都大。考虑到两个涡旋核之间的相互作用为吸引相互作用，所以在无序混乱运动区域，很强的非线性耦合相互作用起着关键作用。

### 1.3 碰撞动力学简介

最近，关于两个凝聚体的碰撞动力学的研究已经引很大关注[93-98]。下面就最近的几组有关碰撞动力学的实验做简要介绍。

#### 1.3.1 量子牛顿摆

图 1.9(a)是一个典型的牛顿摆[93]，当一端的小球被拉起，释放后它会与它相邻的小球发生碰撞并趋于静止，而另一端的小球会突然弹起，如果不考虑能量损失，两端的球将会不停地运动下去。这个实验要求小球静止时必须排成一条直线，而且要求小球碰撞过程中没有热量流失，在经典物理中我们常常用它来演示动量和动能守恒。

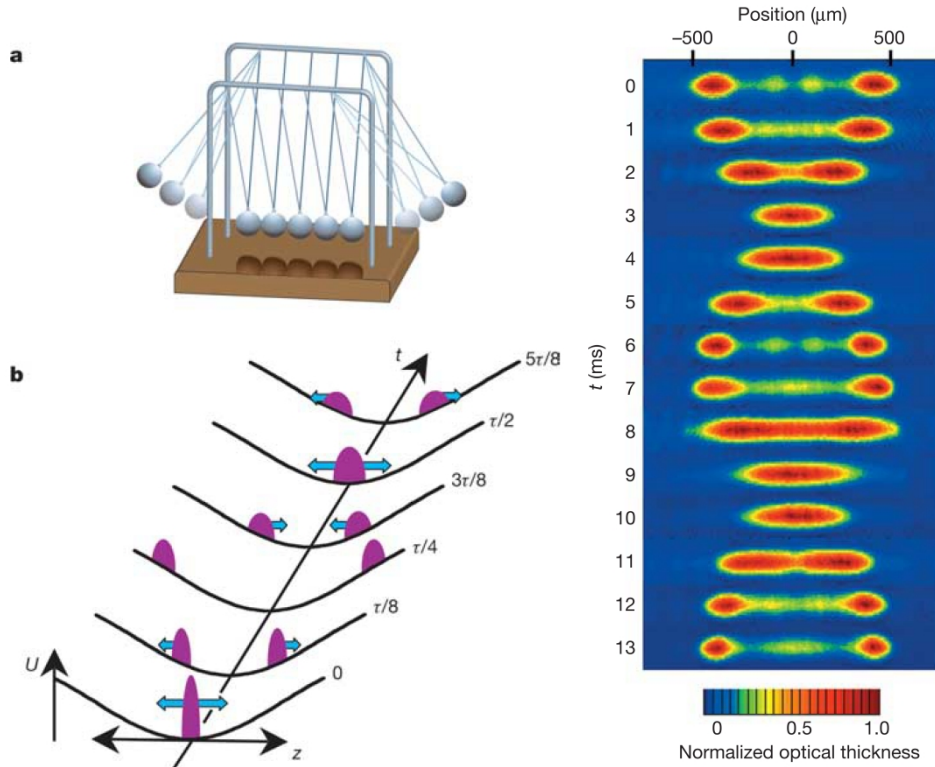


图 1.9 a, 经典的牛顿摆; b, 不同时刻, 在 1D 非谐振子势阱  $U$  中两团非平衡原子云在不同时刻的变化示意图; c, 第一个振荡周期的吸收图像, 碰两次为一个周期[93]。

在量子物理中, 美国物理学家 Weiss 团队用 BEC 气体制造出了一种永远达不到平衡态的气体, 该系统的行为类似一个量子牛顿摆。他们采用相干激光束形成由 3000 个平行的管状势阱组成的阵列, 构造出一个一维光势阱, 然后将大约  $2 \times 10^5$  个  $^{87}\text{Rb}$  BEC 注入到制备好的一维光势阱中, 再用另一束激光使捕获的原子开始碰撞, 使其以大致相同的振幅振荡, 如图 1.9(b)。不同的是, 这些原子的动量分布不再发生变化, 即使在振荡了数千次以后, 每个原子始终以刚开始实验时的振幅振荡。图 1.9(c) 展示了原子碰撞的第一个周期的吸收成像图, 展现出非常好的周期性。

这是实验上首次观察到可积系统的动力学行为, 而且这项研究有利于我们理解粒子是如何达到热力学平衡态的, 还可以用做精确的力传感器。这种非平衡振荡只发生在一维量子气体中, 因为在二维或者三维空间中, 粒子之间的碰撞会很快地导致我们所熟知的热力学平衡态。

### 1.3.2 物质波孤子碰撞

另外一个碰撞实验是关于两个物质波孤子的碰撞[94]。所谓孤子, 即一种在传播过程中不改变自身状态的行波。两个独立的孤子发生碰撞, 在穿过彼此的时候并不改变彼此的形状、幅度、和速度。Hulet 小组将简并的  $^7\text{Li}$  原子 BEC 采用蒸发冷却的

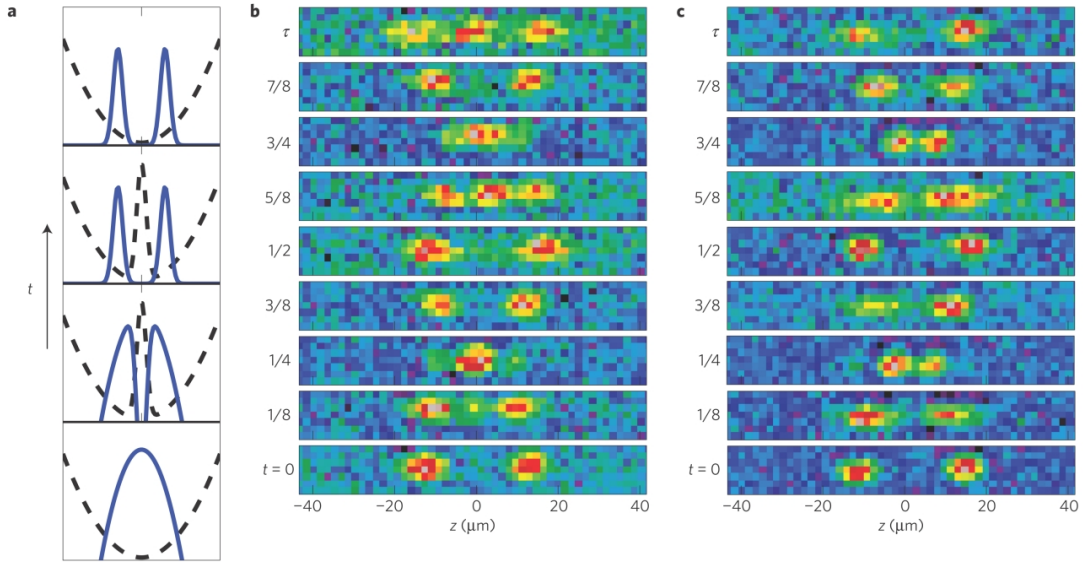


图 1.10 a, 孤子对形成过程的实验原理图; b, 相对差为  $\Delta\phi \approx 0$  的两个孤子随时间演化的碰撞密度吸收图; c, 相对差为  $\Delta\phi \approx \pi$  的两个孤子随时间演化的碰撞密度吸收图[94]。

办法制备在  $|F=1, m_F=1\rangle$  的态上, 然后将它囚禁在一个柱对称的谐振子势阱中, 这个谐振子势阱的径向频率和轴向频率分别为  $\omega_{\perp}/2\pi = 254\text{Hz}$  和  $\omega_z/2\pi = 31\text{Hz}$ , 形成一个有效的一维势阱。一旦形成 BEC, 用一束蓝失谐的高斯激光将凝聚体切成两半, 此时高斯激光的作用就相当于是一个双势阱的势垒, 如图 1.10(a)所示。然后调节散射长度, 使得  $|F=1, m_F=1\rangle$  态形成一个中心间距为  $26\mu\text{m}$  的孤子对。当孤子对形成以后, 突然撤掉势垒 ( $t < 60\text{ns}$ ), 这两个孤子就会很快地朝着势阱的中心加速移动。研究发现这两个孤子的碰撞跟它们的相对相位有很大的关系, 图 1.10 展示了相对相位分别为  $\Delta\phi \approx 0$  和  $\Delta\phi \approx \pi$  的两种碰撞的一个完整碰撞周期, 它包含两次碰撞。实验发现, 在碰撞过程中, 当相位差  $\Delta\phi \approx 0$  时, 在两个孤子的质心位置会出现一个密度的峰值 (反节点), 这就意味着这个碰撞为同相碰撞, 而且它们之间的相互作用是吸引相互作用, 反之, 当两者之间的相位差变成  $\Delta\phi \approx \pi$  时, 质心的干涉图像的中心变成了密度节点, 这意味着此时的碰撞变成了反相碰撞, 两个孤子之间存在一个有效地排斥相互作用。这个实验的主要目的是为了阐明系统的可积性、相对相位、空间维度以及平均场相互作用在孤子碰撞中所起的作用。

### 1.3.3 半量子涡旋碰撞

在标量超流体中, 环绕量子涡的旋超导电流环流可以用单位  $h/M$  来量化, 当量子涡旋的环流为  $h/2M$  时称为半量子涡旋 (HQV), 其中  $h$  是普朗克常数。为了研究



HQV 的碰撞[96, 97], 韩国的 Shin 小组将处在  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  精细自旋态的  $^{23}\text{Na}$  BEC 原子囚禁在一个扁圆的势阱中, 用激光扫过处在易轴极化相的凝聚体, 得到一对由两个单荷涡旋组成的环流反向的涡旋偶极子, 如图 1.11, (a) 是两个单荷涡旋运动轨迹的示意图, (b-d) 是在生成涡旋后 4s 内的光学密度图像。调节二阶塞曼场  $q$ , 使得原子从 EAP 相转化到 EPP 相。在 EPP 相中, 单荷涡旋不稳定, 转化为两个 HQV, (f-h) 是转化到 EAP 相的磁化图。我们可以看到在大约 4s 左右的时候, 这两个 HQV 对发生了碰撞, (i-l) 是 5s 后的磁化图像, (m-p) 用图像表达了涡旋的位置, 虚线是传播线, 注意在 (i) 中只能识别一对 HQV 偶极子。这个实验旨在演示 HQV 之间的短程相互作用, HQV 和磁子之间的耦合, 为旋量超流体中涡旋动力学研究提供了新的见解。

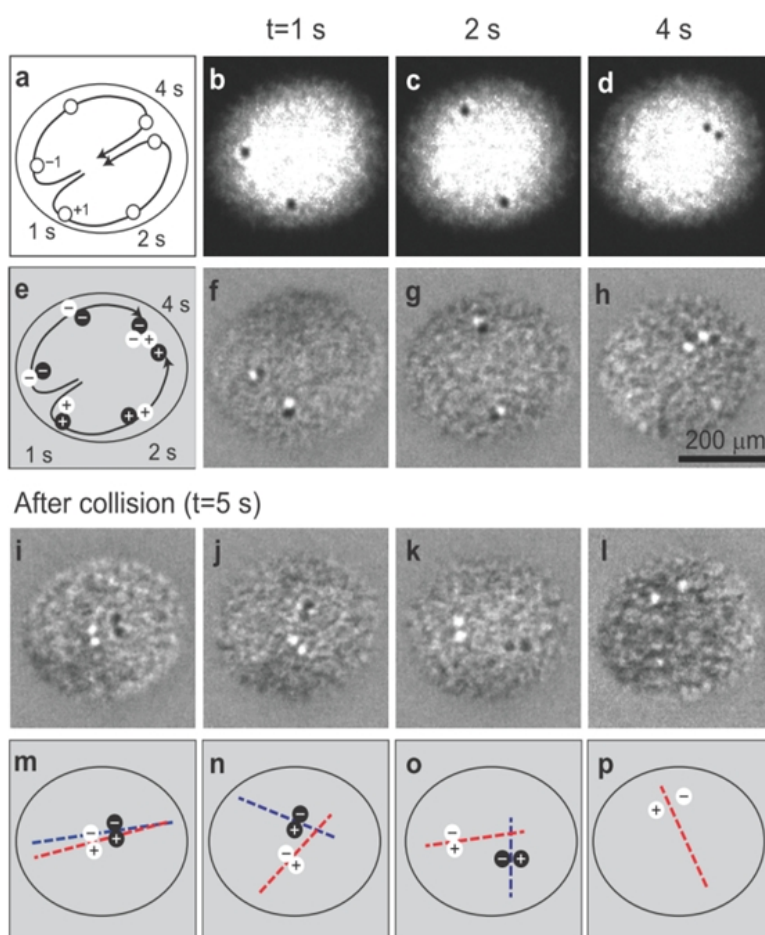


图 1.11 HQV 对的动力学碰撞图[97]。

## 1.4 我们的工作

我们在自旋 1 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体的基态和动力学性质方面，做了以下两方面工作：

首先研究该系统在双势阱中的基态自旋结构和磁过程。双势阱是由一束高度为  $A$  宽度为  $\sigma_0$  的高斯激光与谐振子势叠加形成。我们重点研究在固定双势阱势垒宽度时，增加势垒的高度  $A$  对系统基态的影响，研究发现，薄饼形状的单谐振子势阱所对应的系统自旋涡旋态基态在双势阱系统中变为平行自旋涡旋对  $A < A^*$  和反平行自旋涡旋对  $A > A^*$ 。而且随着外加横向磁场强度的增加，两种自旋涡旋对的涡旋对的涡旋不是同时消失而是逐一移出原子云。

然后，基于我们得到的基态涡旋对，研究它们的碰撞及淬火动力学。当系统制备到自旋涡旋对基态时，突然撤掉双势阱，处在两个势阱中的凝聚体呈现出类似于量子牛顿摆的周期性的碰撞，两种涡旋对在碰撞过程中形成不同的干涉条纹和密度图像，为实验上区分这两种自旋涡旋对提供了依据。系统制备在不同磁化程度的基态之后的磁场淬火动力表明涡旋中心随时间做螺旋运动，涡旋的动力学行为呈现出与纳米磁片系统类似的特征。

## 1.5 本文内容

本文第二章重点介绍自旋 1 偶极旋量 BEC 在无磁场和有磁场情况下的基态性质；第三章介绍系统在双势阱中的基态性质以及磁化过程；第四章介绍耦合自旋涡旋对的碰撞动力学行为和磁场的淬火动力学行为；第五章是对本工作的总结以及对未来工作的展望。

## 第二章 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体

绪论中，介绍了两个冷原子之间的碰撞相互作用，而忽略了原子间的长程偶极相互作用，但是随着研究的深入以及实验技术的提高，研究者们发现偶极相互作用在某些区域内起着举足轻重的作用，所以引起研究者的很大关注。偶极相互作用之所以被忽略，一个很重要原因是跟碰撞相互作用相比它非常的弱。虽然大多数情况下总的碰撞相互作用强度远远大于偶极相互作用强度，但是自旋交换相互作用却不一定很大。特别是对自旋 1 的  $^{87}\text{Rb}$  原子的精细结构，偶极相互作用能够达到自旋交换相互作用的 10%，所以偶极相互作用能在总的自旋相关的相互作用能量中起着重要作用[99-101]。与其它能量相比，自旋相关的相互作用能虽然很小，但是它们在旋量凝聚体的磁性质方面起着举足轻重的作用。

单模近似是一个应用广泛的理论工具[35]，它假设不同自旋态的空间部分是相同的，但是当偶极相互作用很大的时候，单模近似不再适用，因为各个自旋态的空间分布开始不同，并且出现了不同结构的自旋纹理。由于单模近似具有一定的局限性，平均场理论成为了理论工作者研究旋量 BEC 通常使用的方法，通过变分法可以得到不同自旋波函数的耦合 GP 方程。易俗和尤力率先采用赝势方法将偶极相互作用纳入了描述凝聚体的 GP 方程。由于偶极旋量 BEC 的非局域 GP 方程没有解析解，人们一般采用数值方法如虚时演化或者近似方法来求解。

本章介绍自旋 1 偶极旋量 BEC 系统的基本理论。首先介绍单模近似下系统的哈密顿量，以及单模近似的适用范围，其次介绍平均场近似下的基态相图、自旋结构以及磁场对平均场基态的影响，最后介绍偶极旋量 BEC 系统中的 Einstein-de Haas 效应及所使用的数值计算方法。

### 2.1 单模近似下的偶极相互作用

考虑凝聚体由  $N$  个自旋 1 的原子组成，囚禁在轴对称的谐振子势阱(1.1.1)中。原子之间的相互作用既包括短程的碰撞相互作用，又包括长程的磁偶极相互作用，系统总的哈密顿量可以表示为

$$H = H_s + H_{col} + H_{dd} \quad (2.1.1)$$

其中自旋交换相互作用能和偶极相互作用能的竞争关系是我们研究自旋结构的基础。

系统的总哈密顿量(2.1.1)相当复杂,所以要设法简化它。首先介绍单模近似,假设所有自旋分量都具有相同的空间波函数,系统场算符的形式为

$$\hat{\psi}_\alpha = \phi(\mathbf{r})\hat{a}_\alpha, \quad (2.1.2)$$

$\phi(\mathbf{r})$ 是归一化的自旋无关的空间波函数。单模近似下系统的哈密顿量为[35]

$$\begin{aligned} H_{SMA} = & \int d\mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r})h_0\phi(\mathbf{r})\hat{N} - g_F\mu_B\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{L}} \\ & + \frac{c_0}{2} \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 \hat{N}(\hat{N}-1) + \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 (\hat{\mathbf{L}}^2 - 2\hat{N}) \\ & + \frac{c_d}{4} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}')|^2 \frac{1-3\cos^2\theta_e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (-\hat{\mathbf{L}}^2 + 3\hat{L}_z^2 + 3\hat{n}_0 - \hat{N}), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

其中  $\hat{N} = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$  是总粒子数密度算符,  $\hat{n}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$  是自旋 0 分量的粒子数密度算符,  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{a}_\alpha^\dagger \mathbf{F}_{\alpha\beta} \hat{a}_\beta$  是总自旋角动量算符,  $\theta_e$  是极角。在孤立系统中原子的总粒子数为常数,可以忽略掉只与  $\hat{N}$  有关的相互作用项,系统哈密顿量可以简化为

$$H_{SMA} = (c'_2 - c'_d)\hat{\mathbf{L}}^2 + 3c'_d(\hat{L}_z^2 + \hat{n}_0) - g_F\mu_B\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{L}}, \quad (2.1.4)$$

其中两个系数分别定义为

$$c'_2 \equiv \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4, \quad (2.1.5)$$

$$c'_d \equiv \frac{c_d}{4} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}')|^2 \frac{1-3\cos^2\theta_e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \quad (2.1.6)$$

将空间波函数  $\phi(\mathbf{r})$  设为谐振子势阱  $U(\mathbf{r})$  下单粒子的基态,如

$$\phi(\mathbf{r}) = \lambda^{1/4} \pi^{-3/4} e^{-(x^2+y^2+\lambda z^2)/2}, \quad (2.1.7)$$

这里采用谐振子特征长度为长度单位,可得到  $c'_d$  的解析表达式

$$c'_d = \frac{c_d \sqrt{\lambda}}{6\sqrt{2\pi}(\lambda-1)} \left( 2\lambda + 1 - 3\lambda \frac{\tan^{-1}\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda-1}} \right). \quad (2.1.8)$$

图 2.1 表示  $c_d = 1$  时,  $c'_d$  随  $\lambda$  的变化,从而得出  $c'_d$  对谐振子势阱几何形状的依赖关系:

$$c'_d \begin{cases} < 0, & \text{扁长势阱} (\lambda < 1) \\ = 0, & \text{球形势阱} (\lambda = 1), \\ > 0, & \text{扁平势阱} (\lambda > 1) \end{cases} \quad (2.1.9)$$

为我们改变系统的性质甚至诱导相变提供了一个方便可控制的手段。



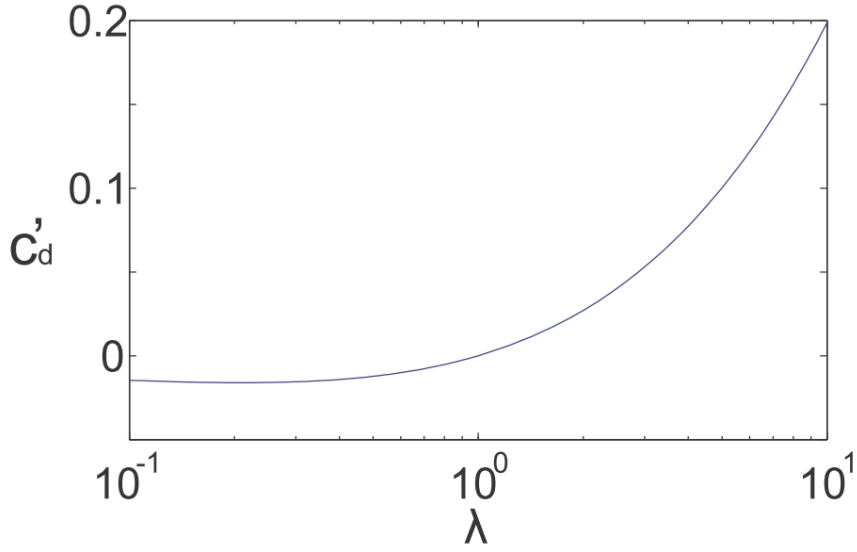


图 2.1  $c_d = 1$  时有效偶极相互作用与势阱压缩比  $\lambda$  的关系[35]。

单模近似的最主要思想就是将空间部分与自旋部分分开研究，在单模近似下，归一化的自旋密度矢量不随空间变化，对应于纳米磁体中的单畴态。显然单畴态对应短程相互作用的基态，但是一般都不能最小化长程的偶极相互作用能。可见对于自旋交换相互作用占主导的系统，自旋单畴态是稳定的。但是一旦超出单模近似区域，较强的偶极相互作用与自旋交换相互作用竞争，表现为自旋单畴态变得不稳定，系统基态变成其它的自旋与空间相关的磁序态。

## 2.2 自旋纹理

### 2.2.1 平均场理论

当偶极相互作用比较大时，单模近似不再适用，可以采用平均场近似，系统的能量泛函变为

$$\begin{aligned}
 E[\psi_m, \psi_m^*] = & \int d\mathbf{r} \left[ -\frac{\hbar^2 (\nabla \psi_m^*) (\nabla \psi_m)}{2M} + U(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}) - g_F \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \right] \\
 & + \int d\mathbf{r} \left[ \frac{c_0 n^2(\mathbf{r})}{2} + \frac{c_2 \mathbf{S}^2(\mathbf{r})}{2} \right] \\
 & + \frac{c_d}{2} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} [\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') - 3(\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e})(\mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e})],
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

最小化能量泛函(2.2.1)要求

$$\frac{\delta E[\psi_m, \psi_m^*]}{\delta \psi_m^*} = 0, \quad (2.2.2)$$

可以得到波函数  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$  满足的一系列耦合偏微分方程组

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= [h_0 - g_F \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_{1\beta} \psi_\beta + c_0 n + c_2 S_z + c_d D_z] \psi_1 + [c_2 S_- + c_d D_-] \psi_0, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} &= [h_0 - g_F \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_{0\beta} \psi_\beta + c_0 n] \psi_0 + (c_2 S_+ + c_d D_+) \psi_1 + [c_2 S_- + c_d D_-] \psi_{-1}, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_{-1}}{\partial t} &= [h_0 - g_F \mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_{-1\beta} \psi_\beta + c_0 n - c_2 S_z - c_d D_z] \psi_{-1} + [c_2 S_+ + c_d D_+] \psi_0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

其中积分算符  $D_i$  的表达式为

$$D_i(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} [\mathbf{S}_i(\mathbf{r}') - 3e_i \mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}]. \quad (2.2.4)$$

系统的基态可以通过求解 GP 方程组(2.2.3)来得到，当然解这个方程组并没有解析解，需要通过数值求解，一般采用虚时演化的方法得出系统的基态，其中积分算符  $D_i$  用卷积定理和傅里叶变换处理。

### 2.2.2 无磁场平均场相图

2006 年易裕和蒲晗最先通过求解平均场近似下的 GP 方程，分别得到了无磁场时铁磁 ( $^{87}\text{Rb}$ ) 和反铁磁 ( $^{23}\text{Na}$ ) 自旋 1 偶极 BEC 的基态相图[102]，图 2.2 (a) 表示没有外磁场时，自旋交换相互作用为铁磁相互作用 ( $c_2 < 0$ ) 时的基态相图，密度相互作用与自旋交换相互作用系数的比值设为  $c_2 / c_0 = -0.01$ 。相图的横轴为谐振子势阱的横纵压缩比  $\lambda$ ，纵轴  $\eta$  表示偶极相互作用与自旋交换相互作用强度的比值  $\eta \equiv c_d / |c_2|$ 。2.2 (b) 为没有磁场时，自旋交换相互作用为反铁磁相互作用 ( $c_2 > 0$ ) 时的基态相图，实验上测得的  $^{23}\text{Na}$  真实参数为  $c_2 / c_0 \approx 0.03$ 。

从相图可得，在单模近似适用区域，根据归一化自旋密度矢量  $\mathbf{s}$  的性质，铁磁相的相图还可以分为 SMA-I, II 和 III。当势阱为扁圆形状时 ( $\lambda > 1$ )， $\mathbf{s} \perp \mathbf{z}$ ；当势阱为细长的雪茄形时 ( $\lambda < 1$ )， $\mathbf{s} \parallel \mathbf{z}$ ；对于反铁磁系统，还出现了自旋消失的情况，即  $\mathbf{s} = 0$ 。

当势阱变得越来越扁 ( $\lambda$  值越大) 时，偶极相互作用占据重要地位，这与磁性材料的情况一致。也就是说，虽然偶极相互作用在大体积的磁性材料中弱到可以忽略不计，但是在磁薄片材料形成的二维系统中将起着关键作用[103]。

在微磁学上，单模近似适用于单畴区域，在此区域自旋交换相互作用占据主导

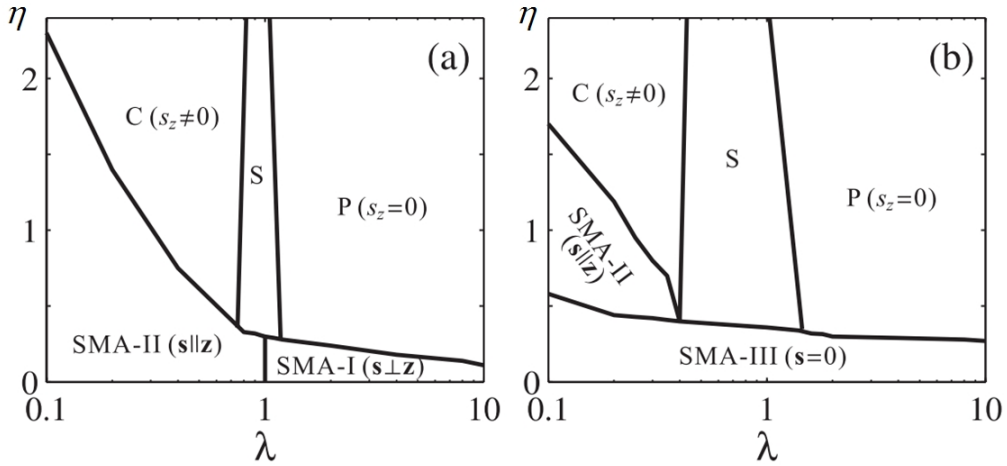


图 2.2 自旋 1 偶极旋量 BEC 的基态相图。(a) 自旋交换相互作用为铁磁相互作用( $c_2 < 0$ ); (b) 自旋交换相互作用为反铁磁相互作用( $c_2 > 0$ )。标记为 SMA-I, II 和 III 的区域表示单模近似适用区域[35]。

地位[56]。随着  $\eta$  的增加，单模近似不再适用，因为在大  $\eta$  区域，偶极相互作用在所有自旋相关的相互作用中占据统治地位，而这时铁磁和反铁磁相互作用之间的差别并不显得那么重要。根据势阱的形状，非单模区域可以分为三种不同相，薄饼，雪茄和球状相，简写为 P, C 和 S。

首先介绍 P 相，图 2.3 表示一个典型的 P 相的自旋在  $x$ - $y$  平面的分布。当凝聚体被囚禁在薄饼状的势阱中，其基态自旋平躺在  $x$ - $y$  平面上，占主导的偶极相互作用迫使原子的自旋自发形成涡旋结构。假设系统的基态波函数可以表示为

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sqrt{n_\alpha(\mathbf{r})} e^{i\Theta_\alpha(\mathbf{r})}, \quad (2.2.5)$$

其中  $n_\alpha(\mathbf{r}) = |\psi_\alpha|^2$  是第  $\alpha$  个自旋分量的密度，

$$\Theta_\alpha(\mathbf{r}) = \omega_\alpha \varphi + \vartheta_\alpha \quad (2.2.6)$$

是相应的相位，这里  $\omega_\alpha$  是绕数 (winding number)， $\varphi$  是极角， $\vartheta_\alpha$  是一个常数相移。绕数表示绕  $z$  轴转一圈波函数的相位变化  $\omega_\alpha \times 2\pi$ 。特别值得注意的是，自旋涡旋态的波函数的绕数满足下面的特殊关系

$$\langle \omega_1, \omega_0, \omega_{-1} \rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle. \quad (2.2.7)$$

从图 2.4 可以看出，自旋 1 分量和自旋 -1 分量有着相同的密度，也就是说

$$n_1(\mathbf{r}) = n_{-1}(\mathbf{r}), \quad (2.2.8)$$

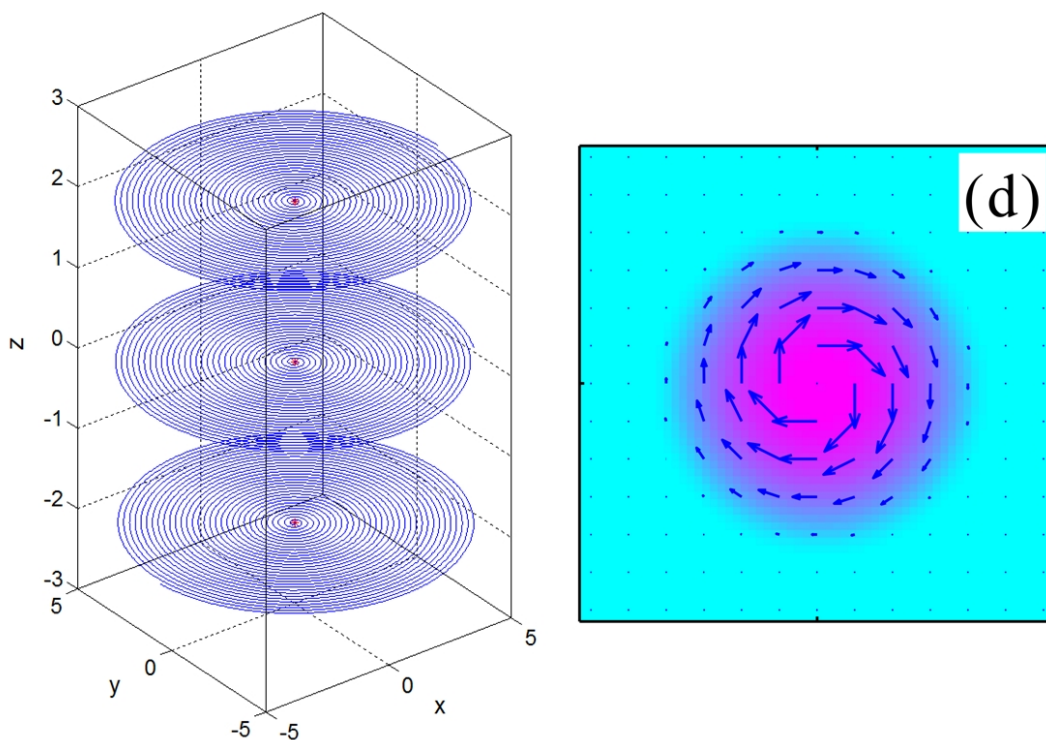


图 2.3 P 相的自旋结构。(a)表示薄饼形的偶极旋量凝聚体自旋结构的流线表示(streamline), 在这个区域, 每一层的自旋结构都一样, 自发地形成自旋涡旋态, 且自旋都躺在平面上, 故在  $z$  轴上的投影为 0。(b)薄饼形状的凝聚体的自旋结构在  $z = 0$  平面上的分布[35]。

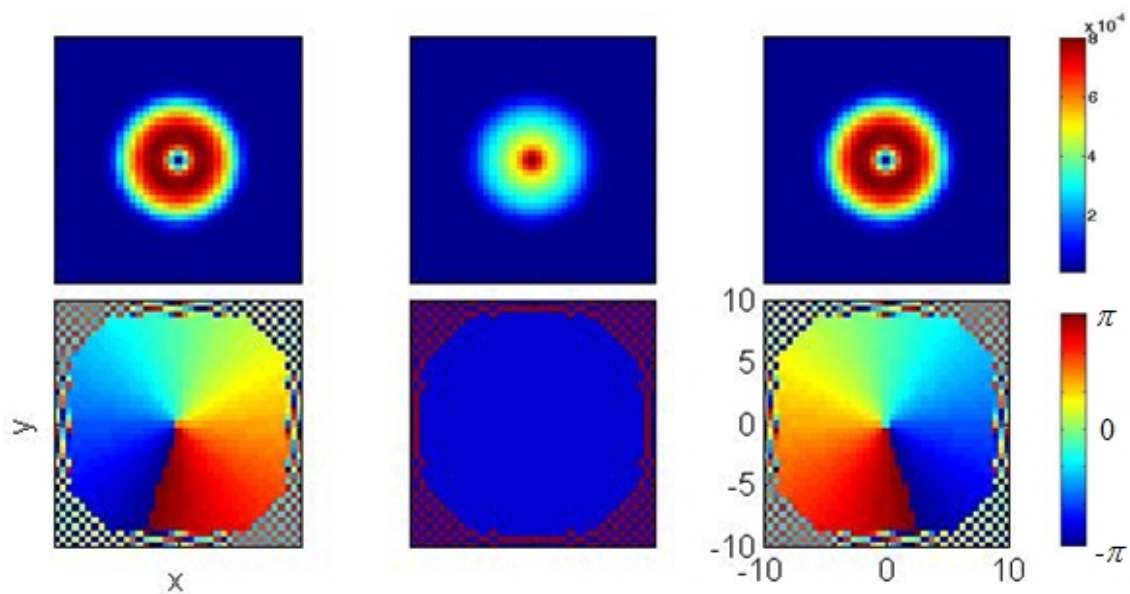


图 2.4 上图和下图分别表示铁磁相互作用下 P 相三个自旋分量的密度和相位在  $z = 0$  平面上的分布, 其中  $\lambda = 2$  和  $\eta = 1$ 。从左到右分别表示自旋分量为 1, 0, -1。从相位变化得出自旋 1 和自旋 -1 分量绕着  $z$  轴旋转, 但方向相反, 自旋 0 分量相位不变。

但是这两个分量上绕数是相反的,即自旋 1 分量的相位沿一个闭合曲线从  $-\pi$  到  $\pi$  顺时针变化,而自旋-1 分量逆时针变化,自旋 0 分量的相位为一个常数。图 2.5 表示自旋涡旋态的密度在  $x$  轴上的分布,可以看出自旋 1 和-1 分量的密度在  $x$  轴上的分布完全重合,而且在  $x=0$  的位置,密度被自旋 0 分量占据,其余两个分量的占据数为 0。

自旋涡旋态跟磁片中的磁涡旋态非常相似,但是它们有一个很大的不同,即为了减小涡旋中心的交换能,磁涡旋中心的磁矩垂直于磁片所在的平面。然而,在旋量凝聚体中,不受局域磁化守恒的约束,所以在涡旋中心的自旋很自然的消失了。事实上,涡旋中心的区域是被自旋为 0 的分量占据,其它两个分量在涡旋中心的占据数为 0。

将式(2.2.5)-(2.2.8)带入自旋密度矢量  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  的定义(1.1.21)式中,可以得到其  $x$  分量为

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* (\psi_1 + \psi_{-1}) + \psi_{-1}^* \psi_0] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n_0 n_1} [e^{i(\Theta_0 - \Theta_1)} + e^{i(\Theta_1 - \Theta_0)} + e^{i(\Theta_{-1} - \Theta_0)} + e^{i(\Theta_0 - \Theta_{-1})}] \\
&= \sqrt{2} \sqrt{n_0 n_1} [\cos(\Theta_0 - \Theta_1) + \cos(\Theta_0 - \Theta_{-1})] \\
&= \sqrt{2} \sqrt{n_0 n_1} [\cos(\vartheta_0 + \varphi - \vartheta_1) + \cos(\vartheta_0 - \varphi - \vartheta_{-1})] \quad (2.2.9) \\
&= \sqrt{2} \sqrt{n_0 n_1} \left[ \cos\left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_{-1}}{2} + \varphi - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{-1}}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \cos\left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_{-1}}{2} - \left(\varphi - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{-1}}{2}\right)\right) \right] \\
&= f(\mathbf{r}) \cos(\varphi - \delta),
\end{aligned}$$

其中

$$f(\mathbf{r}) = 2\sqrt{2n_0 n_1} \cos\left[\vartheta_0 - \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_{-1})}{2}\right], \quad (2.2.10)$$

以及  $\delta = (\vartheta_1 - \vartheta_{-1})/2$ 。另外,相角满足条件

$$\vartheta_0 - \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_{-1}) = 0 \quad (2.2.11)$$

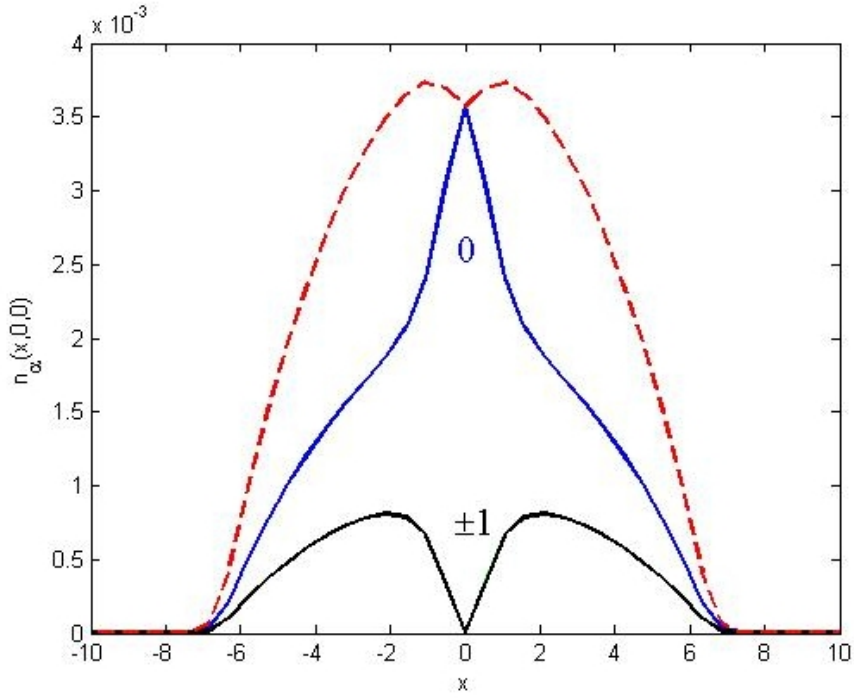


图 2.5 铁磁相互作用下 P 相的三个自旋分量在  $x$  轴上的密度分布，虚线表示总自旋密度分布。

同理可得到自旋密度矢量的其它两个分量，于是

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = f(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \delta) \\ \sin(\varphi - \delta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.12)$$

该自旋结构也称为无核 skyrmion。旋量凝聚体可以用一个包含振幅和相位的宏观波函数来表示，在自旋 1 和自旋 -1 分量的密度中心存在一个奇点，而相位的变化物理上表示为速度的变化。在量子力学中，空间非均匀的单粒子波函数的相位与粒子的速度的关系为：

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\hbar}{M} \nabla \Theta_\alpha. \quad (2.2.13)$$

总之，在自旋涡旋态，即 P 相，自旋 1 分量和 -1 分量的自旋绕着  $z$  轴旋转，但是旋转方向相反，而自旋 0 分量，由于绕数  $\omega_0 = 0$ ，静止不动，由此会产生一个净自旋流，但是没有质量流。

在一个雪茄型势阱中，系统基态为图 2.1 中的 C 相，局域原子的自旋大部分都

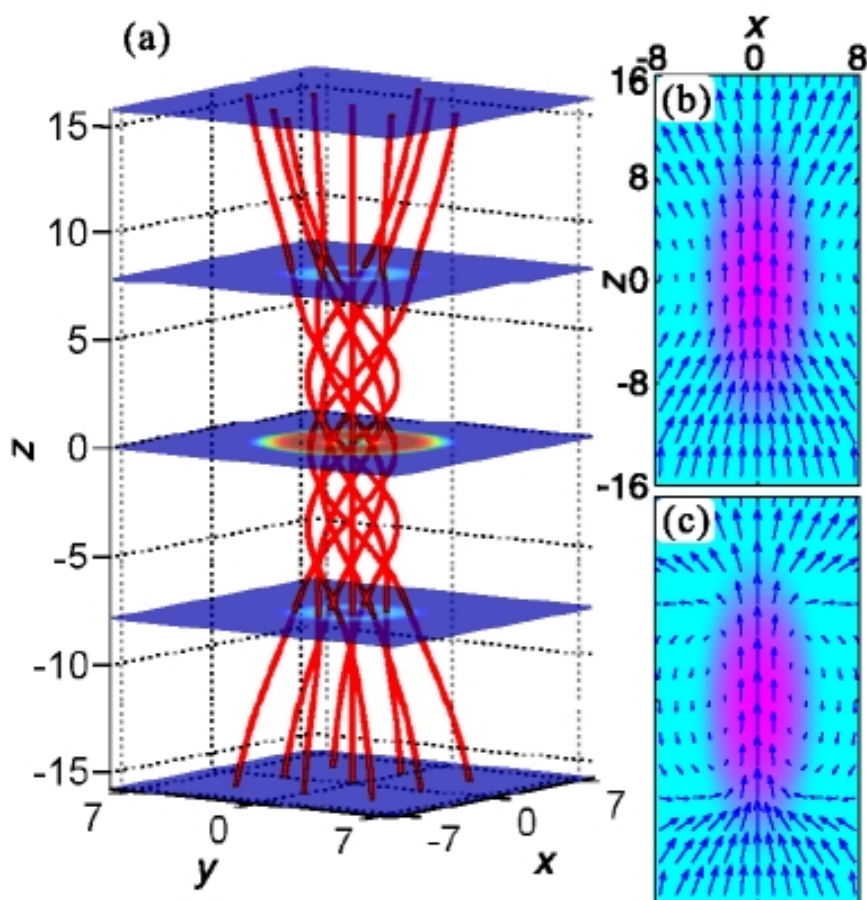


图 2.6 C 相的自旋结构。(a) 红色的线表示雪茄型的偶极旋量凝聚体自旋结构的流线表示 (streamline), 在这个区域, 自旋主要沿  $z$  轴方向而且形成一个螺旋的图形。剖面上的颜色表示  $|\mathbf{S}_\perp|$  的分布, 其中  $\lambda = 0.4$ ,  $\eta = 1.6$ 。(b) 自旋密度矢量在  $x$ - $z$  平面的分布, (a) 与 (b) 的参数一样。(c) 和 (b) 的相互作用参数相同除了  $\eta = 6$  [35]。

朝向  $z$  轴的方向。在这种情况下, 大部分自旋形成首尾相接的自旋结构, 而使偶极相互作用能最小化。这种情况下的波函数的相位虽然也能表示成式(2.2.6)的形式, 但是三分量对应的绕数不同

$$\langle \omega_1, \omega_0, \omega_{-1} \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle. \quad (2.2.14)$$

而且, 相移  $\vartheta_\alpha$  不再是一个常数, 而是一个关于  $z$  的函数。那么, 按(2.2.9)同样的方法计算的 C 相的自旋密度矢量的形式变成了

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \Delta \cos(\varphi + \delta) \\ -\Delta \sin(\varphi + \delta) \\ n_1 - n_{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$



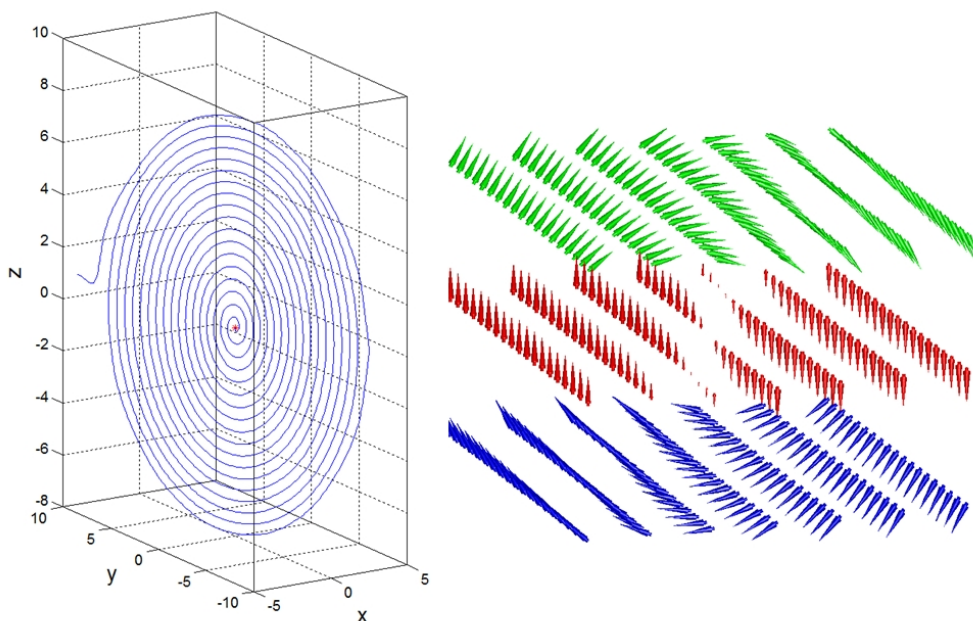


图 2.7 S 相的自旋结构。(a)表示球形的偶极旋量凝聚体自旋结构从原点出发的流线表示 (streamline), (b)表示在  $z > 0$ ,  $z = 0$  和  $z < 0$  三个平面内自旋结构的三维表示。

其中  $\Delta \equiv \sqrt{2n_0}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_{-1}})$ , 自旋扭转角定义为  $\delta(z) \equiv \varphi_0(z) - \varphi_1(z)$ , 它随  $z$  单调递增, 而且满足  $\delta(z=0) = 0$ 。图 2.6 (a) 是 C 相的典型的自旋结构, 可以看到自旋绕着  $z$  轴旋转形成螺旋结构。图 2.6 (b) 和 (c) 表示在自旋平面  $\mathbf{S}_{\parallel} \equiv (S_x, S_z)$  的相应的自旋结构, 看起来类似于一个条形磁铁。

位于 P 相和 C 相中间的 S 相, 其势阱形状近似于球形, 即  $\lambda \approx 1$ 。S 相的一个显著的特征是空间波函数的柱对称性被破坏, 这就意味着  $n_{\alpha}$  不再是对称的。图 2.7 给出一个典型的 S 相的自旋结构, 可以看出自旋结构不是柱对称的, 而且两边的自旋结构还出现  $180^\circ$  的畴壁。

## 2.3 外磁场中的自旋涡旋态

综上所述, 偶极相互作用在薄饼状结构的凝聚体中起着重要的作用, 其基态为自旋涡旋态。下面针对自旋涡旋态, 研究外加磁场 (横向和纵向) 的影响, 这对研究耦合自旋涡旋对在磁场中的基态和磁场淬火动力学具有重要意义。

### 2.3.1 外加纵向磁场

首先考虑当外加的磁场沿着量子化  $z$  轴时, 自旋涡旋态的变化。图 2.8 表示的



是  $z$  方向的磁化强度  $M_z$  随磁场强度  $B_z$  的变化。可以看到  $M_z$  的大小随着  $B_z$  单调递增。这里由于自旋 1 的碱金属原子的精细结构  $g_F = -1/2 < 0$ ，所以  $M_z$  是负值。然而在磁场强度的变化过程中存在临界磁场  $B_z^*$ ，在这个临界点， $M_z$  出现了突然跳跃，这意味着系统存在一阶相变。由图 2.9 可以得出，这个临界磁场强度依赖于谐振子势阱的纵横比  $\lambda$ 、总粒子数  $N$  以及偶极相互作用的强度  $\eta$ 。

在均匀磁场下波函数  $\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sqrt{n_\alpha(\mathbf{r})} e^{i\Theta_\alpha(\mathbf{r})}$  的相位  $\Theta_\alpha$  依然能写成式(2.2.6)的形式，而且依然满足关系(2.2.11)。研究发现当  $B_z < B_z^*$  时， $\Theta_\alpha$  是常数，但是当  $B_z > B_z^*$  时， $\Theta_\alpha$  变成了  $z$  的函数，如图 2.10 所示。过了临界磁场，自旋三分量的绕数也发生了变化，如

$$\langle \omega_1, \omega_0, \omega_{-1} \rangle = \begin{cases} \langle -1, 0, 1 \rangle, & B_z < B_z^* \\ \langle -2, -1, 0 \rangle, & B_z > B_z^* \end{cases} \quad (2.3.1)$$

则局域自旋密度矢量的形式变为

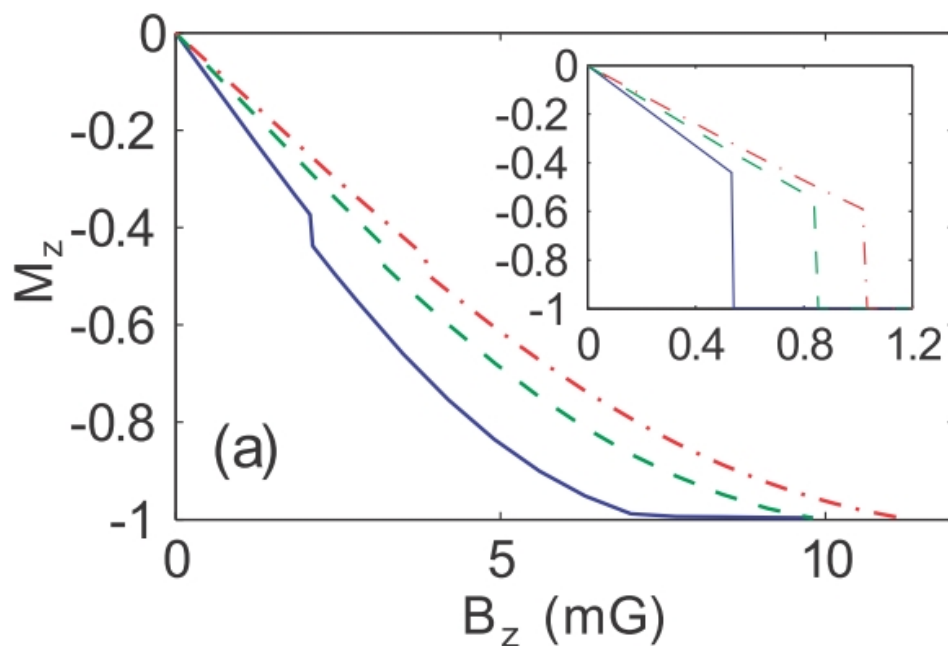


图 2.8 自旋涡旋态在  $z$  方向的磁化强度  $M_z$  随外加纵向磁场强度的变化。不同的线型分别表示  $\lambda = 4$  (实线),  $6$  (虚线),  $8$  (点划线) 时的情况, 其中  $\eta = 0.5$ ,  $N = 1.5 \times 10^6$ 。插图表示  $^{87}\text{Rb}$  真实偶极相互作用参数下的图像,  $\eta = 0.09$  [35]。

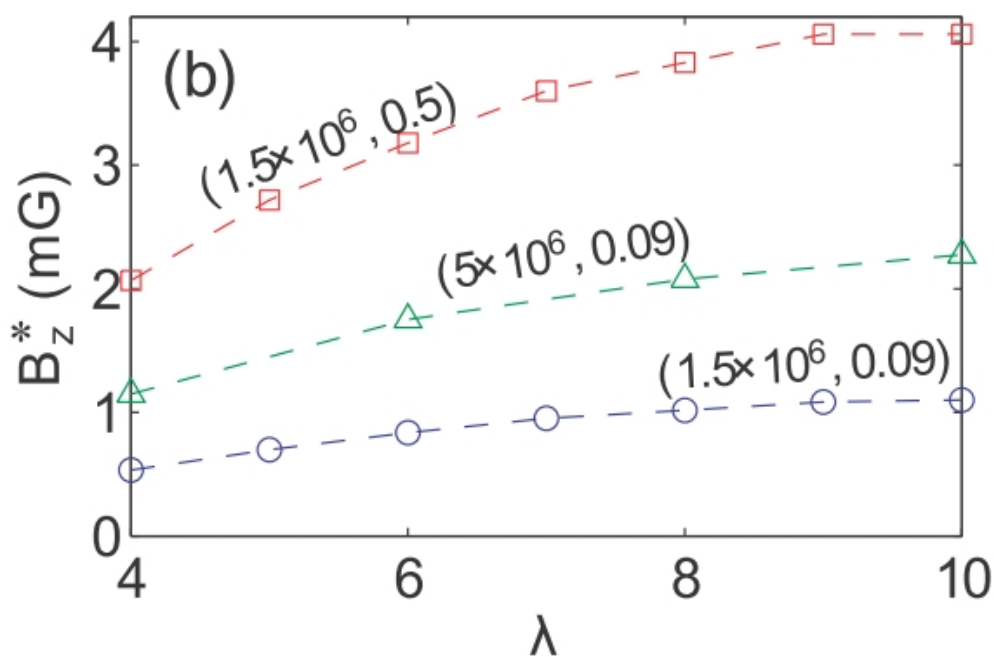


图 2.9 在不同的参数  $(N, \eta)$  下, 临界磁场随谐振子势阱的压缩比  $\lambda$  的变化[35]。

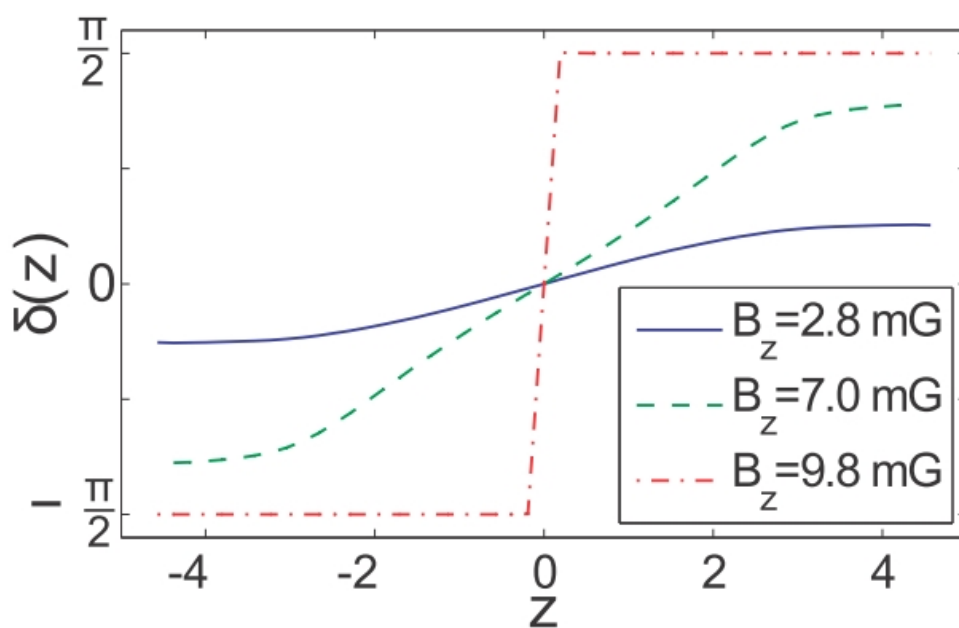


图 2.10 当  $\eta = 0.5$  以及  $N = 1.5 \times 10^6$  时, 不同磁场下, 自旋扭转角  $\delta$  随空间  $z$  轴的变化。空间的单位是  $\sqrt{\hbar / M\omega_{\perp}}$  [35]。

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2n_0} (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_{-1}}) \sin(\varphi - \delta) \\ -\sqrt{2n_0} (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_{-1}}) \cos(\varphi - \delta) \\ n_1 - n_{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.3.2)$$

其中  $\delta = \vartheta_1 - \vartheta_0 - \pi/2$ 。当  $B_z < B_z^*$  时,  $\delta = 0$ , 当  $B_z > B_z^*$  时,  $\delta$  是  $z$  的函数, 如图 2.10。

### 2.3.2 外加横向磁场

外加横向磁场情况下, 薄饼状偶极旋量 BEC 中形成的自旋涡旋态中心会发生移动。随着磁场强度的增大, 自旋涡旋态的涡旋中心会沿着垂直于外加磁场的方向外移, 直至移出原子云, 此时原子全部被极化到沿着横向磁场的方向。如图 2.11 所示, 当没有磁场时, 磁涡旋态的中心在  $z = 0$  平面的中心 (左图), 当沿着  $x$  轴正方向加一个外磁场  $B_x$ , 涡旋中心开始向  $y$  轴正方向偏移 (中间图), 当  $B_x$  强度足够大时, 原子自旋被极化, 全部朝向  $x$  轴正方向 (右图)。这个现象与纳米磁片中磁涡旋动力学行为非常类似, 第三章我们还会详细介绍使用冷原子系统来模拟纳米多层磁片, 进而研究耦合涡旋的基态磁性质以及磁场淬火动力学性质。

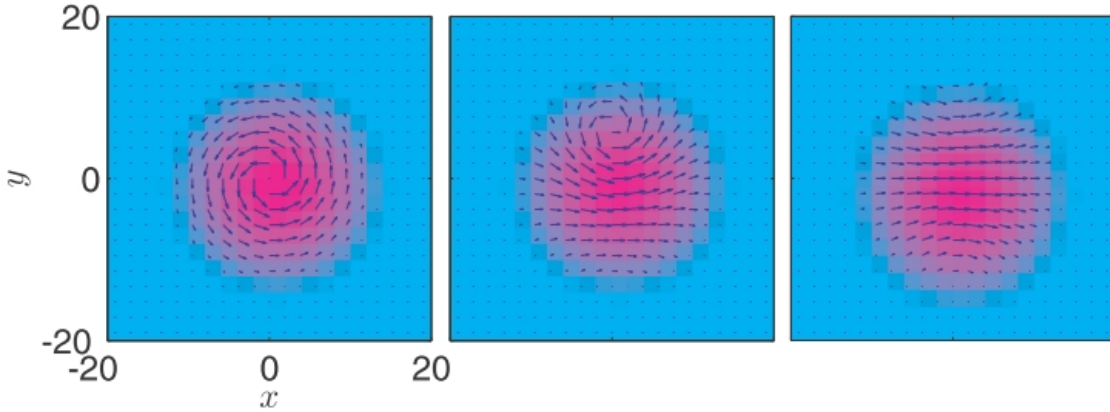


图 2.11 当  $\eta = 0.5$ ,  $N = 1.5 \times 10^6$  以及  $\lambda = 4$  时, 自旋涡旋在不同强度的横向磁场  $B_x$  下,  $z = 0$  平面的基态自旋结构。从左到右对应的磁场分别为  $B_x = 0, 14.3, 42.9 \mu G$  [35]。

## 2.4 Einstein-de Haas 效应

下面考虑外磁场突然为 0 时偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体的动力学行为。首先将凝聚体制备在有外磁场的极化态, 然后突然撤掉外磁场, 观察系统的动力学行为。在无外磁场存在时, 由于系统的总自旋守恒, 所以自旋极化态是稳定的。但是, 当

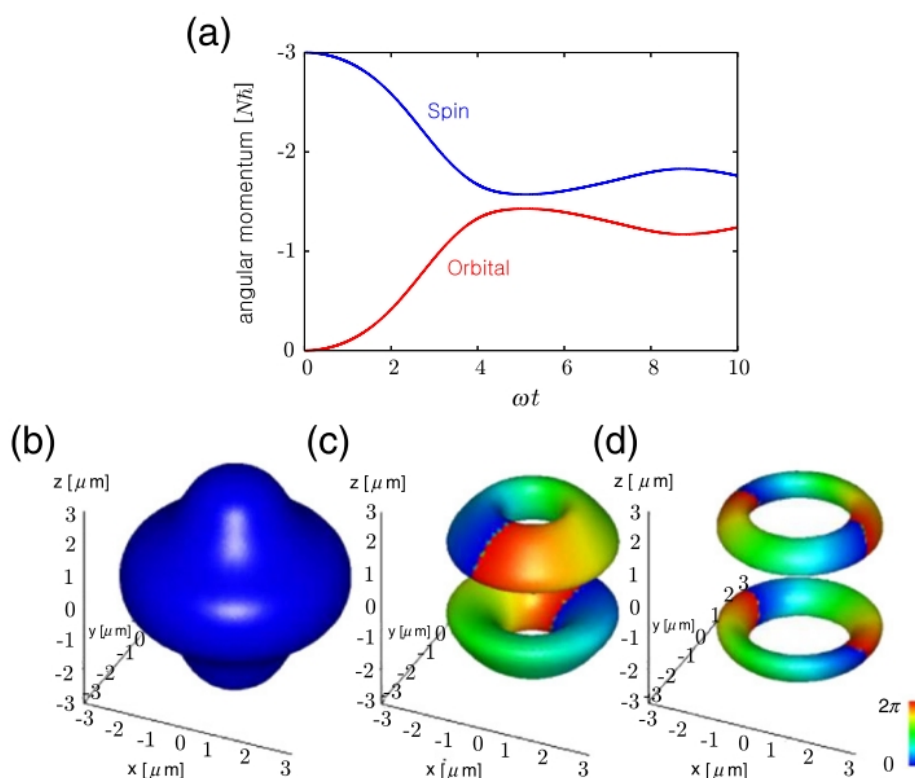


图 2.12 (a) 由于 Einstein–de Haas 效应引起的自旋角动量和轨道角动量随时间的变化。计算用的是囚禁在球形谐振子势阱中的  $^{52}\text{Cr}$  玻色爱因斯坦凝聚体，对应的谐振子频率为  $\omega = 2\pi \times 820\text{Hz}$ 。(b) - (d) 分别表示  $\psi_{-3}$ ， $\psi_{-2}$  以及  $\psi_{-1}$  在  $\omega t = 2$  时刻的等密度面。表面的颜色表示相应序参量的相位[105]。

系统存在偶极相互作用时，情况变得大大不同，因为偶极相互作用和自旋角动量不对易，它只与系统的总角动量（自旋角动量与轨道角动量之和）对易。这是因为偶极相互作用包含自旋轨道耦合项，导致它在自旋空间不是旋转不变的。另一方面，由于偶极相互作用同时在自旋空间和坐标空间旋转保持不变，所以偶极相互作用对系统的总角动量还是守恒的。偶极相互作用能引起自旋弛豫现象，使得角动量可以在自旋和轨道之间转化；一旦自旋角动量松弛，凝聚体就开始做旋转运动。这种现象称为玻色爱因斯坦凝聚体中的 Einstein–de Haas 效应。

文献[104, 105]研究了  $^{52}\text{Cr}$  原子凝聚体的 Einstein–de Haas 效应。图 2.12 展示了自旋角动量和轨道角动量随时间的演化，初始态的自旋被极化在精细能级  $\alpha = -3$  上，随着时间的推移，在自旋角动量减小的同时伴随着轨道角动量的增加，而系统的总角动量守恒。

自旋 1 的  $^{87}\text{Rb}$  凝聚体是铁磁性的，其自旋极化态很稳定。所以在这种情况下，

如果在与自旋极化方向相反的方向加一个外磁场，转动动能和线性塞曼能可以通过偶极相互作用发生共振，进而导致 Einstein–de Haas 效应[106]。此外，研究预测，通过一个振荡磁场，自旋 1 的  $^{87}\text{Rb}$  凝聚体中会发生共振增强现象[107]。当凝聚体倾向于无磁化态时，自旋极化态本身就不稳定，所以在低磁场下，就会有明显的 Einstein–de Haas 效应产生，如自旋 1 的  $^{23}\text{Na}$  玻色爱因斯坦凝聚体或者自旋 3 的  $^{52}\text{Cr}$ 。由偶极相互作用引起的自旋弛豫在  $^{52}\text{Cr}$  原子中已经被观察到，会导致  $^{52}\text{Cr}$  原子的热气体[108]和凝聚体[109]的热化，而这种热化在光晶格[110]或者超低磁场下会被压制[111]。

## 2.5 数值方法简介

2.3 节已经得到平均场近似下偶极旋量 BEC 的 GP 方程(2.2.3)，通过求解这个方程组，就可以得到系统的基态以及动力学演化行为。上述方程中含有原子质量，普朗克常数以及相互作用系数等参数，形式较为繁琐，故为方便起见首先要对以上方程组做无量纲化处理，当求解完成后，如要得到原来物理量可以通过参数逆变换来还原。由于外势阱选择的是对称的谐振子势阱，所以在数值计算过程中采用谐振子的特征单位会大大简化计算。如：长度单位为  $\ell_{\perp} = \sqrt{\hbar / M\omega_{\perp}}$ ，能量单位为  $\hbar\omega_{\perp}$ ，时间单位为  $\omega_{\perp}^{-1}$ 。另外，波函数变为  $\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sqrt{N / \ell_{\perp}^3} \phi_{\alpha}(\mathbf{r})$ ，相应的 GP 方程(2.2.3)变为：

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= (\bar{h}_0 + \bar{c}_0 n + \bar{c}_2 S_z + \bar{c}_d D_z) \phi_1 + (\bar{c}_2 S_- + \bar{c}_d D_-) \phi_0, \\ 2i \frac{\partial \phi_0}{\partial t} &= (\bar{h}_0 + \bar{c}_0 n) \phi_0 + (\bar{c}_2 S_+ + \bar{c}_d D_+) \phi_1 + (\bar{c}_2 S_- + \bar{c}_d D_-) \phi_{-1}, \\ 2i \frac{\partial \phi_{-1}}{\partial t} &= (\bar{h}_0 + \bar{c}_0 n - \bar{c}_2 S_z - \bar{c}_d D_z) \phi_{-1} + (\bar{c}_2 S_+ + \bar{c}_d D_+) \phi_0, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

其中  $\bar{h}_0 = -\nabla^2 + (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)$ ， $n = \sum_{\alpha} |\phi_{\alpha}|^2$ ， $\int n d\mathbf{r} = 1$ ，无量纲的相互作用系数分别为

$$\begin{aligned} \bar{c}_0 &= \frac{8\pi N (a_0 + 2a_2)}{3\ell_{\perp}}, \\ \bar{c}_2 &= \frac{8\pi N (a_2 - a_0)}{3\ell_{\perp}}, \\ \bar{c}_d &= \frac{NM \mu_0 \mu_B^2 g_F^2}{2\pi \hbar^2 \ell_{\perp}}. \end{aligned}$$

### 2.5.1 虚时演化

虚时演化方法, 经常被用来求解 GP 方程的基态, 它可以将虚数方程转化成实数方程来解。由于波函数是一个复数, 所以一个简单可行的方法就是把波函数写成两部分, 实部和虚部, 其中  $S_z$  和  $D_z$  是实数。虚实演化的一般的方法是将无量纲的 GP 方程中的  $it$  用实数表示, 然后将方程写成实部和虚部两个, 则一个方程就可以分成两个方程, 方程(2.5.1)就分成了六个, 而且这六个方程都是实数方程。但是虚时演化的一个缺点是不能做动力学演化, 而且在求基态的过程中每演化一部都要对波函数进行归一化。随着时间的变化, 当上下时刻的系统的总能量之差接近于 0 时 (程序上由于没有绝对的 0, 姑且认为达到  $10^{-15}$  就可以了), 就认为达到了系统的基态。原则上说, 虚时演化的初态是可以随便选的, 但是有时候选择一个好的初态能够大大缩短系统收敛的时间。而对于有偶极相互作用的三维系统, 系统收敛就会变得很慢, 而且基态和激发态的能级差很小, 所以系统很有可能收敛到一个局域最小值上, 这就需要在计算前根据系统的参数, 大概地猜测系统有可能的基态, 最后比较演化后系统的总能量, 能量最低则对应于系统的基态, 这样可以有效地避免基态落在次能级上。

### 2.5.2 时间劈裂傅里叶谱方法

对于一个的含时演化方程, 其一般形式为

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = (A + B)u. \quad (2.5.2)$$

$A$  和  $B$  是两个算符,  $u$  是系统波函数。如果给定时间步长  $\Delta t$ , 则  $t_n = n\Delta t$ , 其中  $n = 1, 2, \dots$ , 则  $u^n$  可以近似认为等于  $u(t_n)$ 。在一个  $\Delta t$  内, 方程(2.5.2)可以写成

$$u^{n+1} = e^{[-i(A+B)\Delta t]} u^n. \quad (2.5.3)$$

当  $\Delta t$  取的足够小时, 由 Baker-Hausdorff 公式上式可以写成

$$u^{n+1} = e^{-iA\Delta t} e^{-iB\Delta t} u^n. \quad (2.5.4)$$

上式可表达为

$$u^{(1)} = e^{-i\Delta t A/2} u^n, \quad (2.5.5)$$

$$u^{(2)} = e^{-i\Delta t B} u^{(1)}, \quad (2.5.6)$$

$$u^{n+1} = e^{-i\Delta t A/2} u^{(2)}. \quad (2.5.7)$$

这样就将求解方程 (2.5.2) 简化为依次求解

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad (2.5.8)$$

和

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = Bu. \quad (2.5.9)$$

非线性的薛定谔方程可简化为

$$Au(x, t) = U(x)u(x, t) + g|u(x, t)|^2 u(x, t), \quad (2.5.10)$$

$$Bu(x, t) = -\frac{1}{2} \partial_{xx} u(x, t). \quad (2.5.11)$$

其中  $g$  表示相互作用系数。那么求解非线性薛定谔方程就可以转换为求解下面两个方程：

$$i \partial_t u(x, t) = U(x)u(x, t) + g|u(x, t)|^2 u(x, t), \quad (2.5.12)$$

和

$$i \partial_t u(x, t) = -\frac{1}{2} \partial_{xx} u(x, t). \quad (2.5.13)$$

关键是求解跟空间有关的方程 (2.5.13) 以及偶极相互作用，可以使用傅里叶谱的方法。空间波函数  $u(x)$  的傅里叶变换表示为

$$\tilde{u}(\mathbf{f}) = \mathcal{F}[u(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} u(\mathbf{r}) e^{-2\pi i \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.5.14)$$

其傅里叶逆变换为

$$u(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}(\mathbf{f})] = \int d\mathbf{r} \tilde{u}(\mathbf{f}) e^{2\pi i \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.5.15)$$

根据傅里叶变换的导数性质

$$\partial_{xx} u(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\partial_{xx} u(\mathbf{r}))] = -4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{f}^2 \tilde{u}(\mathbf{f})]. \quad (2.5.16)$$

方程 (2.5.13) 变成

$$i \partial_t \tilde{u}(\mathbf{f}, t) = 2\pi^2 \mathbf{f}^2 \tilde{u}(\mathbf{f}, t). \quad (2.5.17)$$

这样方程解起来就简单多了。得到的波函数再进行傅里叶逆变换，就可以得到  $t$  时刻的波函数。对于偶极相互作用项可以采用卷积定理来处理

$$\int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{v}(\mathbf{f}) \tilde{u}(\mathbf{f})]. \quad (2.5.18)$$

傅里叶变换能用在解决很多问题上，比如傅里叶频谱分析，把时域的波转化到频域，从而能够更好的分析动力学运动规律。为了提高运算速度，还可以使用快速傅里叶变换，简称 FFT，它运用了傅里叶变换中指数因子的周期性和对称性。

## 2.6 本章小结

本章介绍偶极相互作用在旋量玻色爱因斯坦凝聚体中的重要作用。文中详细介绍了自旋 1 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体在单模近似以及非单模近似下的特性。在单模近似区域，系统的自旋结构类似于磁性材料中的单畴态，其自旋的分布是统一的。当偶极相互作用足够强时，单模近似不再适用，自旋结构决定于自旋交换相互作用和偶极相互作用之间的相互影响。而且薄饼型的凝聚体对偶极相互作用特别敏感，该情况下自旋结构类似于跟磁片材料中磁涡旋形成自旋涡旋态。在外加纵向磁场的作用下，系统会出现相变，在外加横向磁场作用下，随着磁场强度的增加，涡旋中心会朝着垂直于外加磁场的方向向外移动，最后移出凝聚体，凝聚体被极化。总而言之，偶极旋量凝聚体代表着一类新奇的各向异性超流，这里面有丰富的物理现象有待探索。



## 第三章 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体中的耦合自旋涡旋对

### 3.1 引言

由于偶极相互作用各向异性和长程相互作用性，偶极旋量 BEC 系统对外势变得非常敏感，而且随着势阱形状的变化，系统会自发产生丰富的自旋结构。当原子囚禁在扁平的谐振子势阱中，在足够强的偶极相互作用下，系统会自发的形成一个自旋涡旋态，这种首尾相接的自旋结构使得系统的总能量最低[35]。束缚在多个势阱中的偶极旋量 BEC 能自发地形成自旋涡旋态，而且原子之间的相互作用以及系统的几何形状都是可调节的，给模拟多层磁涡旋结构提供了理想平台。特别是最近超冷极性分子的实现给研究高绕数的耦合自旋涡旋态提供了很好的研究机会[112, 118]。

本章着眼于自旋涡旋态，研究对称双势阱中自旋 1 偶极旋量 BEC 的基态性质。双势阱将一个自旋涡旋态劈裂成一对涡旋态，非常类似于我们前面提到的多层纳米磁盘结构（铁磁-非磁-铁磁）中的磁涡旋态。由于多层涡旋的各种潜在应用可能，耦合涡旋在磁场中的性质也引起很大关注，为研究涡旋的动力学性质提供了有效的可调控手段，本章我们还将研究自旋 1 偶极旋量 BEC 耦合涡旋对在横向磁场中的基态性质。

### 3.2 双势阱

我们考虑由  $N$  个自旋 1 原子组成的系统被束缚在一个双势阱中，双势阱是由一束高斯激光加在谐振子势阱上组成，它的具体形式可以写成

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + Ae^{-z^2/(2\sigma_0^2)}, \quad (3.2.1)$$

其中  $A$  和  $\sigma_0$  分别表示高斯势垒的高度和宽度。图 3.1 中黑实线和红虚线分别对应  $z$  轴方向的谐振子势阱和双势阱

$$U_1(z) = \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2, \quad (3.2.2)$$

$$U_2(z) = \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2 + Ae^{-z^2/(2\sigma_0^2)}. \quad (3.2.3)$$

这里我们注意到高斯势垒  $A$  与阱间势垒  $\tilde{A}$  不同，后者从双势阱的最小值开始测量，如图 3.1 所示。我们不难得出  $A$  与  $\tilde{A}$  之间的关系为

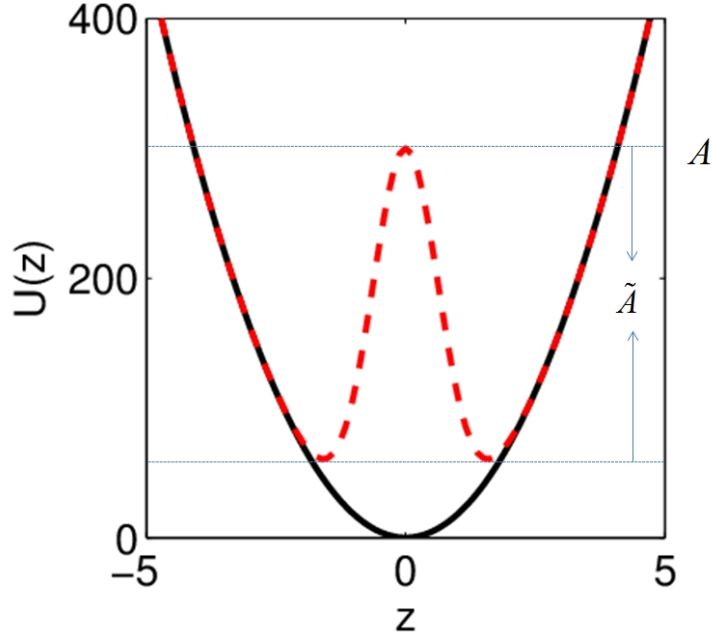


图 3.1 黑色实线表示在  $z$  轴上的谐振子势阱  $U_1(z)$ ，红色虚线表示  $z$  轴上的双势阱  $U_2(z)$ ， $A$  是高斯势垒的最大值， $\tilde{A}$  是两个势阱间势垒的高度。

$$\tilde{A} = A - M\omega_z^2\sigma_0^2\left(1 - \ln\frac{M\omega_z^2\sigma_0^2}{A}\right). \quad (3.2.4)$$

其中  $M\omega_z^2\sigma_0^2\left(1 - \ln\frac{M\omega_z^2\sigma_0^2}{A}\right)$  是双势阱  $U_2(z)$  的极小值。

### 3.3 模型

在平均场方法中，凝聚体的波函数  $\psi_\alpha(r)$  ( $\alpha = 0, \pm 1$ ) 满足耦合动力学方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t} = (h_0 + c_0n)\psi_\alpha + g_F\mu_B\mathbf{B}_{eff} \cdot \mathbf{F}_{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad (3.3.1)$$

其中有效磁场  $\mathbf{B}_{eff}$  由三部分组成，分别为外磁场  $\mathbf{B}_{ext}$ ，自旋交换碰撞相互作用  $\mathbf{B}_{col}$  以及偶极相互作用  $\mathbf{B}_{dip}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{eff}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{col}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}), \\
 \mathbf{B}_{col}(\mathbf{r}) &= \frac{c_2}{g_F \mu_B} \mathbf{S}(\mathbf{r}), \\
 \mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}) &= \frac{c_d}{g_F \mu_B} \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{R}|^3} \left[ \mathbf{S}(\mathbf{r}') - \frac{3[\mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}]\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2} \right],
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

其中  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 。

### 3.4 数值参数

下面我们主要研究系统在双势阱中的基态性质。在第二章中提到，平均场近似下系统的基态可以通过虚时演化求解 GP 方程得到，在计算中采用无量纲化处理，设定  $N = 5 \times 10^5$  以及  $\omega_{\perp} = (2\pi)100$  Hz。由于我们感兴趣的是自旋涡旋态，所以采用薄饼状的谐振子势阱，这里谐振子压缩比设定为  $\lambda = 6$ ，双势阱之间的距离固定在  $\sigma_0 = 0.65\ell_{\perp}$ ，取  $^{87}\text{Rb}$  原子的散射长度  $a_0 = 5.40\text{nm}$  和  $a_2 = 5.32\text{nm}$ 。对于  $^{87}\text{Rb}$  原子，偶极相互作用强度  $c_d$  大约是自旋交换相互作用强度  $c_2$  的 10%，这里增加  $c_d$  使得  $c_d = |c_2|$ ，以确保当势垒出现的时候，系统依然处于自旋涡旋态。这样选择  $c_d$  的目的是为了加快数值运算的收敛，但是这个选择并不影响下面结果，可以证实仅仅通过增加粒子数到  $10^7$  数量级即可以定性的得到相同的结果，而此时的  $c_d$  正是实验上  $^{87}\text{Rb}$  原子对应的偶极相互作用强度。为了保证偶极相互作用跟线性塞曼能是可比的，我们所选择的外磁场都在  $100\mu\text{G}$  以下，所以在计算中忽略二阶塞曼能[23]。

### 3.5 无磁场下的基态

本节介绍无外磁场时系统的基态性质。第二章介绍了当外势阱的形状为薄饼状时，偶极旋量凝聚体的基态是一个无核涡旋，如图 3.2 的左图，展示了自旋涡旋态的自旋结构以及等密度面。

在双势阱中，随着势垒高度的增加 BEC 气体在空间上被分成两个薄饼。这时凝聚体的自旋结构由层内和层间的偶极相互作用共同决定。我们发现当  $A < A^* = 246\hbar\omega_{\perp}$  时，上下两层凝聚体的涡旋具有相同的手征，我们把这种结构记做平行自旋涡旋对 (PSVP)，但是当  $A > A^*$  时，上下层涡旋的手征反向，形成了反平行自旋涡旋对 (ASVP)，如图 3.2 所示。直观上说，从 PSVP 到 ASVP 的转化是由层间的偶极相互作用引起的，此时两个势阱中原子的自旋倾向于彼此反平行排列。

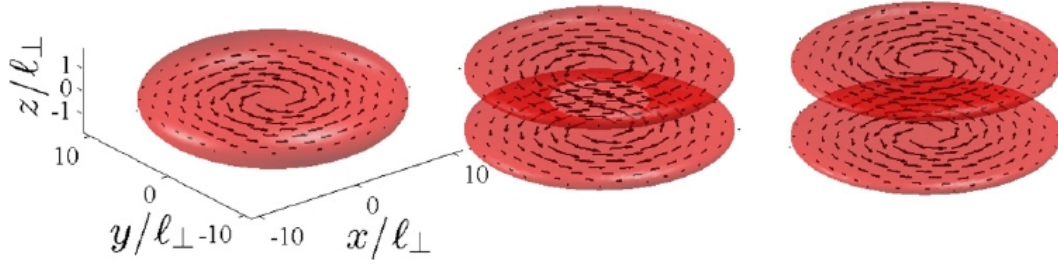


图 3.2 不同势阱下基态等密度面和自旋结构图。从左到右分别对应于不同的势垒高度  $A/(\hbar\omega_{\perp})=0, 100$  和  $300$ 。箭头表示自旋结构,最左边的是  $z=0$  层,中间和右面画的是  $z=z_{\min}$ , 其中  $z_{\min}$  表示势阱处在最低点所对应的  $z$  轴坐标。

为了方便,我们把波函数分为上半部分  $\psi_{\alpha}^{(u)}$  ( $z>0$ ) 和下半部分  $\psi_{\alpha}^{(l)}$  ( $z\leq 0$ ) 两部分,定义上半部分和下半部分的参数分别为  $n_{\alpha}^{(i)}, \Theta_{\alpha}^{(i)}, \omega_{\alpha}^{(i)}$  和  $\mathcal{G}_{\alpha}^{(i)}$  ( $i=u,l$ )。我们发现 PSVP 态上半部和下半部都满足条件 (2.2.7), (2.2.8) 和 (2.2.11)。尽管 ASVP 态上下两部分依然满足条件 (2.2.7) 和 (2.2.8), 但是只有下半部分才满足条件式 (2.2.11) ( $\mathcal{G}_0^{(l)} - (\mathcal{G}_1^{(l)} + \mathcal{G}_{-1}^{(l)})/2 = 0$ ), 而上半部分三分量的相角的关系为  $\mathcal{G}_0^{(u)} - (\mathcal{G}_1^{(u)} + \mathcal{G}_{-1}^{(u)})/2 = \pi$ , 产生了自旋反向的涡旋对结构。更为特别的是,数值计算结果显示 ASVP 相的相位满足关系  $\mathcal{G}_{\pm 1}^{(l)} = \mathcal{G}_{\pm 1}^{(u)}$  和  $\Delta\Theta_0 = \Theta_0^{(u)} - \Theta_0^{(l)} = \pi$ 。图 3.3 分别展示了单层涡旋和双层涡旋波函数的相位在  $x$ - $y$  平面分布。

从物理上来说, PSVP 到 ASVP 之间的转化可以理解如下。首先我们假设两个实函数  $\phi_0^{(l)}$  和  $\phi_0^{(u)}$  分别表示上下势阱的基态波函数,那么在双势阱中自旋 0 分量的基态波函数  $\psi_0^{(+)}$  和第一激发态波函数  $\psi_0^{(-)}$  就可以粗略的表示为  $\psi_0^{(\pm)} \propto \phi_0^{(l)} \pm \phi_0^{(u)}$ 。这两个态所相应的能量被双势阱之间的隧穿劈裂能分开,因为一旦势垒高度增加,两势阱之间的隧穿劈裂能就会减小,当势垒  $A$  增加到足够大以至于隧穿劈裂能不足以弥补层间的偶极相互作用能时,系统更倾向于 ASVP 态,则  $\psi_0^{(-)}$  变为自旋 0 分量的基态波函数,而此时双势阱间自旋 0 分量的相位差  $\Delta\Theta_0 = \pi$ , 此相位差由磁偶极相互作用自发形成。

上述观点可以通过  $A^*$  与  $\sigma_0$  之间的关系进一步论证。在双势阱中,层间偶极相互作用与  $1/\sigma_0^3$  成比例,两势阱之间的隧穿劈裂能与  $e^{-\tilde{A}\sigma_0}$  成比例,二者相等可得到双势阱的临界势垒高度满足关系式

$$\tilde{A}^* = (\kappa_1 + \kappa_2 \ln \sigma_0) \sigma_0^{-1}. \quad (3.5.1)$$

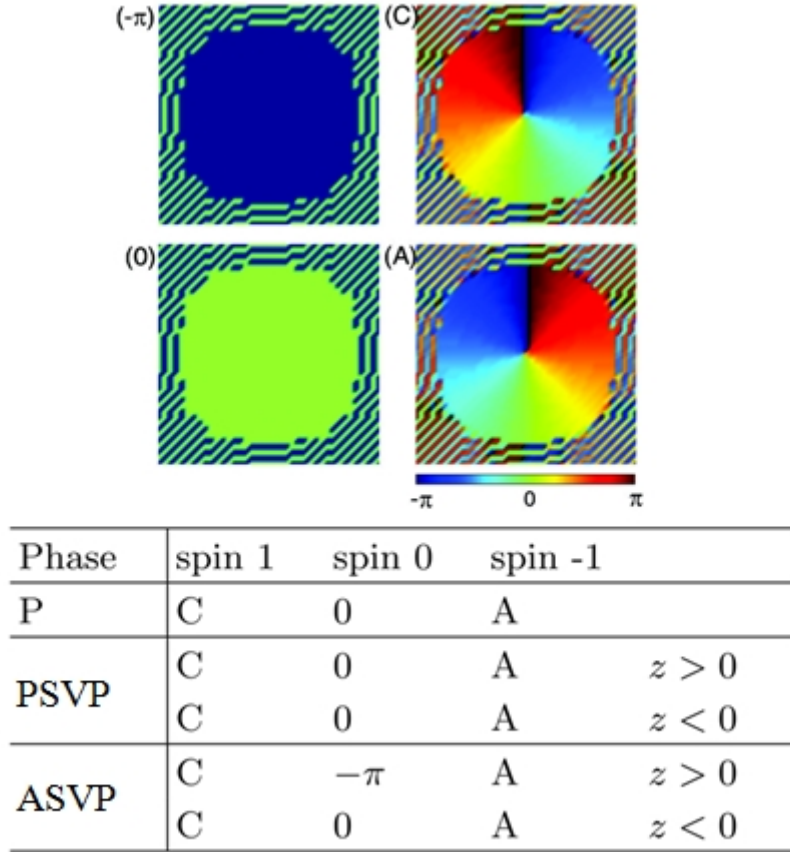


图 3.3 基态相位在  $x$ - $y$  平面的分布图。 $(-\pi)$  和  $(0)$  分别表示凝聚体的相位为常数  $-\pi$  和  $0$ ； $(C)$  和  $(A)$  分别表示相位从  $-\pi$  到  $\pi$  的变化是顺时针和逆时针。图表表示系统处在三种相时，各个自旋分量波函数所对应的相位。

图 3.4 展示了  $\tilde{A}^*$  与  $\sigma_0$  之间的依赖关系，方格子为数值计算结果，虚线为方程 (3.5.1) 拟合的结果，可见数值结果与方程符合的很好。

下面讨论其它物理量与势垒高度的关系。图 3.5 分别展示了凝聚体的最大密度  $n_p = \max[n(\mathbf{r})]$  和每个原子的偶极相互作用能

$$E_{dip} = g_F \mu_B N^{-1} \int d\mathbf{r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_{dip}$$

随  $A$  的变化关系。随着  $A$  的增加，这两条曲线展现两种不同的特性：当  $A$  较小时， $n_p$  和  $|E_{dip}|$  的值随着  $A$  的增大而减小，但是当  $A$  的值比较大时， $n_p$  和  $|E_{dip}|$  的值随着  $A$  的增大而增大。我们发现方程 (3.2.1) 中轴向的单势阱的有效频率为

$$\omega_{eff} = \omega_z \sqrt{2 \ln \left[ A / (M \omega_z^2 \sigma_0^2) \right]}. \quad (3.5.2)$$

所以形成双势阱的条件为  $A > M \omega_z^2 \sigma_0^2$ ，因为在  $A$  比较小的区域，高斯势垒仅仅使得

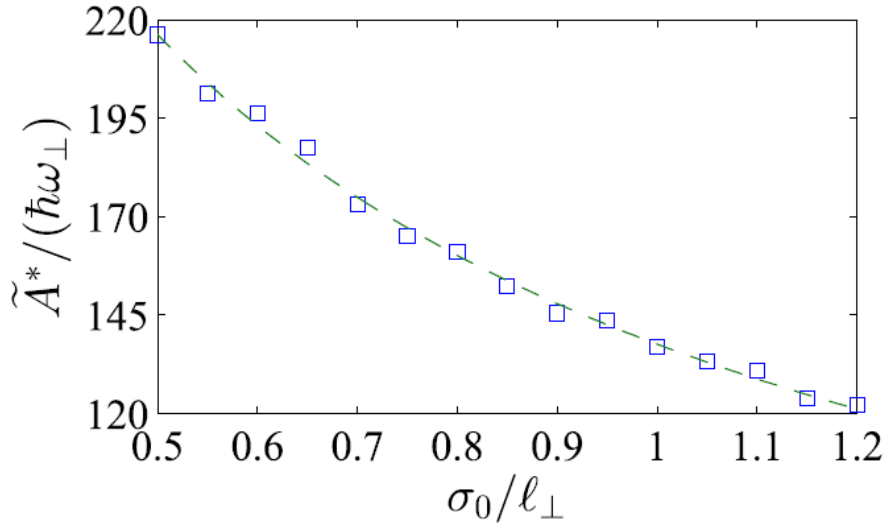


图 3.4  $\tilde{A}^*$  随  $\sigma_0$  变化图。方格子是数值计算的结果，虚线是拟合的结果，其中拟合参数为  $\kappa_1 = 137.6$  和  $\kappa_2 = 42.5$ 。

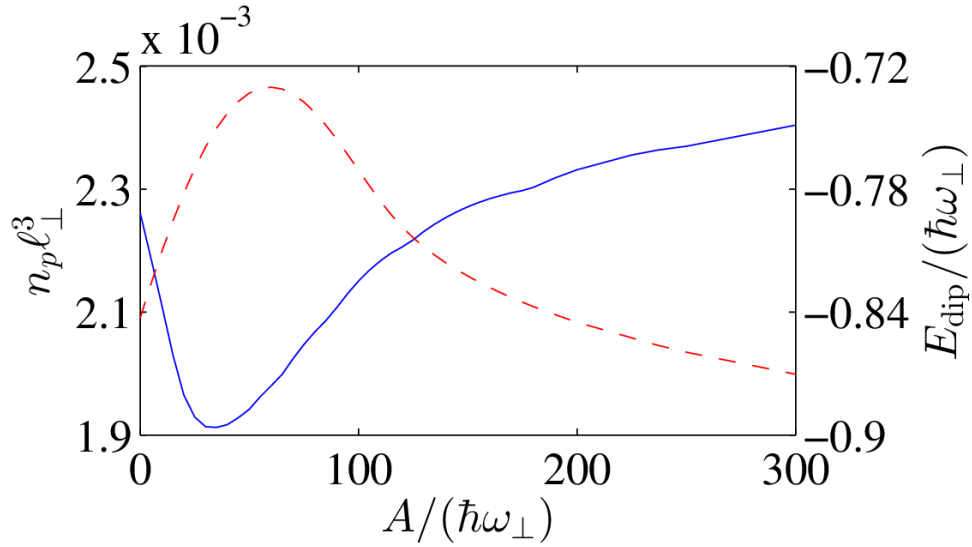


图 3.5 实线和虚线分别表示密度的最大值和偶极相互作用能对势垒高度的依赖。

谐振子势阱在  $z$  方向变得平缓而并未形成双势阱，所以  $n_p$  和  $|E_{dip}|$  的值随着  $A$  的增大而减小，然而在  $A$  比较大的区域， $\omega_{eff}$  随着  $A$  的增大而增大，进而导致  $n_p$  和  $|E_{dip}|$  随着  $A$  的增加而增大。

### 3.6 横向磁场下的基态

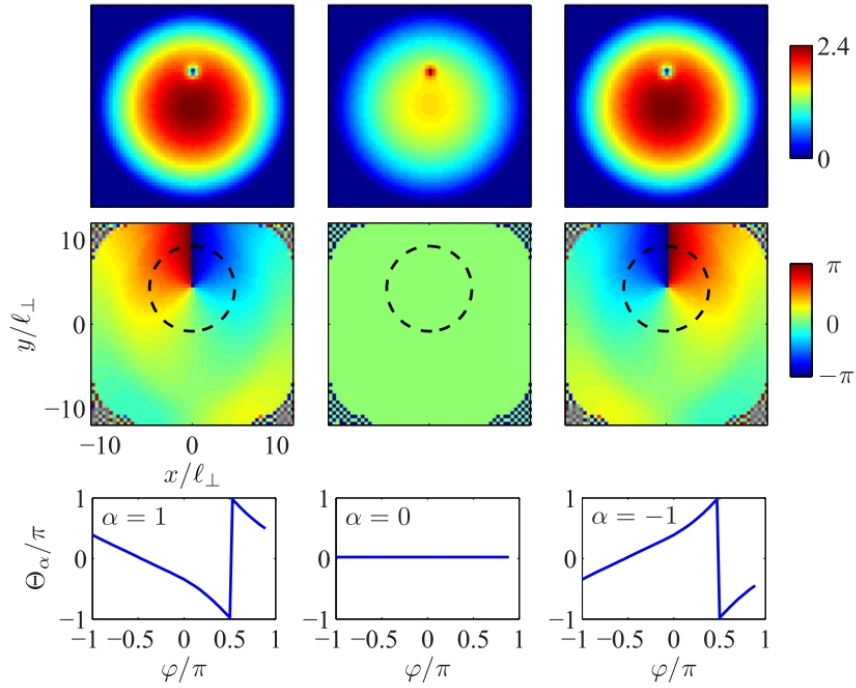


图 3.6  $A=0$  以及  $B_x=40\mu G$  时, 系统的基态波函数在  $z=0$  平面上的分布。最上面的平面图从左到右分别表示自旋分量分别是 1,0 以及  $-1$  上的粒子数密度分布, 单位是  $10^{14}\text{cm}^{-3}$ 。中间是与上面一行相对应的相位分布图。最下面的图表示相位  $\Theta_\alpha$  随中间图中所画的虚线的极角的变化图。

在第二章我们已经了解过自旋涡旋态的磁性质, 得出结论: 凝聚体波函数的绕数依赖于所加外磁场的方向。在足够强的纵向磁场下, 自旋涡旋态波函数的绕数会从原先的  $(\omega_1, \omega_0, \omega_{-1}) = (-1, 0, 1)$  变为  $(-2, -1, 0)$  或者  $(0, 1, 2)$ 。这种转变不仅包含了各个自旋分量涡旋度的变化, 还包含一阶相变。值得注意的是, 在这三个自旋态中粒子数主要分布的分量上往往没有涡旋, 而且在足够强的磁场下, 涡旋态所在分量的粒子数可以忽略不计。文献[35]还重点地提到了存在横向磁场的情况, 随着磁场强度的增强, 自旋涡旋的中心会离开凝聚体的中心向垂直于外加磁场方向移动直至消失, 即自旋被极化。

接下来, 我们研究了自旋涡旋态在一个横向的磁场  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{x}$  中的性质。首先我们注意到横向磁场  $B_x$  迫使自旋沿  $x$  方向极化, 自旋涡旋态中自旋沿磁场方向的粒子数目会增加。然后随着外磁场强度的增加, 自旋涡旋的中心会沿着  $y$  轴的方向移动, 使得自旋反平行于外磁场的粒子数目减小。图 3.6 展示了谐振子势阱中外加横向磁

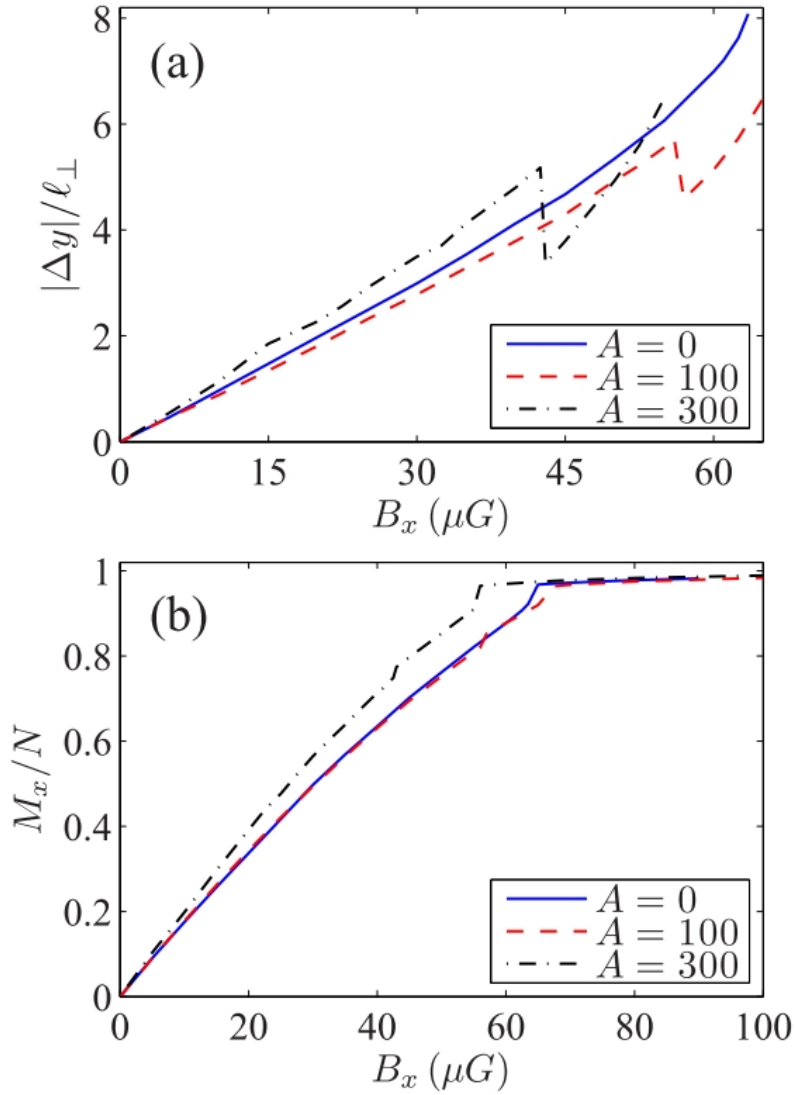


图 3.7 不同的势垒高度下，单涡旋（蓝色实线），平行涡旋对（ $A=100\hbar\omega_{\perp}$ ，其中  $z < 0$  部分用红色虚线， $z > 0$  部分用绿色实线）以及反平行涡旋对（ $A=100\hbar\omega_{\perp}$ ，黑色点画线）涡旋中心位移的绝对值  $|\Delta y|$  (a) 和沿  $x$  方向的磁化强度  $M_x$  (b) 随外加横向磁场强度  $B_x$  的变化。

场的强度  $B_x = 40\mu\text{G}$  时，凝聚体波函数的密度分布和相位分布。正如我们所看到的，除了涡旋中心沿  $y$  轴的位移发生了变化，各个自旋分量的绕数并没有发生变化。我们还对凝聚体波函数的相位沿着闭合回路做了分析（图 3.6 黑色虚线），我们发现与无磁场时相比，自旋 1 和  $-1$  分量的相位  $\Theta_{\pm 1}$  随着闭合回路极角的变化不再是线性的。

为了定量的研究外加横向磁场对自旋涡旋态的影响，我们做了如下工作。图 3.7 展示了横向外磁场强度  $B_x$  与自旋涡旋中心位移  $\Delta y$  之间的关系，当系统处于谐振子势阱中时，随着横向磁场强度的增加  $\Delta y$  沿  $y$  轴单调增加直至临界磁场  $B_x^* = 63.5\mu\text{G}$ ，涡旋中心移出原子云。图 3.7(b) 中实线为自旋沿  $x$  方向的磁化强度



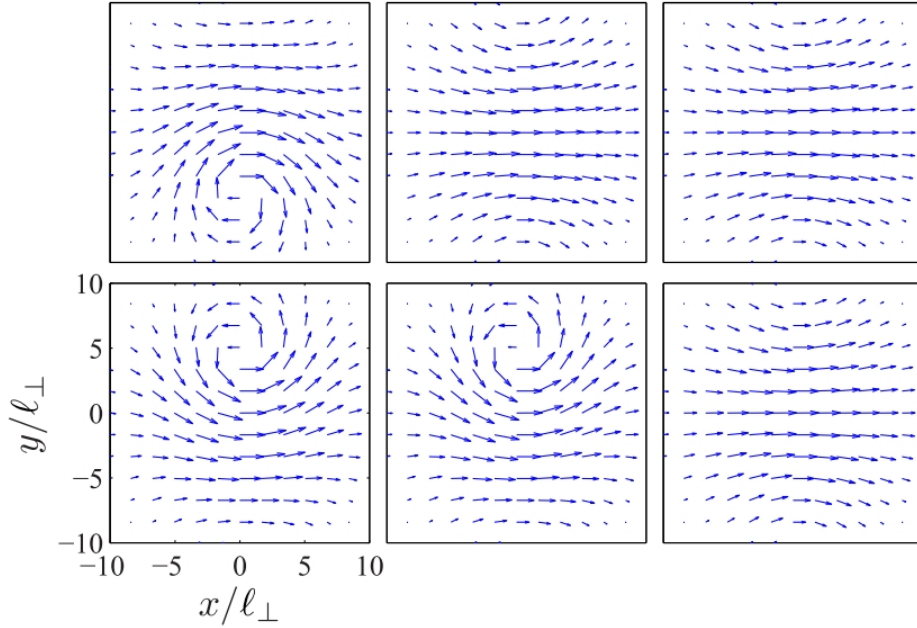


图 3.8 双势阱的势垒为  $A/(\hbar\omega_{\perp}) = 300$ ，外加横向磁场的强度从左到右分别为  $B_x = 40$ ，50 以及  $70 \mu\text{G}$  时，系统基态的自旋结构在  $x$ - $y$  平面的分布，其中上面一行和下面一行分别表示双势阱上层和下层。

$M_x$  随磁场强度的变化曲线，其中

$$M_x = \int d\mathbf{r} S_x(\mathbf{r}). \quad (3.6.1)$$

我们发现在自旋涡旋消失的临界磁场  $B_x^*$  处  $M_x$  有个突变，这意味着这里存在自旋涡旋态到极化态的相变。

对比纵向磁场和横向磁场引起的相变不难发现，对于前者来说凝聚体波函数的涡旋性一直存在，但是对于后者涡旋甚至可以消失。因为当外磁场为横向时，在足够强的磁场下各个自旋态粒子占据数一直保持在可观的范围，再加上涡旋带来的额外能量，使得涡旋态在各个分量上都不受欢迎。而当外加磁场为纵向时，含有涡旋的自旋分量上的粒子数占据数变得非常小甚至可以忽略，当然由涡旋产生的额外能量相对于总磁场来说可以忽略不计，故无论所加纵向磁场多强，涡旋会一直存在，只是各个自旋分量上涡旋的绕数会发生变化。

同理，当系统处于双势阱中，随着外加横向磁场强度增加，PSVP 态上层和下层的自旋涡旋中心应该向相同方向移动，而对于 ASVP 态向相反方向移动。有趣的是，我们发现上下层自旋涡旋的中心并不是简单的同时消失，而是在达到一定的临

界值时  $B_x^*$  后，一个涡旋先移出去，另一个再慢慢移出去，最后当磁场相对比较强达到另一个临界值  $B_x^{**}$  时，上下两层的自旋被极化。以 ASVP 态的磁化过程为例，图 3.8 展示了处于三种不同阶段磁化阶段典型的自旋结构。

为了深入理解这些相变，我们还研究了 PSVP 和 ASVP 态在双势阱中涡旋中心位移的变化  $\Delta y$  随着  $B_x$  的变化规律，如图 3.7 所示。当  $B_x < B_x^* = 56.5\mu G$  时，PSVP 态上下两层  $\Delta y$  的变化相同（图中的红虚线和绿实线），对于 ASVP 态临界磁场  $B_x^* = 42.75\mu G$ ，上下两层  $\Delta y$  的变化正好相反（图中黑线）。有趣的是，当第一个自旋涡旋消失时，第二个涡旋的  $\Delta y$  会突然下落，也就是说这个涡旋朝着凝聚体的中心发生了突然移动。物理上，通过涡旋中心移向凝聚体中心使含有自旋涡旋的一层含有更多的反平行于另一层的自旋，从而降低了层间的 MDDI。在图 3.7(b) 中，分别展示了 PSVP 和 ASVP 态沿  $x$  方向的总磁化强度  $M_x$  随磁场强度  $B_x$  的变化，可以很明显的确定临界相变点  $B_x^*$  和  $B_x^{**}$ 。

### 3.7 本章小结

本章研究了自旋 1 偶极旋量 BEC 在双势阱中的基态性质和磁性响应行为。我们主要研究了高度扁平化双势阱中的自旋涡旋态。我们发现，双势阱会导致自旋涡旋对出现，而且随着双势阱势垒高度的变化会产生两种不同的自旋结构 PSVP 和 ASVP。在无外磁场时，双势阱间的隧穿劈裂与两者之间的 MDDI 的互相影响会导致 PSVP 与 ASVP 之间的相变。在外加横向磁场的作用下，自旋涡旋态的中心会沿着垂直于所加磁场的方向移动直至消失，此时自旋全部朝向所加磁场的方向，这与外加纵向磁场的情况完全不同。有趣的是，PSVP 和 ASVP 态上下势阱中的自旋涡旋态不是同时消失，而是逐个消失。

## 第四章 偶极旋量玻色爱因斯坦凝聚体中的耦合自旋涡旋对的 动力学

### 4.1 引言

层状磁性材料中形成的磁涡旋态,由于其简单的自旋结构以及潜在的应用价值,其非平庸的动力学性质,是一个非常有吸引力的课题。依靠涡旋的手征和极性的变化来调控层状结构的自旋涡旋态为未来的信息存储打开了一扇窗。BEC 作为一个理想的纯净平台,用来研究涡旋的动力学行为,可以提供更多的可调节因素。

我们研究涡旋动力学的另一个动机是磁涡旋振荡已经被用作研究未来无线电通讯的可调微波发生器,因此深入了解多层涡旋结构的基本物理性质变得非常迫切。最近,涡旋对[119-124],三涡旋[125],涡旋链[124,126],磁盘阵列和方形涡旋等有关耦合磁涡旋的动力学已经得到了广泛的研究[127-130]。在第三章中我们已经用偶极旋量 BEC 来模拟多层磁涡旋的平行涡旋对和反平行涡旋对,而且为了实现与纳米点装置相似的自旋结构,可以通过加横向磁场使得涡旋中心发生偏移。三层结构的耦合动力学可以采用时间分辨成像技术用扫描透射  $x$  射线显微镜观察到[131]。这激发了我们探索涡旋的磁场淬火动力学行为,从而揭示耦合涡旋对在层状凝聚体中的运动规律。

考虑到磁涡旋广泛的应用价值,本章主要基于第三章得到的基态自旋涡旋对,有针对性地研究它们的碰撞动力学以及淬火动力学,即初态制备好之后,突然撤掉双势阱的势垒或者横向磁场,观察涡旋对的动力学演化。本章第二部分介绍我们的模型以及数值参数设定;第三部分介绍涡旋碰撞动力学的数值模拟结果;第四部分介绍自旋涡旋对在不同磁场强度下的淬火动力学行为;最后对本章内容归纳总结。

### 4.2 模型与数值参数

在平均场理论中,偶极旋量 BEC 自旋涡旋对的动力学行为同样遵循 GP 方程 (3.3.1),只是在数值方法上,不再使用虚时演化,而是在关掉双势阱或者磁场后对系统进行实时演化。在实验上,可以用一束高斯激光将凝聚体分成两半,这时系统可以看做准二维原子云,原子在平面上运动近乎自由。在无磁场情况下,势阱两边涡旋的手征取决于固定高斯势垒宽度  $\sigma_0$  下势垒的高度  $A$ 。在计算过程中我们采用与第三章相同的数值模拟参数。值得注意的是,我们所研究动力学的初态为虚时演化

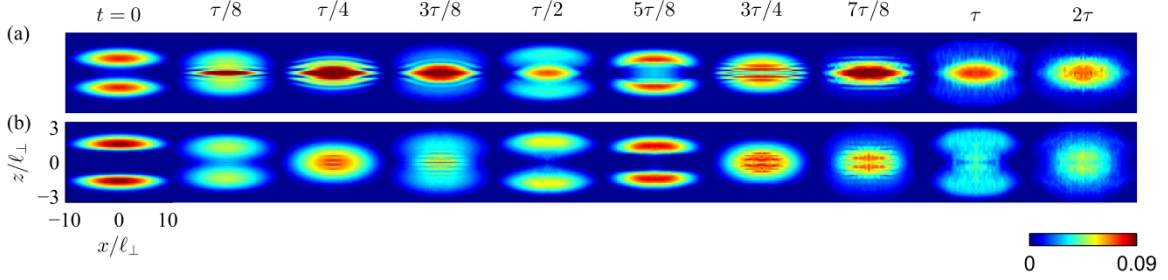


图 4.1 高斯势阱突然关掉后自旋涡旋对 PSVP (a) 和 ASVP (b) 的碰撞动力学行为，每张图表示原子云沿  $y$  轴积分后的密度在  $x$ - $z$  平面的分布。

得到的系统基态，如：无磁场时的 PSVP ( $A = 100\hbar\omega$ ) 和 ASVP ( $A = 300\hbar\omega$ )；在横向磁场下的双涡旋，单涡旋以及极化态。下面我们就碰撞动力学和磁场淬火动力学做详细介绍。

### 4.3 涡旋碰撞动力学

为了给实验提供可以鉴别 PSVP 和 ASVP 的信息，我们对比研究了两种自旋涡旋对的碰撞动力学。首先，我们将双势阱的势垒宽度固定为  $\sigma_0 = 0.65\ell_{\perp}$ ，高度分别设置为  $A = 100\hbar\omega$  和  $A = 300\hbar\omega$ ，分别对应于无磁场时的 PSVP 和 ASVP 相，前文用虚时演化得到的系统基态作为动力学演化的初态。当自旋涡旋对形成以后，迅速地撤掉双势阱的势垒，然后观察两种自旋涡旋对的碰撞，寻找演化过程的共同点和不同点。

当双势阱的势垒突然撤掉，势垒两边的原子开始朝彼此的方向加速运动，在势阱中心，两个涡旋发生碰撞。碰撞动力学计算采用的是完全三维数值模拟，图 4.1 给出了动力学碰撞过程中两个周期内凝聚体的粒子数密度沿  $y$  方向的积分在  $x$ - $z$  平面的分布。在碰撞过程中观察到了类似于量子牛顿摆[93]的周期振荡，而且两种涡旋对的碰撞呈现出完全不同的干涉条纹和手征交换特性。

我们把两个凝聚体薄片在势阱中心碰撞两次回到各自的初始位置定义为一个碰撞周期， $\tau = 2\pi / \omega_{\perp} = 1.05\omega_{\perp}^{-1}$ 。第一次碰撞发生在  $\tau/4$  时刻，处在 ASVP 的凝聚体在整个密度区域呈现出一个全局的密度干涉条纹，而 ASVP 相的凝聚体只在密度的中心区域出现干涉条纹。事实上，此时凝聚体三个分量之间的相互作用最强，三分量的粒子数交换也最频繁，图 4.2 记录了自旋 0 分量上的粒子数分布  $n_0$  随时间的变化，其中  $n_0$  定义为  $|\psi_0|^2$  对全空间的积分。我们发现，在 PSVP 的第一次碰撞期间  $n_0$  是减少的，这意味着 PSVP 相倾向于粒子数交换朝着  $2|0\rangle \rightarrow |1\rangle + |-1\rangle$  方向进行。

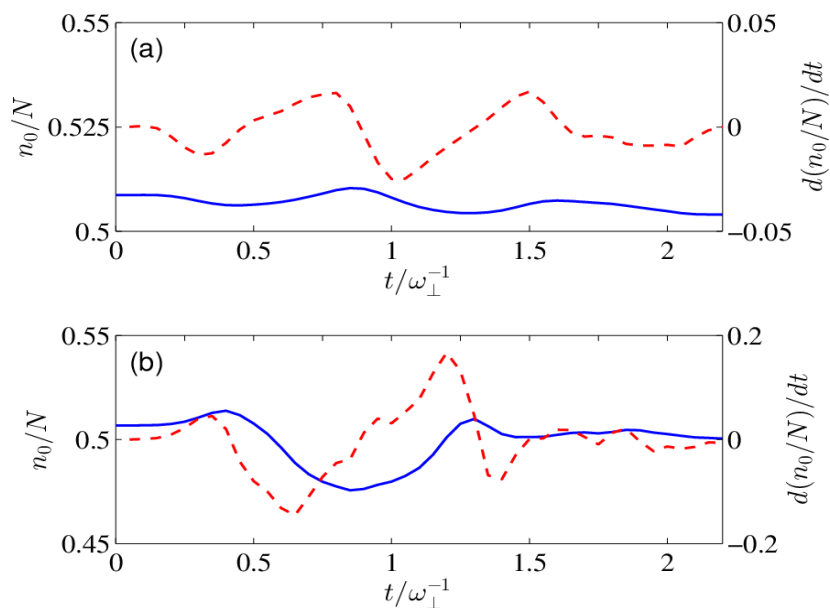


图 4.2 实线表示两种碰撞过程中自旋 0 分量粒子数  $n_0$  随时间的变化，(a) 和 (b) 分别表示 PSVP 和 ASVP 的情况，虚线表示相对应的梯度变化。

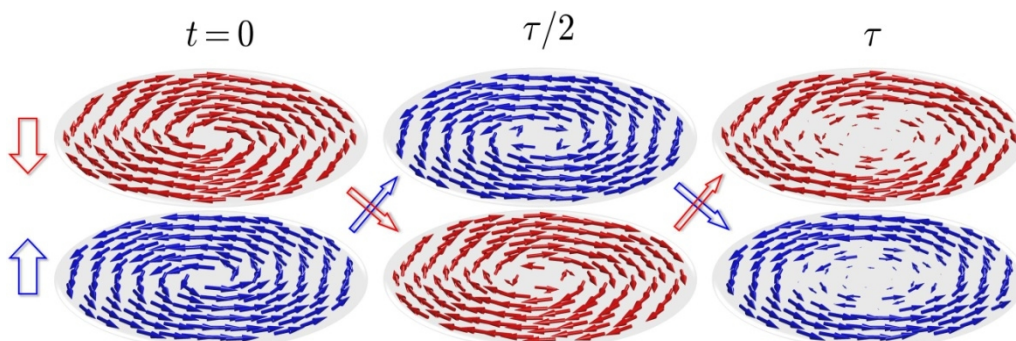


图 4.3 ASVP 相的两个涡旋对在碰撞过程中三个不同时刻的自旋结构图。初始时刻上下两层凝聚体在势阱最低点的手征在第一次碰撞  $t = \tau/2$  后交换，然后在  $t = \tau$  时刻又恢复。

然而 ASVP 相却倾向于相反的方向。值得一提的是，在整个演化的过程中，系统沿着  $z$  方向的磁化强度  $M_z$  自始至终都保持为 0，以至于粒子数在  $\pm$  分量上的分布始终满足关系  $n_1 = n_{-1}$ 。

当两个薄片第一次碰撞完成之后，它们直接穿过彼此，当  $t = \tau/2$  时这两片凝聚体再次分开，我们观察到一个有趣的现象，ASVP 相自旋涡旋对中上层和下层涡旋的手征发生了交换，而且当它们再次碰撞后  $t = \tau$  再次发生交换，恢复到初始状况，只不过在涡旋中心的附近自旋结构开始出现混乱，如图 4.3 所示。对于 PSVP 相，由于它上下两层涡旋的手征在初始时刻就是相同的，所以碰撞后依然保持不变。在第三章我们提到，PSVP 和 ASVP 相自旋 0 分量的相位差分别为 0 和  $\pi$ ，这导致了波函数完全不同的碰撞动力学行为。在 PSVP 相，在  $t = \tau/2$  时凝聚体的质心处观察

到一个密度尖峰,说明这个碰撞是同相碰撞,而在 ASVP 相中出现的是密度极小值,说明 ASVP 相的涡旋碰撞是反相碰撞。这个现象与物质波孤子碰撞的实验符合的非常好[94],如图 1.10 所示。不同于一维碰撞,我们研究的这种面对面碰撞在几个周期后会被破坏掉,可以理解为涡旋对之间的碰撞为密度相关的非弹性碰撞。

#### 4.4 横向磁场的淬火动力学

磁涡旋动力学在纳米磁片以及由磁场调制的多层结构等其它应用上得到越来越广泛的关注。研究发现,在纳米材料中涡旋会绕着自己的平衡位置做螺旋运动,而它的振荡频率远远低于材料自身的铁磁共振频率。下面我们介绍一种类似的振荡模式,即在偶极旋量 BEC 系统中的耦合自旋涡旋对在外加横向磁场调制下的动力学行为。我们主要针对三种典型涡旋中心的运动模式,即单层结构、双层结构的 PSVP 和 ASVP。接下来,我们展示的动力学行为将选择  $z = z_{\min}$  层的动力学特性作为代表,其中  $z_{\min}$  是势阱最低点所对应的  $z$  值,其中对谐振子势阱  $U_1(z)$  有  $z_{\min} = 0$ ,对双势阱  $U_2(z)$  则有  $z_{\min} = \pm \sigma_0 \sqrt{2 \ln(A / \lambda^2 \sigma_0^2)}$ 。

##### 4.4.1 单层凝聚体中的涡旋动力学

我们首先考虑最简单的涡旋运动特征——单层涡旋结构。外磁场强度选  $B_x = 25 \mu G$  作为参考,凝聚体被制备在薄饼状势阱的基态,然后突然撤掉磁场,  $z = 0$  平面的涡旋中心随时间沿椭圆形轨迹在  $x$ - $y$  平面做螺旋运动,如图 4.4 (a) 所示。涡旋中心的  $y$  轴位移在相当长的一段时间内展现出很好的周期性,如图 4.4 (b) 中的空心圆所示。我们可以用一个衰减的简谐振荡来拟合,

$$\Delta y(t) = (y_0 e^{-\beta t} + y_1) \cos(\omega_0 t), \quad (3.6.2)$$

如 (b) 中的实线,其中拟合参数  $y_0 = 1.7 \ell_{\perp}$ ,  $y_1 = 0.8 \ell_{\perp}$ , 阻尼率  $\beta = 5.84 \times 10^{-2} \omega_{\perp}$  以及振荡频率  $\omega_0 = 0.46 \omega_{\perp}$ 。可见二者符合的很好,这可以理解为自旋涡旋的运动是由一个进动力矩驱动,而这个进动力矩是由突然撤掉磁场而引起的。我们也给出了磁场淬火过程中沿  $x$  轴的磁化强度  $M_x$  随时间的变化,如图 4.4 (c) 中空心圆所示,实线是拟合的曲线,其表达式为

$$M_x(t) = (M_0 e^{-\beta t} + M_1) \cos(\omega_0 t), \quad (3.6.3)$$

其中  $M_0 = 0.17 \hbar$  和  $M_1 = 0.12 \hbar$ 。我们发现,  $M_x(t)$  和  $\Delta y(t)$  可以用阻尼率  $\beta$  和振荡频率  $\omega_0$  完全一样的同一个阻尼简谐振子来描述,从两个振荡的傅里叶频谱分析图可以得到印证:图 4.4 (d) 中实线和虚线分别对应于 (b) 图和 (c) 图的频谱分析结果,



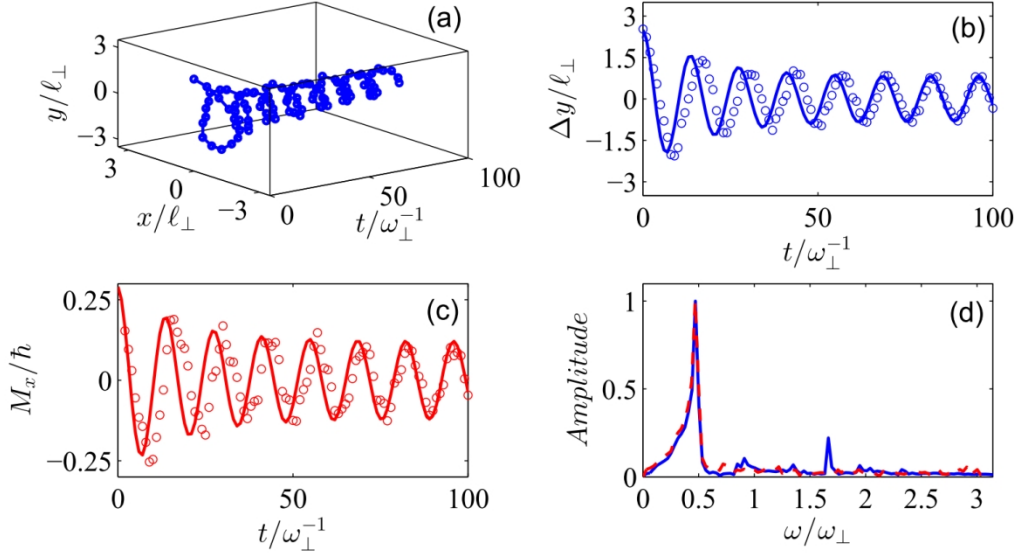


图 4.4 当横向磁场突然撤掉时，单层涡旋的动力学演化行为，其中初始磁场设为  $B_x = 25\mu\text{G}$ 。(a) 涡旋中心在  $z = 0$  平面的运动轨迹；(b) 蓝色空心圆表示涡旋中心的位移在  $y$  方向的投影；(c) 红色空心圆表示凝聚体沿着  $x$  方向的磁化强度  $M_x$  随时间的变化；(d) 蓝色实线和红色虚线分别表示对 (b) 和 (c) 的傅里叶频谱分析结果，可见这两个振荡有着相同的特征频率。(b) 和 (c) 中的实线表示用简单的阻尼振荡对动力学行为的拟合，可见二者符合的非常好。

可见两个特征频率峰值完全重合。另外，我们这里之所以仅讨论沿  $x$  轴的磁化强度  $M_x$  是因为在整个演化过程中沿  $y$  轴和  $z$  轴的磁化强度一直保持为 0。

如果初态换成初始磁场较大时  $B_x = 70\mu\text{G}$  系统的基态（极化态），则单层凝聚体的自旋结构的淬火动力学演化将会是另一番情景。图 4.5 给出了初态为单层凝聚体处在极化态时的磁场淬火动力学，其初始磁场为  $B_x = 70\mu\text{G}$ ，上图表示磁化强度  $M_x$  随时间的变换，中图给出了涡旋形成的典型自旋结构：当撤掉磁场后，极化初态的自旋结构首先形成四个涡旋结构，然后慢慢融合成为两个，最后再形成稳定的单涡旋结构。同时，我们发现磁化强度  $M_x$  在缓慢地做阻尼振荡，直至涡旋结构稳定下来。一旦涡旋稳定下来（ $t > 110\omega_\perp$  时刻之后），涡旋的中心位移的运动同样表现为一个衰减震荡，而振荡频率与  $B_x = 25\mu\text{G}$  的振荡近似相同，在  $z = 0$  平面的运动亦表现为椭圆轨迹的螺旋运动，如图 4.5（下）。由此可得单层涡旋的振荡频率与凝聚体磁场淬火动力学演化的初态无关，仅由凝聚体内部物理参数决定。

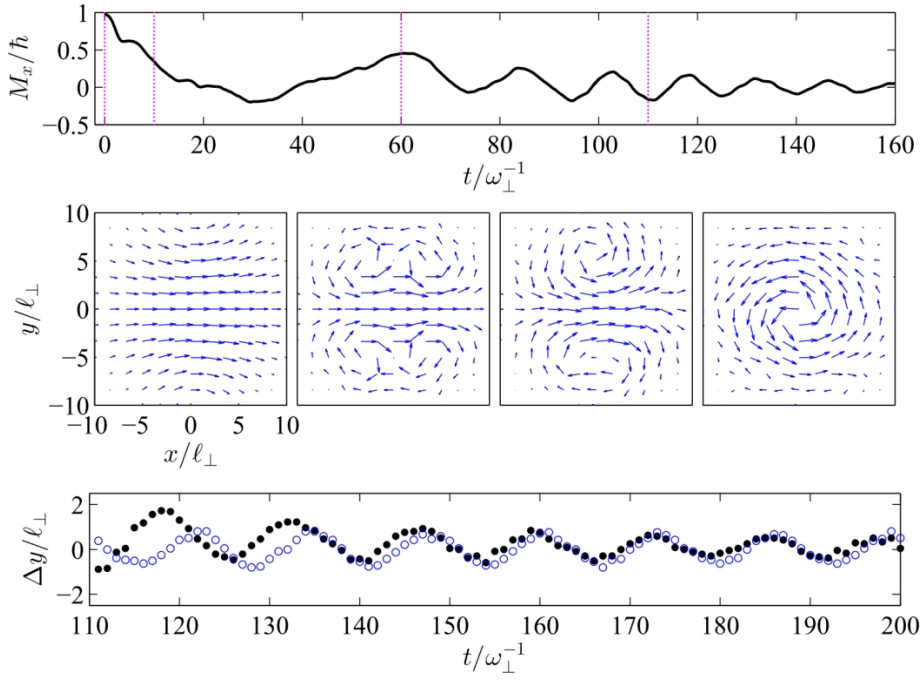


图 4.5 初态为单层凝聚体的极化态的磁场淬火动力学，初始磁场为  $B_x = 70\mu\text{G}$ 。上图表示沿  $x$  轴的磁化强度  $M_x$  随时间的变化。中图表示  $z=0$  平面的自旋分布，分别表示  $t=1, 10, 60$  和  $110\omega_{\perp}^{-1}$  时极化态到形成稳定涡旋结构的四个演化过程，这四个时刻对应于上图中粉色点线。下图的黑色实点表示，当涡旋结构稳定后涡旋中心的位移随时间在  $y$  轴上的投影，而蓝色空心圆圈对应于在初始磁场为  $B_x = 25\mu\text{G}$ （单层涡旋）时，涡旋中心位移随时间的变化，如图 4.4 (b)。

#### 4.4.2 PSVP 和 ASVP 中自旋涡旋对的动力学

对于双势阱的基态 PSVP 和 ASVP，随着外加横向磁场强度的增加，涡旋的磁化过程被分为三个阶段，而涡旋的个数也从 2 逐个减少到 0，我们把这三个阶段系统的基态分别叫做双涡旋态，双层单涡旋态和双层极化态。首先我们研究系统在磁场  $B_x = 25\mu\text{G}$  时的淬火动力学，此时 PSVP 态相同手征的两个涡旋中心向  $y$  轴相同方向偏移，而 ASVP 态相反手征的两个涡旋中心向  $y$  轴相反方向偏移。由于双势阱间存在层间偶极相互作用和隧穿相互作用，当磁场被迅速撤掉后，双层涡旋中心的动力学行为与单层涡旋的情况相比有很大的不同。图 4.6 (a) 表示 PSVP 相上下两层涡旋中心在  $x$ - $y$  平面随时间的变化，(b) 是它们在  $y$  轴的投影，可见它们在  $x$ - $y$  平面上也做螺旋运动，但是由于它们之间存在相互作用，这两个涡旋彼此的运动并不同步。



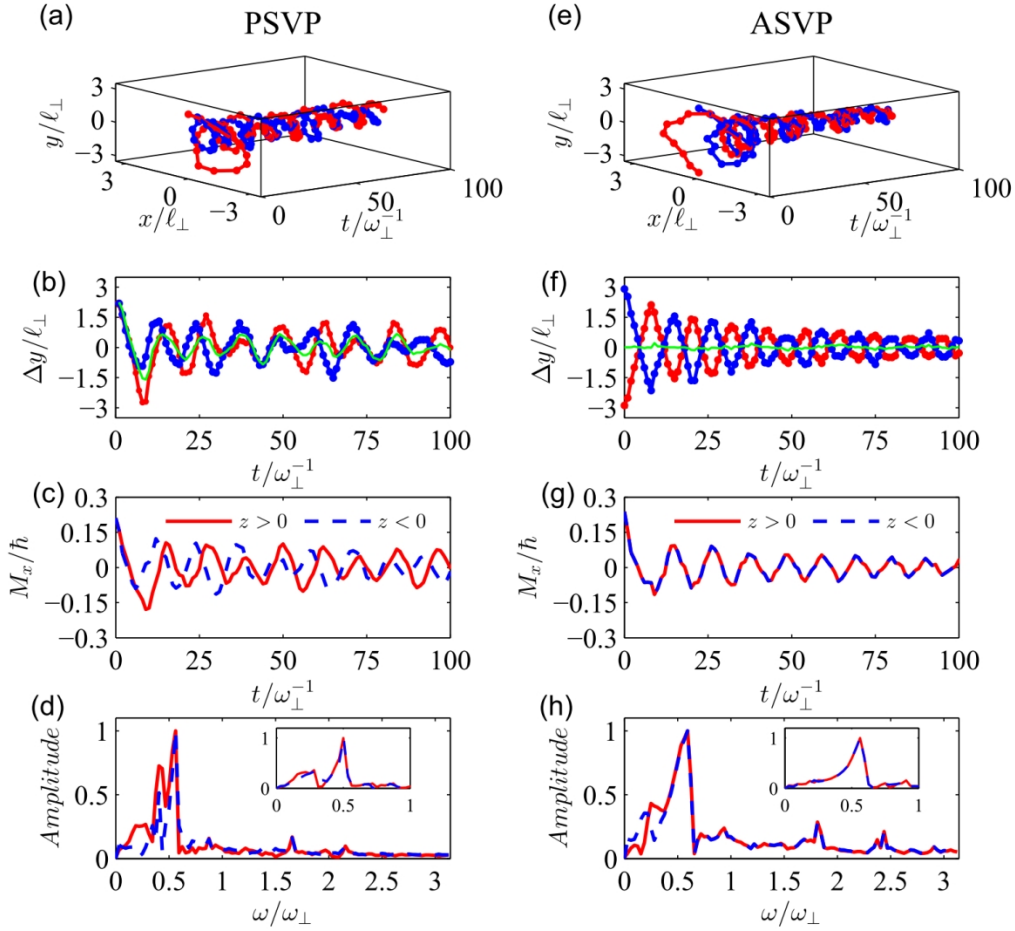


图 4.6 当横向磁场突然撤掉时，双势阱中 PSVP 和 ASVP 的涡旋对的动力学演化行为，其中为确保双涡旋的存在，初始磁场设为  $B_x = 25\mu\text{G}$ 。左边和右边分别表示 PSVP 和 ASVP 情况。其中 (a) 和 (e) 表示涡旋中心在  $z = z_{\min}$  平面随时间的螺旋运动，(b) 和 (f) 表示两个涡旋中心的位移在  $y$  方向的投影随时间的变化，(c) 和 (g) 表示上下两层的磁化强度  $M_x$  随时间的变化，它们与涡旋中心的位移有着相同的振荡频率，(d) 和 (h) 表示对这两个信号的傅里叶频谱分析，里面的小插图表示当两个涡旋之间被分开的距离比较大的时候的情况，对应于  $\sigma_0 = 1.2\ell_{\perp}$ 。在整个图中，红实线（蓝虚线）代表上面一层（下面一层），(b) 和 (f) 中的绿实线表示两个涡旋之间的平均距离。

这导致了两个涡旋运动的平均位移在振荡的过程中不能一直保持为 0，如图中绿色实线。类似于单层涡旋动力学，我们也研究了上下两层涡旋的磁化强度  $M_x$  随时间的变化，发现两部分磁化强度跟涡旋中心位移有着相同的振荡方式，如图 4.6 (c) 所示。为了弄清楚它们的振荡模式，我们对这两个振荡在  $t = 100\omega_{\perp}$  内做了傅里叶频谱分析，

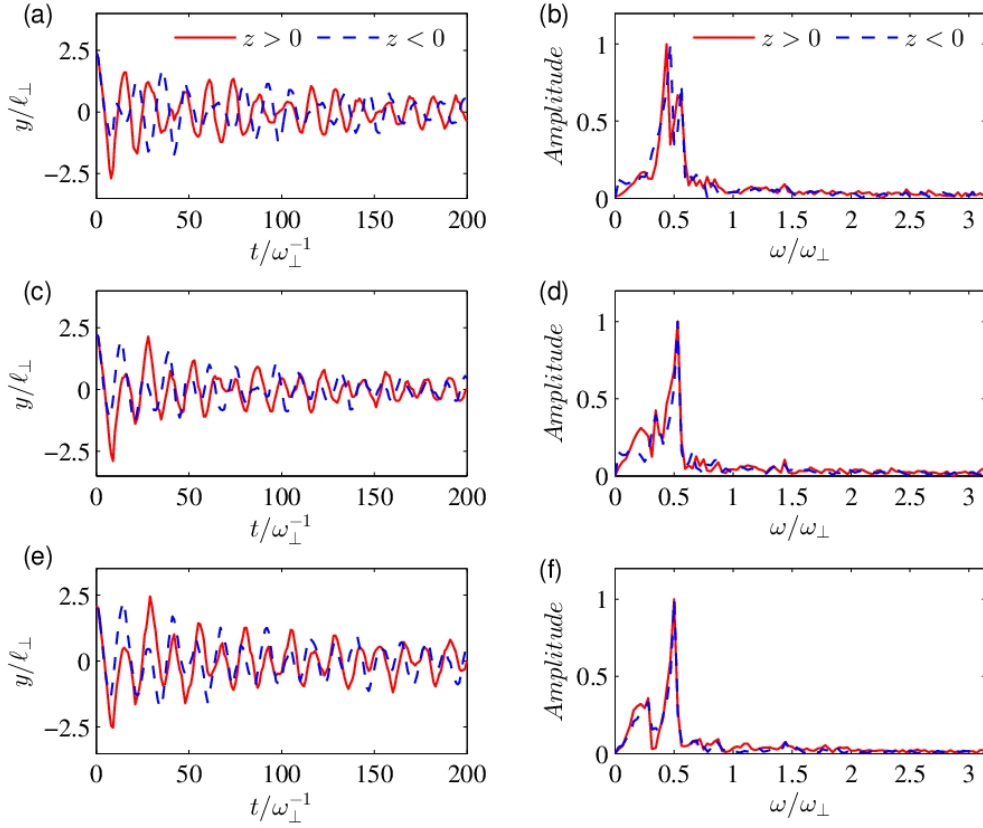


图 4.7 在 PSVP 相，在相同的阱间势垒  $\tilde{A} = 56\hbar\omega$  下， $\sigma_0$  对涡旋中心振荡的影响。左边是涡旋中心在  $y$  轴的位移随时间的变化，右边是与左边相对应的傅里叶频谱分析。从上到下对应的势阱宽度分别为  $\sigma_0 = 0.5, 0.65$  和  $1.2\ell_{\perp}$ ，初始磁场为  $B_x = 25\mu\text{G}$ 。

观察到虽然这两个振荡频率不同，但是它们有个共同的特征，即存在两个可比较的频率，这意味着它们的振荡形成了拍现象，如图 4.6 (d)。为了研究两个涡旋之间的相互作用，我们改变高斯势垒宽度观察  $\sigma_0$  对两部分的动力学行为的影响。从数值模拟的结果中我们发现，随着  $\sigma_0$  的变化两个频率之间的权重在发生变化。图 4.7 给出了 PSVP 相在固定阱间势垒  $\tilde{A} = 56\hbar\omega$  的情况下，调节  $\sigma_0$  分别为  $0.5, 0.65$  和  $1.2\ell_{\perp}$  时涡旋中心位移随时间的振荡（左图）及对应的傅里叶频谱分析（右图），随着  $\sigma_0$  的增加代表螺旋运动频率的主峰朝着高频率方向移动，其余的频率峰值为高次谐波。这可以理解为，当我们固定两个势阱的阱间势垒  $\tilde{A}$  时，两个涡旋的层间偶极相互作用和双势阱间的隧穿劈裂会随  $\sigma_0$  的增加而减小。当  $\sigma_0 = 1.2\ell_{\perp}$  时 PSVP 相中起主要作用的是层内的偶极相互作用，所以涡旋动力学行为与单层的凝聚体的情况非常类似，主要由相对较强的非线性相互作用主导，而且主要的特征频率更加趋近  $0.50\omega_{\perp}$ ，如图 4.6 (d) 中的插图。

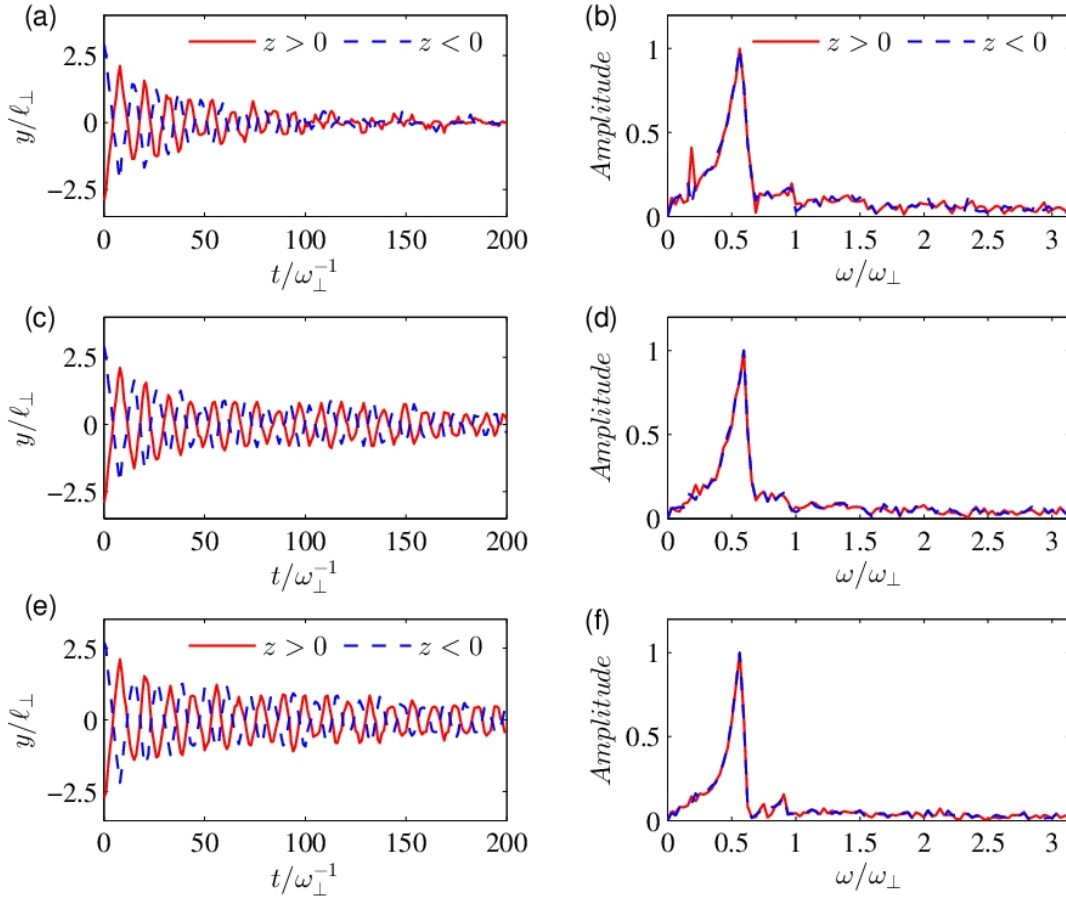


图 4.8 在 ASVP 相, 在相同的阱间势垒  $\tilde{A} = 239\hbar\omega$  下,  $\sigma_0$  对涡旋中心振荡的影响。左边是涡旋中心在  $y$  轴的位移随时间的变化, 右边是与左边相对应的傅里叶频谱分析。从上到下对应的阱宽分别为  $\sigma_0 = 0.5, 0.65$  和  $1.2l_{\perp}$ , 初始磁场为  $B_x = 25\mu G$ 。

由于形成 ASVP 需要更高的势垒, 所以两个势阱间的隧穿相互作用就会被减弱, 导致在演化过程中层间偶极相互作用起着关键作用。图 4.6 (e) 和 (f) 分别表示 ASVP 相涡旋中心的轨迹以及其在  $y$  方向的投影。我们发现, 在  $x$ - $y$  平面具有相反手征的两个涡旋展现出双螺旋结构的运动轨迹, 由于这两涡旋中心的轨迹是相反的, 而且具有相同的振幅, 导致这两个涡旋中心的平均位移随时间的变化几乎为 0, 如图 4.6 (f) 中绿色实线。图 4.6 (g) 表示在演化过程中, 上下层的磁化强度  $M_x$  随时间的变化, 可见二者是完全重合的, 而且与单层结构一样, 涡旋中心位移的变化和  $M_x$  的变化都没有出现拍现象。图 4.8 (h) 给出了傅里叶频谱分析的结果, 我们只能观察到单一的峰值谱, 而且当  $\sigma_0$  增大到  $1.2l_{\perp}$  涡旋中心振荡的特征频率会局域到  $0.56\omega_{\perp}$ , 如图 4.6 (h) 中插图。图 4.8 给出了 ASVP 相在相同的  $\tilde{A} = 239\hbar\omega$  下, 不同的阱宽  $\sigma_0$  对涡旋中心振荡的影响, 左图和右图分别表示  $\sigma_0 = 0.5l_{\perp}$  时,

$\beta = 0.03\omega_{\perp}$ ，这是  $\sigma_0 = 1.2\ell_{\perp}$  时涡旋中心在  $y$  轴的位移随时间的变化及相应的频谱分析，可以看出随着  $\sigma_0$  增大振荡的阻尼率  $\beta$  发生了变化，即当  $\sigma_0 = 0.5\ell_{\perp}$  时， $\beta = 0.03\omega_{\perp}$ ，这是  $\sigma_0 = 1.2\ell_{\perp}$  时的三倍多（ $\beta = 0.01\omega_{\perp}$ ），它们有共同的振荡频率  $\omega_0 = 0.52\omega_{\perp}$ ，也就是说随着势阱间距的增大，涡旋振荡衰减的越慢。

#### 4.4.3 PSVP 和 ASVP 中单涡旋态的动力学

接下来我们选择中间的初始磁场，这时动力学演化的初态只有一层（下层）含有涡旋，而另一层（上层）的自旋被极化，导致  $M_x(z < 0) < M_x(z > 0)$ 。图 4.9 给出了撤掉初始磁场后，PSVP 和 ASVP 相单涡旋态和极化态的动力学演化，其中左图和右图分别表示 PSVP 和 ASVP 相初始磁场分别为  $B_x = 50\mu G$  和  $B_x = 60\mu G$ ，(a) 和 (b) 表示沿  $x$  方向的磁化强度  $M_x$  随时间的变化，(c) 和 (d) 表示涡旋中心位移在  $y$  方向的投影随时间的变化。动力学演化过程类似于在单层涡旋的情况，可以分为以下两个阶段：

(1) 涡旋形成阶段——PSVP 相形成具有相同手征的自旋涡旋对，ASVP 相形成具有相反手征的自旋涡旋对，但是后者形成稳定涡旋对的时间相对要长一些。

(2) 涡旋振荡阶段——在  $t = 25\omega_{\perp}^{-1}$  (PSVP) 和  $t = 50\omega_{\perp}^{-1}$  (ASVP) 后，稳定涡旋的中心做螺旋运动。

我们注意到，PSVP 相上下两层磁化强度和涡旋中心位移的振荡幅度都很小，而在 ASVP 相这两者却以比较大的振荡幅度和比较低的频率振荡。ASVP 相形成的两个稳定涡旋中心在  $y$  方向上具有相同的运动轨迹，如图 4.9 (d) 所示，且每一层上的磁化强度  $M_x$  相反，这个特点导致了沿  $x$  轴的总磁化几乎消失，如图 4.9 (a) 中的黑实线。

#### 4.4.4 PSVP 和 ASVP 中极化态的动力学

最后，我们考虑大磁场  $B_x = 70\mu G$  下的极化初态，即全部自旋被极化沿  $x$  方向。经过一段时间演化后，PSVP 和 ASVP 都可以态演化成手征相反的自旋涡旋对，跟演化的初态没有关系。图 4.9 (e)-(f) 给出了 PSVP 和 ASVP 相的磁化强度  $M_x$  以及每层的涡旋中心的振荡随时间的变化。可见 PSVP 相两层涡旋的磁化强度  $M_x$  随时间的变化与 ASVP 时相一致，但是 ASVP 相涡旋中心的振荡被大大地压制，即一旦涡旋稳定，涡旋中心被钉在  $x$ - $y$  平面的原点几乎不能移动，如图 4.9 (h) 所示。以上所描述的这些性质，可以帮助实验上来识别 PSVP 和 ASVP 这两独特的自旋结构。

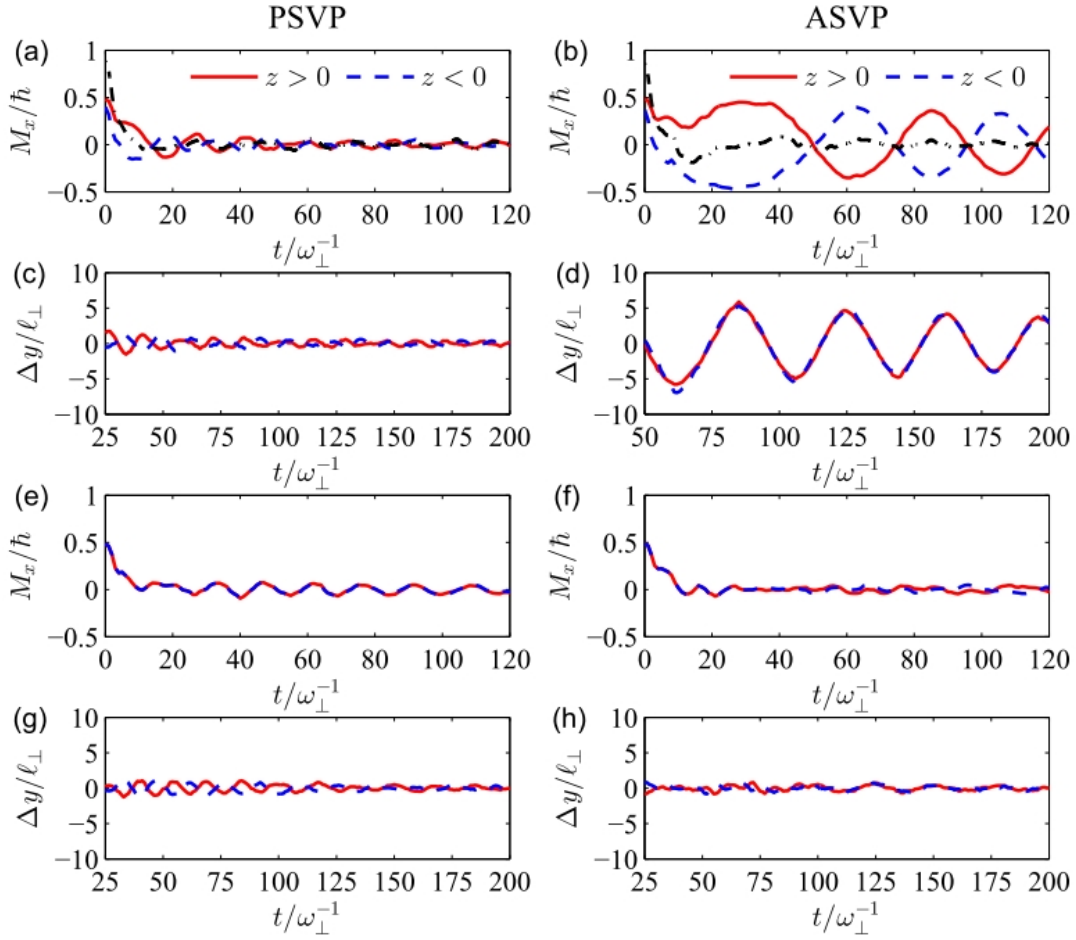


图 4.9 撤掉磁场后, PSVP 和 ASVP 相中单涡旋态和极化态的动力学演化。(a), (b), (e) 和 (f) 分别表示沿  $x$  方向的磁化强度随时间的变化, (c), (d), (g) 和 (h) 分别表示涡旋中心位移在  $y$  方向的投影随时间的变化, 相应的初始磁场分别为  $B_x = 60\mu\text{G}$  别表 (a) 和 (c),  $50\mu\text{G}$  (b) 和 (d),  $70\mu\text{G}$  (e) - (h)。

## 4.5 本章小结

总之, 在这一章我们研究了耦合自旋涡旋对的碰撞动力学和磁场淬灭动力学, 其中耦合涡旋对由束缚在双势阱中的具有弱相互作用的偶极旋量 BEC 的基态形成。我们发现在无磁场时, 如果突然撤掉双势阱的势垒, 两片原子云发生碰撞, 而且在碰撞过程中它们的手征发生交换。通过碰撞过程的密度分布可以直接区分 PSVP 和 ASVP 相, 如根据上下两层的相位差可以标记同相碰撞或反相碰撞, 因为同相碰撞的密度中心会出现尖峰, 而反相碰撞的质心则不会出现。随后受纳米磁片和多层结构的动力学实验研究的启发, 我们分别研究了当外加磁场突然撤掉后, 单层和双层涡旋磁场的淬灭动力学行为。我们发现, 由于存在由磁场淬灭而产生的自旋转矩,

涡旋中的位移会随着时间在  $z = z_{\min}$  平面做螺旋运动。另外，涡旋中心的位移和相应的磁化强度可以用衰减的简谐振荡模式来拟合，这个振荡模式有着固定的频率和阻尼率。这些有趣的动力学现象，可以为实验上实现 PSVP 和 ASVP 相提供可分辨的信号。

## 第五章 总结与展望

随着科学的发展和实验手段的进步，偶极相互作用在研究旋量 BEC 的性质中起着越来越重要的作用。偶极旋量 BEC 在对称的薄饼状谐振子势阱中的基态是一个自旋涡旋态。自旋涡旋态与薄纳米磁片中的磁涡旋态非常类似，而 BEC 又是一个理想的实验平台，能为涡旋性质以及其动力学的研究提供更多可调参数。

首先，我们研究了自旋 1 偶极旋量 BEC 系统在双势阱中的基态特性。有效双势阱可以用一束高斯激光产生，当我们固定双势阱的两个阱的宽度后，发现随势垒高度变化，系统的基态从平行耦合涡旋对 (PSVP) 转化成反平行耦合涡旋对 (ASVP)，类似于纳米磁性材料中的 F-N-F 三层结构，导致相变的原因是两个势阱的阱间偶极相互作用和隧穿劈裂相互作用之间的竞争，而且随着阱间偶极相互作用的增强，ASVP 相两层涡旋自旋 0 分量的波函数存在  $\pi$  相位差。

其次，我们研究了系统在均匀横向磁场下的基态性质。与单层涡旋在横向磁场中的性质类似，PSVP 的涡旋朝着相同的方向外偏移，而 ASVP 的两个涡旋则朝着彼此相反的方向移动。但随着磁场强度的增加，上下两层涡旋中心并不是同时消失，而是逐个消失。

然后，为了给实验上观察到上述自旋涡旋对提供可辨别的信息，我们研究了两个涡旋的面对面碰撞动力学。当系统分别制备在 PSVP 和 ASVP 态后，突然撤掉双势阱，两层势阱中的涡旋分别向它们的质心运动，然后穿过彼此形成周期碰撞，其行为类似于量子牛顿摆。在碰撞过程中上下层涡旋的手征会发生交换，而且不同的涡旋对展现出不同的密度干涉图像以及由于相位差而引起的不同碰撞类型（同相碰撞或反相碰撞）。

最后，我们还研究了不同磁场强度下系统基态的淬火动力学行为。当突然撤掉磁场后，单层涡旋中心的位移开始做螺旋运动，其在  $y$  轴的投影以相同的频率和阻尼率做衰减振荡。对于双层涡旋，由于涡旋间的偶极相互作用以及隧穿相互作用，PSVP 相的两个涡旋的振荡不同步，而 ASVP 相的两个涡旋的运动方向虽然相反，但是振幅和频率都一样。对于只有一个涡旋的情况，当涡旋结构稳定后，ASVP 相的两个涡旋中心还以很大的振幅振荡，而 PSVP 的涡旋中心在原点附近做微小振荡。对于两个涡旋都被极化的情况，撤掉磁场后系统也会演化成自旋涡旋态，只是涡旋中心的运动被大大地压制了。

显然，偶极旋量凝聚体与纳米磁性材料中的涡旋动力学基于不同的物理机制，这正我们未来研究的重点。在以后的工作中，我们计划研究各向异性的势阱对偶极旋量 BEC 基态自旋结构的影响，如不对称的双势阱，空间三个方向都不对称的势阱以及扩展成三势阱甚至光晶格势阱等等，并对它们的动力学行为进行研究；研究加入自旋轨道耦合后系统的基态相图以及对耦合自旋涡旋态的影响，并进一步探索原子间的相互作用，为实验提供理论指导。



## 参 考 文 献

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science*, 1995 269, 198.
- [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Van druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* 1995, 75, 3969.
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, R. G. Hulet, Bose–Einstein condensation of lithium: observation of limited condensate number, *Phys. Rev. Lett.* 1997, 78, 985–989.
- [4] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, W. Ketterle, Optical confinement of a Bose–Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.* 1998, 80, 2027.
- [5] T.-L. Ho, Spinor Bose condensates in optical trap, *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81, 742.
- [6] T. Ohmi, K. Machida, Bose–Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases, *J. Phys. Soc. Japan*, 1998, 67, 1822.
- [7] C. K. Law, H. Pu and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81, 5257.
- [8] H. Pu, C. K. Law, S. Raghavan, J. H. Eberly and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. A*, 1999, 60, 1463.
- [9] H. Pu, S. Raghavan and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. A* 61, 023602 (2000).
- [10] W. Zhang, D. L. Zhou, M.-S. Chang, M. S. Chapman and L. You, *Phys. Rev. A*, 2005, 72, 013602.
- [11] T. Kuwamoto, K. Araki, T. Eno and T. Hirano, *Phys. Rev. A*, 2004, 69, 063604.
- [12] H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa1, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, and K. Sengstock, *Phys. Rev. Lett.* 2004, 92, 040402.
- [13] M. Chang, Q. Qin, W. Zhang, L. You and M. S. Chapman, *Nature Phys.*, 2005, 1,

111.

- [14] J. Stenger, S. Inouye, D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur, W. Ketterle, Spin domains in ground-state Bose–Einstein condensates, *Nature*, 1998, 396, 345.
- [15] Y. Kawaguchi and M. Ueda, Spinor Bose-Einstein condensates, *Phys. Rep.* 2012, 520, 253.
- [16] Y. J. Lin, R. L. Compton, K. Jimenez-Garcia, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nature (London)*, 2009, 462, 628.
- [17] C. Wang, C. Gao, C. M. Jian, and H. Zhai, *Phys. Rev. Lett.* 2010, 105, 160403.
- [18] Y. Deng, J. Cheng, H. Jing, C.-P. Sun, and S. Yi, *Phys. Rev. Lett.* 2012, 108, 125301.
- [19] S. Murmann, F. Deuretzbacher, G. Zürn, J. Bjerlin, S. M. Reimann, L. Santos, T. Lompe, S. Jochim, Antiferromagnetic Heisenberg Spin Chain of a Few Cold Atoms in a One-Dimensional Trap, *Phys. Rev. Lett.* 2015, **115**, 215301.
- [20] F. Deuretzbacher, K. Fredenhagen, D. Becker, K. Bongs, K. Sengstock, and D. Pfannkuche, Exact Solution of Strongly Interacting Quasi-One-Dimensional Spinor Bose Gases, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 160405.
- [21] P. Massignan, J. Levinsen, and M. M. Parish, Magnetism in strongly interacting one-dimensional quantum mixtures, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, **115**, 247202.
- [22] L. Yang and X. Cui, Effective spin-chain model for strongly interacting one-dimensional atomic gases with an arbitrary spin, *Phys. Rev. A*, 2016, **93**, 033617.
- [23] W. Zhang, S. Yi and L. You, Mean field ground state of a spin-1 condensate in a magnetic field, *New J. Phys.* 2003, 5, 77.1.
- [24] D. M. S. Kurn and M. Ueda, Spinor Bose gases: Explorations of symmetries, magnetism and quantum dynamics, *Rev. Mod. Phys.*, 2013, 85, 1191.

- 
- [25] T. Lanhaye, J. Metz, B. Fröhlich, T. Koch, M. Meister, A. Griesmaier, T. Pfau, and H. Saito, d-Wave Collapse and Explosion of a Dipolar Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101, 080401 .
- [26] M. Fattori, G. Roati, B. Deissler, C. D’Errico, M. Zaccanti, M. Jona-Lasinio, and L. Santos, Magnetic Dipolar Interaction in a Bose-Einstein Condensate Atomic Interferometer, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101, 190405.
- [27] S. E. Pollack, D. Dries, M. Junker, Y. P. Chen, T. A. Corcovilos, and R. G. Hulet Extreme Tunability of Interactions in a  $^7\text{Li}$  Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102, 090402.
- [28] S. Yi, and L. You, Trapped atomic condensates with anisotropic interactions, *Phys. Rev. A*, 2000, 61, 041604.
- [29] K. Góral, K. Rzazewski, and T. Pfau, Bose-Einstein condensation with magnetic dipole-dipole forces, *Phys. Rev. A*, 2000, 61, 051601.
- [30] L. Santos, G. V. Shlyapnikov, P. Zoller, and M. Lewenstein, Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases, *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85, 1791.
- [31] S. Yi, L. You, and H. Pu, Quantum Phases of Dipolar Spinor Condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93, 040403.
- [32] S. Yi and H. Pu, Magnetization, squeezing, and entanglement in dipolar spin-1 condensates, *Phys. Rev. A*, 2006, 73, 023602.
- [33] L. Santos and T. Pfau, Spin-3 Chromium Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 96, 190404;
- [34] M. Vengalattore, S. R. Leslie, J. Guzman, and D. M. Stamper-Kurn, Spontaneously Modulated Spin Textures in a Dipolar Spinor Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100, 170403.
- [35] S. Yi and H. Pu, Dipolar spinor Bose-Einstein condensate, arXiv:0804.0191.
- [36] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Vortices in a Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.*, 1999, 83, 2498.

- [37] A. E. Leanhardt, Y. Shin, D. Kielpinski, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Coreless Vortex Formation in a Spinor Bose-Einstein Condensate, *Phys Rev Lett.*, 2003, 90, 140403.
- [38] J. M. Doyle, B. Friedrich, J. Kim, and D. Patterson, Buffer-gas loading of atoms and molecules into a magnetic trap, *Phys. Rev. A*, 1995, 52, R2515.
- [39] J. D. Weinstein, R. Decarvalho, T. Guillet, B. Friedrich, and J. M. Doyle, Magnetic trapping of calcium monohydride molecules at millikelvin temperatures, *Nature*, 1998, 395, 148.
- [40] D. Egorov, T. Lahaye, W. Schöllkopf, B. Friedrich, and J. M. Doyle, Buffer-gas cooling of atomic and molecular beams, *Phys. Rev. A*, 2002, 66, 043401.
- [41] S. Y. T. van de meerakker, H. L. Bethlem, and G. Meijer, Taming molecular beams, *Nat. Phys.*, 2008, 4, 595.
- [42] E. S. Shuman, J. F. Barry, D. Demille, Laser cooling of a diatomic molecule, *Nature* 2010, 467, 820.
- [43] C. A. Stan, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, W. Ketterle, Observation of feshbach resonances between two different atomic species, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93, 143001.
- [44] E. Wille, F. M. Spiegelhalder, G. Kerner, D. Naik, A. Trenkwalder, G. Hendl, F. Schreck, R. Grimm, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, S. J. J. M. F. Kokkelmans, E. Tiesinga, P. S. Julienne, Exploring an ultracold fermi-fermi mixture: interspecies feshbach resonances and scattering properties of  ${}^6\text{Li}$  and  ${}^{40}\text{K}$ , *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100, 053201.
- [45] B. Deh, C. Marzok, C. Zimmermann, P.W. Courteille, Feshbach resonances in mixtures of ultracold  ${}^6\text{Li}$  and  ${}^{87}\text{Rb}$  gases, *Phys. Rev. A*, 2008, 77, 010701.
- [46] E. Hodby, S. T. Thompson, C. A. Regal, M. Greiner, A. C. Wilson, D. S. Jin, E. A. Cornell, C. E. Wieman, Production efficiency of ultracold feshbach molecules in bosonic and fermionic systems, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94, 120402.

- [47] K. Pilch, A. D. Lange, A. Prantner, G. Kerner, F. Ferlaino, H. C. Nägerl, R. Grimm, Observation of interspecies Feshbach resonances in an ultracold Rb-Cs mixture, *Phys. Rev. A*, 2009, 79, 042718.
- [48] J. Deiglmayr, A. Grochola, M. Repp, K. Mörtlbauer, C. Glück, J. Lange, O. Dulieu, R. Wester, M. Weidemüller, Formation of ultracold polar molecules in the rovibrational ground state, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101, 133004.
- [49] A. Ridinger, S. Chaudhuri, T. Salez, D.R. Fernandes, N. Bouloufa, O. Dulieu, C. Salomon, F. Chevy, Photoassociative creation of ultracold heteronuclear  ${}^6\text{Li}{}^{40}\text{K}$  molecules, *Europhys. Lett.* 2011, 96, 33001.
- [50] C. Haimberger, J. Kleinert, M. Bhattacharya, N.P. Bigelow, Formation and detection of ultracold ground-state polar molecules, *Phys. Rev. A*, 2004, 70 021402.
- [51] K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M.H.G. de Miranda, A. Pe'er, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, J. Ye, A high phase-space-density gas of polar molecules, *Science*, 2008, 322, 231.
- [52] K. Aikawa, D. Akamatsu, M. Hayashi, K. Oasa, J. Kobayashi, P. Naidon, T. Kishimoto, M. Ueda, S. Inoué, Coherent transfer of photoassociated molecules into the rovibrational ground state, *Phys. Rev. Lett.* 2010, 105, 203001.
- [53] J. M. Sage, S. Sainis, T. Bergeman, D. Demille, Optical production of ultracold polar molecules, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94, 203001.
- [54] N. Nemitz, F. Baumer, F. Münchow, S. Tassy, A. Görlitz, Production of heteronuclear molecules in an electronically excited state by photoassociation in a mixture of ultracold Yb and Rb, *Phys. Rev. A*, 2009, 79, 061403.
- [55] R. Heidemann, U. Raitzsch, V. Bendkowsky, B. Butscher, R. Löw, T. Pfau, Rydberg excitation of Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100, 033601.
- [56] A. Hubert and R. Schäfer, *Magnetic Domains* (Springer, Berlin, 1998).

- [57] Kittel, C., Introduction to Solid State Physics, 7th ed. Wiley, New York, 1996, p. 475.
- [58] C. L. Chien, F. Q. Zhu, and J. G. Zhu, Patterned nanomagnets, *Phys. Today*, 2007, 60(6), 40.
- [59] S. Wintz, Christopher Bunce, A. Neudert, M. Körner, T. Strache, M. Buhl, A. Erbe, S. Gemming, J. Raabe, C. Quitmann, and J. Fassbender, Topology and Origin of Effective Spin Meron Pairs in Ferromagnetic Multilayer Elements, *Phys. Rev. Lett.* 2013, 110, 177201.
- [60] C. Phatak, A. K. Petford-Long, and O. Heinonen, Direct Observation of Unconventional Topological Spin Structure in Coupled Magnetic Discs, *Phys. Rev. Lett.* 2012, 108, 067205.
- [61] D. L. Huber, Equation of motion of a spin vortex in a two-dimensional planar magnet, *J. Appl. Phys.* 1982, 53, 1899.
- [62] E. Feldtkeller and H. Thomas, Struktur und Energie von Blochlinien in dünnen ferromagnetischen Schichten, *Phys. Kondens. Mater.* 1965, 4, 8.
- [63] R. P. Cowburn, D. K. Koltsov, A. O. Adeyeye, M. E. Welland, and D. M. Tricker, Single-Domain Circular Nanomagnets, *Phys. Rev. Lett.* 1999, 83, 1042.
- [64] T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf, K. Shigeto, and T. Ono, Magnetic Vortex Core Observation in Circular Dots of Permalloy, *Science*, 2000, 289, 930.
- [65] J. Raabe, J. Zweck, and D. Weiss, Magnetization pattern of ferromagnetic nanodisks, *J. Appl. Phys.* 2000, 88, 4437.
- [66] A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode, O. Pietzsch, M. Morgenstern, and R. Wiesendanger, Direct Observation of Internal Spin Structure of Magnetic Vortex Cores, *Science*, 2002, 298, 577.
- [67] S.-B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl, A. Bauer, A. Doran, J. Stöhr, and H. A. Padmore, Vortex Core-Driven Magnetization Dynamics, *Science*, 2004, 304, 420.
- [68] S. Petit-Watelot, J.-V. Kim, A. Ruotolo, R. M. Otxoa, K. Bouzehouane, J. Grollier,

- A. Vansteenkiste, B. Van de Wiele, V. Cros, and T. Devolder, Commensurability and chaos in magnetic vortex oscillations, *Nat. Phys.*, 2012, 8, 682.
- [69] K. S. Buchanan, K. Y. Guslienko, A. Doran, A. Scholl, S. D. Bader, and V. Novosad, Magnetic remanent states and magnetization reversal in patterned trilayer nanodots, *Phys. Rev. B*, 2005, 72, 134415.
- [70] K. W. Chou, A. Puzic, H. Stoll, G. Schütz, B. Van Waeyenberge, T. Tylliszczak, K. Rott, G. Reiss, H. Brückl, I. Neudecker, D. Weiss, and C. H. Back, Vortex dynamics in coupled ferromagnetic multilayer structures, *J. Appl. Phys.*, 2006, 99, 08F305.
- [71] P. Vavassori, V. Bonanni, A. Busato, D. Bisero, G. Gubbiotti, A. O. Adeyeye, S. Goolaup, N. Singh, C. Spezzani, and M. Sacchi, Magnetostatic and exchange coupling in the magnetization reversal of trilayer nanodots, *J. Phys. D*, 2008, 41, 134014.
- [72] J. Wu, D. Carlton, E. Oelker, J. S. Park, E. Jin, E. Arenholz, A. Scholl, C. Hwang, J. Bokor, and Z. Q. Qiu, Switching a magnetic vortex by interlayer coupling in epitaxially grown Co/Cu/Py/Cu(001) trilayer disks, *J. Phys.: Condens. Matter*, 2010, 22, 342001.
- [73] J. Kurde, J. Miguel, D. Bayer, J. Sánchez-Barriga, F. Kronast, M. Aeschlimann, H. A. Dürr, and W. Kuch, Magnetostatic coupling of  $90^\circ$  domain walls in Fe<sub>19</sub>Ni<sub>81</sub>/Cu/Co trilayers, *New J. Phys.*, 2011, 13, 033015.
- [74] S. Wintz, T. Strache, M. Körner, M. Fritzsche, D. Markó, I. Mönch, R. Mattheis, J. Raabe, C. Quitmann, J. McCord, A. Erbe, and J. Fassbender, Direct observation of antiferromagnetically oriented spin vortex states in magnetic multilayer elements, *Appl. Phys. Lett.*, 2011, 98, 232511.
- [75] S. Wintz, T. Strache, M. Körner, C. Bunce, A. Banholzer, I. Mönch, R. Mattheis, J. Raabe, C. Quitmann, J. McCord, A. Erbe, K. Lenz, and J. Fassbender, Control of vortex pair states by post-deposition interlayer exchange coupling modification, *Phys. Rev. B*, 2012, 85, 134417.

- [76] S. Wintz, C. Bunce, A. Banholzer, M. Körner, T. Strache, R. Mattheis, J. McCord, J. Raabe, C. Quitmann, A. Erbe, and J. Fassbender, Interlayer-coupled spin vortex pairs and their response to external magnetic fields, *Phys. Rev. B*, 2012, 85, 224420.
- [77] O.V.Sukhostavets, G.R.Aranda, and K. Y. Guslienko, Magnetization configurations of a tri-layer nanopillar ferromagnet-nonmagnetic spacer-ferromagnet, *J. Appl. Phys.*, 2012, 111, 093901.
- [78] A. A. Awad, A. Lara, V. Metlushko, K. Y. Guslienko, and F. G. Aliev, Broadband probing magnetization dynamics of the coupled vortex state permalloy layers in nanopillars, *Appl. Phys. Lett.*, 2012, 100, 262406.
- [79] K. Yu. Guslienko, K. S. Buchanan, S. D. Bader, and V. Novosad, Dynamics of coupled vortices in layered magnetic nanodots, *Appl. Phys. Lett.*, 2005, 86, 223112.
- [80] S. Wintz, C. Bunce, A. Neudert, M. Körner, T. Strache, M. Buhl, A. Erbe, S. Gemming, J. Raabe, C. Quitmann, and J. Fassbender, Topology and Origin of Effective Spin Meron Pairs in Ferromagnetic Multilayer Elements. *Phys. Rev. Lett.* 2013, 110, 177201.
- [81] B. V. Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll, K. W. Chou, T. Tyliczszak, R. Hertel, M. Fähnle, H. Brückl, K. Rott, G. Reiss, I. Neudecker, D. Weiss, C. H. Back, and G. Schütz, Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field, *Nature*, 2006, 444, 461.
- [82] S. D. Bader, Colloquium: Opportunities in nanomagnetism, *Rev. Mod. Phys.* 2006, 78, 1.
- [83] S. B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl, A. Bauer, A. Doran, J. Stohr, and H. A. Padmore, Vortex Core-Driven Magnetization Dynamics, *Science*, 2004, 304, 420.
- [84] K. Y. Guslienko, B. A. Ivanov, V. Novosad, Y. Otani, H. Shima, and K. Fukamichi, Eigenfrequencies of vortex state excitations in magnetic submicron-size disks, *J. Appl. Phys.* 2002, 91, 8037.



- 
- [85] K. Y. Guslienko, Low-frequency vortex dynamic susceptibility and relaxation in mesoscopic ferromagnetic dots, *Appl. Phys. Lett.* 2006, 89, 022510 .
- [86] K.-S. Lee, K. Y. Guslienko, J.-Y. Lee, and S.-K. Kim, Ultrafast vortex-core reversal dynamics in ferromagnetic nanodots, *Phys. Rev. B* , 2007, 76, 174410 .
- [87] K. Yamada, S. Kasai, Y. Nakatani, K. Kobayashi, H. Kohno, A. Thiaville, and T. Ono, Electrical switching of the vortex core in a magnetic disk, *Nature Mater.*, 2007, 6, 269.
- [88] H.-G. Piao, D. Djuhana, S.-K. Oh, S.-C. Yu, and D.-H. Kim, Multibits magnetic recording using a ferromagnetic element with shifted vortex core position, *Appl. Phys. Lett.*, 2009, 94, 052501.
- [89] B. Van Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll, K. W. Chou, T. Tyliczszak, R. Hertel, M. Fähnle, H. Brückl, K. Rott, G. Reiss, I. Neudecker, D. Weiss, C. H. Back, and G. Schütz, Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field, *Nature London*, 2006, 444, 461.
- [90] K. Y. Guslienko, K. S. Buchanan, S. D. Bader, and V. Novosad, Dynamics of coupled vortices in layered magnetic nanodots, *Appl. Phys. Lett.* 2005, 86, 223112 .
- [91] K. W. Chou, A. Puzic, H. Stoll, G. Schütz, B. Van Waeyenberge, T. Tyliczszak, K. Rott, and G. Reiss, Vortex dynamics in coupled ferromagnetic multilayer structures, *J. App. Phys.*, 2006, 99, 08F305.
- [92] S. H. Jun, J. H. Shim, S. K. Oh, S. C. Yu, D. H. Kim, B. Mesler, and P. Fischer, Nonlinear motion of coupled magnetic vortices in ferromagnetic/nonmagnetic/ferromagnetic trilayer, *Appl. Phys. Lett.*, 2009, 95, 142509.
- [93] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, A quantum Newton's cradle, *Nature*, 2006, 440, 4693.
- [94] J. H. V. Nguyen, P. Dyke, D. Luo, B. A. Malomed, and R. G. Hulet, Collisions of matter-wave solitons, *Nature Phys.* 2014, 10, 3135.

- [95] T. Yang, A. J. Henning, and K. A. Benedict, Vortex interactions in the collision of Bose–Einstein condensates, *Laser Phys.* 2014, 24, 115502.
- [96] S. W. Seo, S. Kang, W. J. Kwon, and Y. Shin, Half-Quantum Vortices in an Antiferromagnetic Spinor Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 115, 015301.
- [97] S. W. Seo, W. J. Kwon, S. Kang, and Y. Shin, Collision of half-quantum vortices in a spinor Bose-Einstein condensate, arXiv:1512.07696.
- [98] T. Kaneda and H. Saito, Collision dynamics of Skyrmions in a two-component Bose–Einstein condensate, arXiv:1601.01773.
- [99] J. P. Burke, Jr. and J. L. Bohn, Ultracold scattering properties of the short-lived Rb isotopes, *Phys. Rev. A*, 1999, 59, 1303.
- [100] N. N. Klausen, J. L. Bohn, and C. H. Greene, Nature of spinor Bose-Einstein condensates in rubidium, *Phys. Rev. A*, 2001, 64, 053602.
- [101] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar., Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88, 093201.
- [102] S. Yi and H. Pu, Spontaneous Circulation in Ground-State Spinor Dipolar Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97, 020401.
- [103] K. De’Bell, A. B. Maclsaac, and J. P. Whitehead, Dipolar effects in magnetic thin films and quasi-two-dimensional systems, *Rev. Mod. Phys.*, 2000, 72, 225.
- [104] L. Santos, T. Pfau, Spin-3 chromium Bose–Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 96, 190404.
- [105] Y. Kawaguchi, H. Saito, M. Ueda, Einstein-de Haas effect in dipolar Bose–Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 96, 080405.
- [106] K. Gawryluk, M. Brewczyk, K. Bongs, M. Gajda, Resonant Einstein–de Haas effect in a rubidium condensate, *Phys. Rev. Lett.* 2007, 99, 130401.

- [107] K. Gawryluk, K. Bongs, M. Brewczyk, How to observe dipolar effects in spinor Bose–Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106, 140403.
- [108] S. Hensler, J. Werner, A. Griesmaier, P.O. Schmidt, A. Gorlitz, T. Pfau, S. Giovanazzi, K. Rzazewski, Dipolar relaxation in an ultra-cold gas of magnetically trapped chromium atoms, *Appl. Phys. B*, 2003, 77, 765.
- [109] B. Pasquiou, G. Bismut, Q. Beaufils, A. Crubellier, E. Maréchal, P. Pedri, L. Vernac, O. Gorceix, B. Laburthe-Tolra, Control of dipolar relaxation in external fields, *Phys. Rev. A*, 2010, 81, 042716.
- [110] B. Pasquiou, G. Bismut, E. Maréchal, P. Pedri, L. Vernac, O. Gorceix, B. Laburthe-Tolra, Spin relaxation and band excitation of a dipolar Bose–Einstein condensate in 2D optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* 2011, 106, 015301.
- [111] B. Pasquiou, E. Maréchal, G. Bismut, P. Pedri, L. Vernac, O. Gorceix, B. Laburthe-Tolra, Spontaneous demagnetization of a dipolar spinor Bose gas in an ultralow magnetic field, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106, 255303.
- [112] K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M. H. G. de Miranda, A. Péer, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, and J. Ye, A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules, *Science*, 2008, 322, 231.
- [113] J. Deiglmayr, A. Grochola, M. Repp, K. Mörtlbauer, C. Glück, J. Lange, O. Dulieu, R. Wester, and M. Weidemüller, Formation of Ultracold Polar Molecules in the Rovibrational Ground State, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101, 133004.
- [114] T. Takekoshi, L. Reichsöllner, A. Schindewolf, J. M. Hutson, C. R. Le Sueur, O. Dulieu, F. Ferlaino, R. Grimm, and H.-C. Nägerl, Ultracold Dense Samples of Dipolar RbCs Molecules in the Rovibrational and Hyperfine Ground State, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 113, 205301.
- [115] P. K. Molony, P. D. Gregory, Z. Ji, B. Lu, M. P. Köppinger, C.R. Le Sueur, C. L. Blackley, J.M.Hutson, and S. L.Cornish, Creation of Ultracold  $^{87}\text{Rb}^{133}\text{Cr}$  Molecules in the Rovibrational Ground State, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 113, 255301.

- [116] T. Shimasaki, M. Bellos, C. D. Bruzewicz, Z. Lasner, and D. DeMille, Production of rovibronic-ground-state RbCs molecules via two-photon-cascade decay, *Phys. Rev. A*, 2015, 91, 021401(R).
- [117] J. W. Park, S. A. Will, and M. W. Zwierlein, Ultracold Dipolar Gas of Fermionic  $^{87}\text{Na}^{40}\text{K}$  Molecules in Their Absolute Ground State, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 114, 205302.
- [118] Y. Deng and S. Yi, Spinor Bose-Einstein condensates of rotating polar molecules, *Phys. Rev. A*, 2015, 92, 033624.
- [119] S. Sugimoto, Y. Fukuma, S. Kasai, T. Kimura, A. Barman, and Y. C. Otani, Dynamics of Coupled Vortices in a Pair of Ferromagnetic Disks, *Phys. Rev. Lett.* 2011, 106, 197203.
- [120] S. Jain, H. Schultheiss, O. Heinonen, F. Y. Fradin, J. E. Pearson, S. D. Bader, and V. Novosad, Coupled vortex oscillations in mesoscale ferromagnetic double-disk structures, *Phys. Rev. B*. 2012, 86, 214418.
- [121] A. Vogel, T. Kamionka, M. Martens, A. Drews, K. W. Chou, T. Tyliczszak, H. Stoll, B. Van Waeyenberge, and G. Meier, Coupled Vortex Oscillations in Spatially Separated Permalloy Squares, *Phys. Rev. Lett.* 2011, 106, 137201.
- [122] H. Jung, K. S. Lee, D. E. Jeong, Y. S. Choi, Y. S. Yu, D. S. Han, A. Vogel, L. Bocklage, G. Meier, M. Y. Im, P. Fischer, and S. K. Kim, Tunable negligible-loss energy transfer between dipolar-coupled magnetic disks by stimulated vortex gyration, *Sci. Rep.*, 2011, 1, 59.
- [123] J. Shibata, K. Shigeto, and Y. Otani, Dynamics of magnetostatically coupled vortices in magnetic nanodisks, *Phys. Rev. B*, 2003, 67, 224404.
- [124] O. V. Sukhostavets, J. Gonz'alez, and K. Y. Guslienko, Multipole magnetostatic interactions and collective vortex excitations in dot pairs, chains, and two-dimensional arrays, *Phys. Rev. B*, 2013, 87, 094402.
- [125] X. Wang, D. J. Keavney, M. Asmat-Uceda, K. S. Buchanan, A. Melikyan, and X.

- M. Cheng, Time-resolved photoemission electron microscopy imaging of mode coupling between three interacting magnetic vortices, *Appl. Phys. Lett.* 2014, 105, 102408.
- [126] D. S. Han, A. Vogel, H. Jung, K. S. Lee, M. Weigand, H. Stoll, G. Schutz, P. Fischer, G. Meier, and S. K. Kim, *Sci. Rep.*, 2013, 3, 2262.
- [127] A. Vogel, A. Drews, T. Kamionka, M. Bolte, and G. Meier, Influence of Dipolar Interaction on Vortex Dynamics in Arrays of Ferromagnetic Disks, *Phys. Rev. Lett.* 2010, 105, 037201.
- [128] J. Shibata and Y. Otani, *Phys. Rev. B*, Magnetic vortex dynamics in a two-dimensional square lattice of ferromagnetic nanodisks, 2004, 70, 012404.
- [129] W. Yu, P. S. Keatley, P. Gangmei, M. K. Marcham, T. H. J. Loughran, R. J. Hicken, S. A. Cavill, G. van der Laan, J. R. Childress, and J. A. Katine, Observation of vortex dynamics in arrays of nanomagnets, *Phys. Rev. B*, 2015, 91, 174425.
- [130] C. Phatak, A. K. Petford-Long, and O. Heinonen, Direct Observation of Unconventional Topological Spin Structure in Coupled Magnetic Discs, *Phys. Rev. Lett.* 2012, 108, 067205.
- [131] V. Sluka, A. Kákay, A. M. Deac, D. E. Bürgler, C. M. Schneider, and R. Hertel, Spin-torque-induced dynamics at fine-split frequencies in nano-oscillators with two stacked vortices, *Nature Commun.*, 2015, 6, 6409.



## 攻读学位期间取得的研究成果

- [1] **Tiantian Li**, Su Yi, and Yunbo Zhang, **Coupled spin-vortex pair in dipolar spinor Bose-Einstein condensates**, Phys. Rev. A. **92**, 063603 (2015). (SCI)
- [2] **Tiantian Li**, Su Yi, and Yunbo Zhang, **Dynamics of a coupled spin vortex pair in dipolar spinor Bose-Einstein condensate**, Phys. Rev. A. **93**.053602 (2016). (SCI)
- [3] Guanjun Chen, **Tiantian Li** and Yunbo Zhang, **Symmetry-protected skyrmions in three-dimensional spin-orbit-coupled Bose gases**, Phys. Rev. A. **91**,053624 (2015). (SCI)
- [4] Jie Zhang, **Tiantian Li**, Yunbo Zhang, **Interspecies singlet pairing in a mixture of two spin-1 Bose condensates**, Phys. Rev. A **83**, 023614 (2011). (SCI)





## 致 谢

博士学位完成之际也意味着我学生生涯的结束，在这里要感谢所有授予我知识，帮助我成长的恩师们，感谢你们的无私奉献和谆谆教导。感谢我的导师，张云波教授，张老师治学严谨，思维敏锐，精力充沛，工作非常刻苦，当我遇到挫折对自己不自信时，张老师鼓励给了我很大的帮助。在理论所学习的七年里，张老师一步一步引导我走上科研的道路，逐字逐句帮我修改论文，非常细心的指出我的错误毛病，更重要的是教会我以后做人做事都要认真踏实，我的博士学位凝聚了张老师很大的心血。

感谢中科院理论物理所的易俗老师，易老师知识渊博，和蔼可亲，非常有耐心的教我学程序，帮我修改论文，教育我以后要学会分析问题解决问题的方法。能同时师从两位老师，是我一生的荣耀。

感谢我们的冷原子小组的每一位成员，我们就像一个大家庭，使我感觉很温暖。感谢王红梅，杜磊，郭利平，张杰，梁成功，毛丽君等师兄师姐对我工作学习上的帮助，感谢旋量 BEC 组的陈冠军老师和陈立的热情讨论，感谢王利老师和徐志浩老师的对我的帮助。

感谢理论所的梁九卿教授，聂一行教授，李卫东教授，李志坚教授，张素英教授，李录教授，刘福虎教授等老师的关怀和帮助

感谢杜佳佳，王强，解海卿，张原维，王明浩，辛俊丽，徐卫平，王艳，许丽，刘彦霞，李鹏飞（以上排名不分先后）等各位朋友的支持和陪伴。

最后要感谢我的家人的默默支持，感谢我的父母，感谢我的弟弟的默默付出，感谢我善解人意弟妹和活泼可爱的小侄子，最后感谢我的爱人冯金明，谢谢几年来你对我的支持、忍让和包容，帮助我顺利完成学业。

一个结束同时也意味着一个开始，我会怀着感恩的心继续努力。



## 个人简况及联系方式

姓名：李甜甜

性别：女

籍贯：山西省运城市垣曲县

学习经历：2009年9月至2016年7月，山西大学理论物理研究所，凝聚态物理专业，  
硕博连读

[E-Mail:tiantianhao606@163.com](mailto:tiantianhao606@163.com)



## 承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其它单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

2016 年 月 日



## 学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留，使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印，缩印或扫描等手段保存，汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表，传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

2016 年 月 日