



2018 届硕士学位论文

具有周期势的 PT 对称波导中的相变及
 $Landau-Zener$ 隧穿

作者姓名	胡蕊
指导教师	郭利平 副教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2015年9月至2018年6月

二〇一八年六月

山西大学

2018 届硕士学位论文

具有周期势的 PT 对称波导中的相变及 Landau-Zener 隧穿

作者姓名	胡 蕊
指导教师	郭利平 副教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2015 年 9 月至 2018 年 6 月

二〇一八年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2018

Phase transition and Landau-Zener tunneling in PT
-symmetric waveguides with periodic potential

Student Name	Rui Hu
Supervisor	Associate Prof. Li-ping Guo
Major	Condensed Matter Physics
Field of Research	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2015.09-2018.06

June, 2018

目 录

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 量子力学中 PT 对称的研究进展.....	1
1.2 PT 算符介绍及 PT 对称在光学领域中的应用.....	2
1.2.1 宇称与时间反演算符：定义及性质.....	2
1.2.2 PT 对称在光学领域中的应用.....	3
1.3 Landau-Zener 隧穿效应简介.....	6
1.4 本文主要内容.....	9
第二章 PT 对称光波导中的 Landau-Zener 隧穿.....	11
2.1 光波导中线性薛定谔方程的推导.....	11
2.2 理论模型.....	13
2.3 有效两能级系统中的 Landau-Zener 隧穿.....	17
2.3.1 交变驱动力下有效两能级系统中的 Landau-Zener 隧穿.....	18
2.3.2 恒定外力下有效两能级系统中的 Landau-Zener 隧穿.....	19
2.4 本章小结.....	20
第三章 PT 对称波导中周期势的调制对相变的影响.....	21
3.1 PT 对称光波导中周期势调制对 PT 对称区间及能谱的影响.....	21
3.2 PT 对称光波导中周期势调制对 Landau-Zener 隧穿影响.....	26
3.3 本章小结.....	26
第四章 总结与展望.....	29
4.1 总结.....	29
4.2 展望.....	29
参考文献.....	31
攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目.....	39
致 谢.....	41
个人简况及联系方式.....	43
承 诺 书.....	45
学位论文使用授权声明.....	47

Contents

Chinese Abstract	I
ABSTRACT	III
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Progress in the research of PT symmetry in quantum mechanics.....	1
1.2 The introduction of the PT operator and the application of PT symmetry in the field of Optics.....	2
1.2.1 The Parity and time inversion operators: definitions and properties.....	2
1.2.2 The application of PT symmetry in the field of Optics.....	3
1.3 Brief introduction of Landau-Zener tunneling effect.....	6
1.4 The main contents of this paper.....	9
Chapter 2 Landau-Zener tunneling in PT symmetrical optical waveguides	11
2.1 Derivation of linear Schrödinger equation in optical waveguides.....	11
2.2 Theoretical model.....	13
2.3 Landau-Zener tunneling in an effective two level system.....	17
2.3.1 Landau-Zener tunneling in an effective two level system under the alternating driving force.....	18
2.3.2 Landau-Zener tunneling in an effective two level system under constant external force.....	19
2.4 Conclusion of this Chapter.....	20
Chapter 3 Effect of phase transition in PT symmetric waveguides with different periodic potentials	21
3.1 Influence of periodic potential modulation on PT symmetric interval and energy spectrum in a PT symmetrical optical waveguide.....	21
3.2 Influence of periodic potential modulation on Landau-Zener tunneling in PT symmetrical optical waveguides.....	26
3.3 Conclusion of this Chapter.....	26
Chapter 4 Summary and Outlook	29
4.1 Summary.....	29
4.2 Outlook.....	29

References	31
Research Achievements	39
Acknowledgment	41
Personal Profiles	43
Letter of Commitment	45
Authorization Statement	47

中文摘要

在 20 世纪初期，量子力学基本理论体系已经建立。虽然量子力学理论不断在实验中验证和发展，并且已经应用到很多领域，但在某些领域仍存在争议。随着量子力学的不断发展，人们逐渐将量子力学的范畴扩展到非厄米系统。一般情况下，当哈密顿量具有 PT 对称性时，其在某个区域具有实数本征谱。当某一个参数达到临界值时，本征值是成对互为复共轭的复数，此时系统的 PT 对称性破缺，临界值也被称为奇异点。在光学，声学等中的实验已经验证了该理论。本文研究了 PT 对称光波导中的 Landau-Zener 隧穿。

首先介绍了 P 算符，T 算符，PT 组合算符的定义及其性质，并阐述了 PT 对称在光学领域的应用。当光在波导中传播时，麦克斯韦方程在傍轴近似下的光传播方程类似于含时薛定谔方程，利用具有复折射率的光波导可以在系统中引入 PT 对称。在一维排列满足 PT 对称的弯曲波导中，根据势函数的周期性，利用布洛赫定理将哈密顿量从实空间变到动量空间。数值对角化后，发现当势函数的实部和虚部周期相同且实部的强度 V_1 大于虚部的强度 V_2 时，系统能谱是实的。在其 PT 对称区间中最低两能带会发生能级免交叉现象，另外波导的弯曲程度可提供必要的驱动外场。因此我们可以通过有效的两能级哈密顿量，近似计算出 Landau-Zener 隧穿的隧穿概率的解析表达式。在此基础上，本文研究了 PT 对称光波导中周期势的调制对相变的影响。当势函数虚部周期不同于实部周期时，我们分析了本征谱以及存在实数谱的参数取值范围。在其 PT 对称区间，最低两能带仍然发生能级免交叉现象，利用数值办法计算发现 Landau-Zener 隧穿的隧穿概率随着 V_1 增大而减小，不随 V_2 的变化而变化。

关键词：PT 对称；波导；周期势；Landau-Zener 隧穿概率；相变

ABSTRACT

In the early 20th century, the basic theoretical system of quantum mechanics was established. Although it has been verified and developed in experiments and can be applied to many fields, in some fields there is still controversial. With the continuous development of quantum mechanics, people have gradually paid attention to non-Hermitian systems. In general, when the Hamiltonian has parity- and time-reversal (PT) symmetry, the eigenvalue is real in some region. When the parameter is larger than a critical value the eigenvalues become mutually complex conjugates, and the PT symmetry is broken. The critical value is also called the exception point. This theory has been demonstrated in experiments in optics, acoustics, and so on. In this paper, we study the dynamic evolution in PT symmetric optical waveguides, namely Landau-Zener tunneling.

First, we introduce the definition and properties of the P operator, T operator and PT combination operator, and describe the application of PT symmetry in optics. When the light propagates in the waveguide, the optical propagation equation of the Maxwell's equation under the paraxial approximation is similar to the time-dependent Schrödinger equation. Using an optical waveguide with complex refractive index can introduce PT symmetry into the system. The Bloch theorem is used to transform the Hamiltonian from the real space to the momentum space according to the periodicity of the potential function in a one-dimensional array of curved waveguides satisfying PT symmetry. After numerically diagonalizing the Hamiltonian, it was found that when the periods of real and imaginary part of the potential function are the same and the intensity of the real part V_1 is larger than of the imaginary part V_2 , the system has real energy spectrum. There exists an avoided level crossing between the two lowest bands in the PT symmetric region, and the waveguides bending degree provides the necessary driving external field. Therefore, we can approximate the analytical

expression of the tunneling probability of Landau-Zener tunneling through the effective two-level Hamiltonian. Based on this, we study the effect of phase transition in PT symmetric waveguides with different periodic potentials of imaginary part. When the periods of real and imaginary parts of the potential function are different, we analyzed the eigenspectrum and the range of parameter values with the real spectrum. There still exists an avoided level crossing between the two lowest bands in the PT symmetric region, we can find that the Landau-Zener tunneling probability decreases with the increasing of V_1 and does not vary with V_2 through numerical method.

Key words: PT-symmetric; waveguide; periodic potential; Landau-Zener tunneling probability; phase transition

第一章 绪论

1.1 量子力学中 PT 对称的研究进展

量子力学体系从建立至今已经有 100 多年的历史，是 20 世纪物理学的主要进展之一。大量实验规律和旧量子论为其发展奠定了坚实的基础。通过量子力学，人们对物质的结构以及其相互作用的认识发生了革命化的改变。在量子力学中，可观测物理量是描述物质特性的重要指标，通常用算符来表示。在标准的量子力学中，所有可观测的物理量必须是厄米算符，当然系统的哈密顿量 \hat{H} 也不例外，即 $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ 。这不仅使得这些算符具有实的本征值也保证了它们的本征波函数具有完备性且满足正交归一化。然而，在过去的十几年中，人们提出了一个新的概念，试图将量子力学的范畴扩展到非厄米系统。1998 年，Bender 等人发现^[1]一个事实：即使哈密顿量具有非厄米的性质，但只要其满足宇称-时间反演对称(Parity-Time-symmetry)，简称 PT 对称性，哈密顿量也可以有完全实的本征谱^[2-5]。这个有趣的结果似乎是与我们预期的情况相反，因为它意味着，一个非厄米哈密顿量的本征模^[6](束缚态和辐射态)与实数本征能量相关。另一个有趣的特性是与自发的 PT 对称性破缺有关，超过该临界点系统可以发生突然的相变^[1]。特别是在超越了该临界值后，系统失去了其 PT 对称的特性，导致一些本征值变为复数，该临界值也被称为奇异点。

2001 年，Ahmed 揭示了具有复数 PT 对称周期势哈密顿量的能带结构^[3]。同年，Znojil 研究了哈密顿量在 PT 对称方形势阱中的性质^[5]。Dorey 等人将 Bethe ansatz 方程应用到 PT 对称系统量子力学性质的研究^[7]。在 2004 年，Bender 及其合作者进一步利用形如 ix^3 (x 表示坐标变量)的相互作用项将 PT 对称量子力学推广到量子场论中^[8]。随后在 2005 年，Shin 研究了含有多项式势的 PT 对称振子的特征值^[9]。从 2007 年起，El-Ganainy 等人将 PT 对称应用到光学领域中^[10]。此外，众多的模型都证明了该理论的正确性。

随着 PT 对称理论体系的不断完善，满足 PT 对称性的物理系统成为了研究的重点。如今 PT 对称性的概念被广泛地应用到物理学的各个领域，包括量子场论^[2]，非厄米安德森(Anderson)模型^[11]，复数李代数(Lie algebras)^[12]，格点量子色动力学理论(Quantum Chromodynamics)^[13]。值得一提的是，在引入 PT 对称的概念之前，在理论^[14]和实验^[15-16]中都考虑了来自复周期势的波散射。例如：在光学中，使用复折射率；在量子场论中，研究了 PT 对称的哈密顿量的性质。结果证明：PT 对称性是一个非

常重要的结论，可以有效地描述环境与系统相互作用的过程，例如存在增益和耗散的系统。

1.2 PT 算符介绍及 PT 对称在光学领域中的应用

一般来说, PT 对称的哈密顿量要求其所有本征函数同时也是 PT 算符的本征函数。粒子的波函数为 $\psi(\vec{r}, t)$ ，其随时间的演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

其中线性算符 \hat{H} 在希尔伯特(Hilbert)空间 $L^2(D)$ 中的作用是定义一个内积： $\langle \psi, \phi \rangle = \int_D \psi^*(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) d\vec{r}$ ， D 是空间维度， $*$ 代表复共轭。

对于给定的线性算符 \hat{H} 和希尔伯特(Hilbert)空间 $L^2(D)$ 中的两个态的波函数 $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ ，其共轭 \hat{H}^\dagger 由关系式 $\langle \hat{H}^\dagger \psi, \phi \rangle = \langle \psi, \hat{H} \phi \rangle$ 定义；如果 \hat{H} 是厄米的(或自共轭的)，则 $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ ，满足 $\langle \hat{H} \psi, \phi \rangle = \langle \psi, \hat{H} \phi \rangle$ [根据数学中对厄米性的严格定义，要求算符 \hat{H} 是稠密的，即 \hat{H} 的域必须是稠密子集 $L^2(D)$ [17]]；为了简单起见，我们假设这一点对于考虑的所有算符都满足。

1.2.1 宇称与时间反演算符：定义及性质

考虑物理学中分立的对称性操作宇称算符(Parity Operator)用 \hat{P} 表示，也称空间反射。宇称操作应用于坐标系变换时，把一个右手(RH)坐标系变成一个左手(LH)坐标系 [18]，其作用效果为：

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow -\vec{r} \\ \vec{p} &\rightarrow -\vec{p} \\ f(\vec{r}, t) &= f(-\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $f(\vec{r}, t)$ 指任意函数。 \hat{P} 的作用相当于所有的坐标都变号； \hat{P} 不仅是线性算符，也是么正算符。

Wigner 已经证明：量子力学中的对称性变换，或为么正变换，或为反么正变换。对于离散的对换性变换，则可能出现反么正变换。由 Wigner 在 1959 年定义的时间反演算符是一种离散变换，用符号 \hat{T} 来表示 [19]。时间反演并非么正变换，而是一种反么正变换，且时间反演不变性并不会导致某种守恒量。时间反演并不意味着“真正的时间倒流”，只不过是“运动方向的倒转”，其作用效果为：

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r} \\ \vec{p} &\rightarrow -\vec{p} \end{aligned}$$

$$i \rightarrow -i$$

$$f(\vec{r}, t) = f^*(\vec{r}, -t) \quad (1.3)$$

这是由时间反演算符是反线性算符性质所决定的。

此外，宇称算符及时间反演算符满足如下性质

$$\hat{P}^2 = \hat{T}^2 = \hat{I}, \quad [\hat{P}, \hat{T}] = 0 \quad (1.4)$$

其中， \hat{I} 是单位算符。如果哈密顿量算符满足

$$[\hat{H}, \hat{P}\hat{T}] = 0 \quad (1.5)$$

则该算符是PT对称的。根据方程(1.4)，(1.5)式可以写成 $\hat{H} = \hat{P}\hat{T}\hat{H}\hat{P}\hat{T}$ 。

不同于哈密顿量算符的厄米性，PT对称不是存在实数谱的充分条件。要想使之成为充分条件我们必须要求PT对称未破缺。设 E 是哈密顿量 \hat{H} 作用在本征函数 ψ 上的本征值，即 $\hat{H}\psi = E\psi$ 。将PT对称算符作用在方程两边，根据(1.4)，可以得到 $\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi = \hat{P}\hat{T}E\psi$ ，并利用(1.5)式得 $\hat{H}(\hat{P}\hat{T}\psi) = E^*(\hat{P}\hat{T}\psi)$ 。如果PT对称未破缺，则 $\hat{H}\psi = E^*\psi$ ，即本征值是实数。

考虑具有复数化学势的量子系统，其哈密顿量为：

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) \quad (1.6)$$

其中 m 是粒子的单位质量，且 $U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + iU_2(\vec{r})$ ， $U_1(\vec{r})$ ， $U_2(\vec{r})$ 分别代表化学势的实部和虚部。将(1.5)式作用到任意波函数 $\psi(\vec{r}, t)$ 上

$$[\hat{H}, \hat{P}\hat{T}]\psi(\vec{r}, t) = [U(\vec{r}) - U^*(-\vec{r})]\psi^*(-\vec{r}, -t) \quad (1.7)$$

如果

$$U(\vec{r}) = U^*(-\vec{r}) \quad (1.8)$$

则可以保证(1.5)式成立，即哈密顿量 \hat{H} 是PT对称的。也就是要求化学势的实部和虚部分别满足 $U_1(\vec{r}) = U_1(-\vec{r})$ ， $U_2(\vec{r}) = -U_2(-\vec{r})$ 。由于PT对称哈密顿量对势函数的特殊要求，系统中引入PT对称时通常需要构造满足条件(1.8)的势函数形式来实现。

1.2.2 PT 对称在光学领域中的应用

虽然 PT 对称性的影响在一些领域仍在争论中，但光学可以给 PT 对称研究提供很好的媒介—其概念及性质可以在实验中验证和发展^[10,20-22]。最近在光学方面的发展中促使复式晶体的出现。与普通晶体相比，该晶体具有独特的性质，例如它会违反弗里德尔定律(Friedel's law)^[23]。此外，还可以建立一类受限制的复式晶体，使它们具有上述的 PT 对称性，这些系统是在包括增益和耗散区域的波导阵列中实现的。沿

着这个思路，2010 年实现的两个耦合波导的实验，揭示了在 PT 对称光学系统中光传播的新行为—自发的 PT 对称破缺，该结果可能为研究具有 PT 对称特性的新型材料铺平道路^[24]。而且在光学中，很多物理过程遵从的方程与量子力学中的薛定谔方程等价，它在空间衍射效应和时间色散中有很好的体现。在这项工作中我们集中观察在 PT 对称复数势下光束的传播，在光学中 PT 对称复数势可以认为是增益和耗散的指标^[20-21,25]。考虑复折射率分布满足 $n(x) = n_R(x) + in_I(x)$ ，所以在光学 PT 对称系统中相当于折射率分布的实部和虚部分别满足 $n_R(x) = n_R(-x)$ ， $n_I(x) = -n_I(-x)$ 。换句话说，在 x 方向上折射率分布必须是偶函数，然而描述增益/耗散的虚部满足奇函数。在这些条件下，光束的电场包络 E 遵从傍轴近似下光的传播方程^[20,26-32](电场沿 z 轴传播， x 是横向坐标，是波导阵列排列的方向)：

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k_0 [n_R(x) + in_I(x)] E = 0 \quad (1.9)$$

其中 $k_0 = 2\pi/\lambda$ ， $k = k_0 n_s$ ， λ 是光在真空中的波长， n_s 代表波导中基质的折射率。

PT 对称量子力学与光学结合是最近几十年兴起的热门研究课题。由于波导介质折射率的分布可以满足 PT 对称的条件，所以光学成了这类问题的重要研究平台，并且通过各种实验来证实了相关课题中的各种理论和成果。首先是在 2008 年，Klaiman 研究小组证明了在 PT 对称定向耦合器中临界点的可视化，在该系统中通过改变单个参数来探测临界点^[25]。同年，Muslimani 研究小组详细给出了一维以及二维 PT 对称光学晶格中的光束动力学结果^[20]。结果表明，PT 周期结构可以在 Floquet-Bloch 带的非正交性上表现出独特的特征。2010 年，Kip 研究小组的实验中构建出了由两个耦合的并联铌酸锂晶体(LiNbO₃)光波导组成的 PT 对称光学系统^[24]。这样的 PT 对称光学系统通过部分地阻挡泵浦光，仅让一个通道变大，可以实现不对称增益。在这样的系统中我们可以观察到自发的 PT 对称破缺，而且由于满足 PT 对称性，这种涉及到复化学势的周期性光学系统可能会显示出不寻常的性质，图 1.1 中给出了 PT 对称耦合光学系统的实验装置图^[24]。2015 年，Li 等人研究在 PT 对称双微腔系统(其中一个无源腔，一个量子发射器)中相干光子的线性和非线性输运特性^[33]。2018 年，Longhi 等人进一步探索了 PT 对称光子学，是非厄米光学中一个新的进展^[34]。

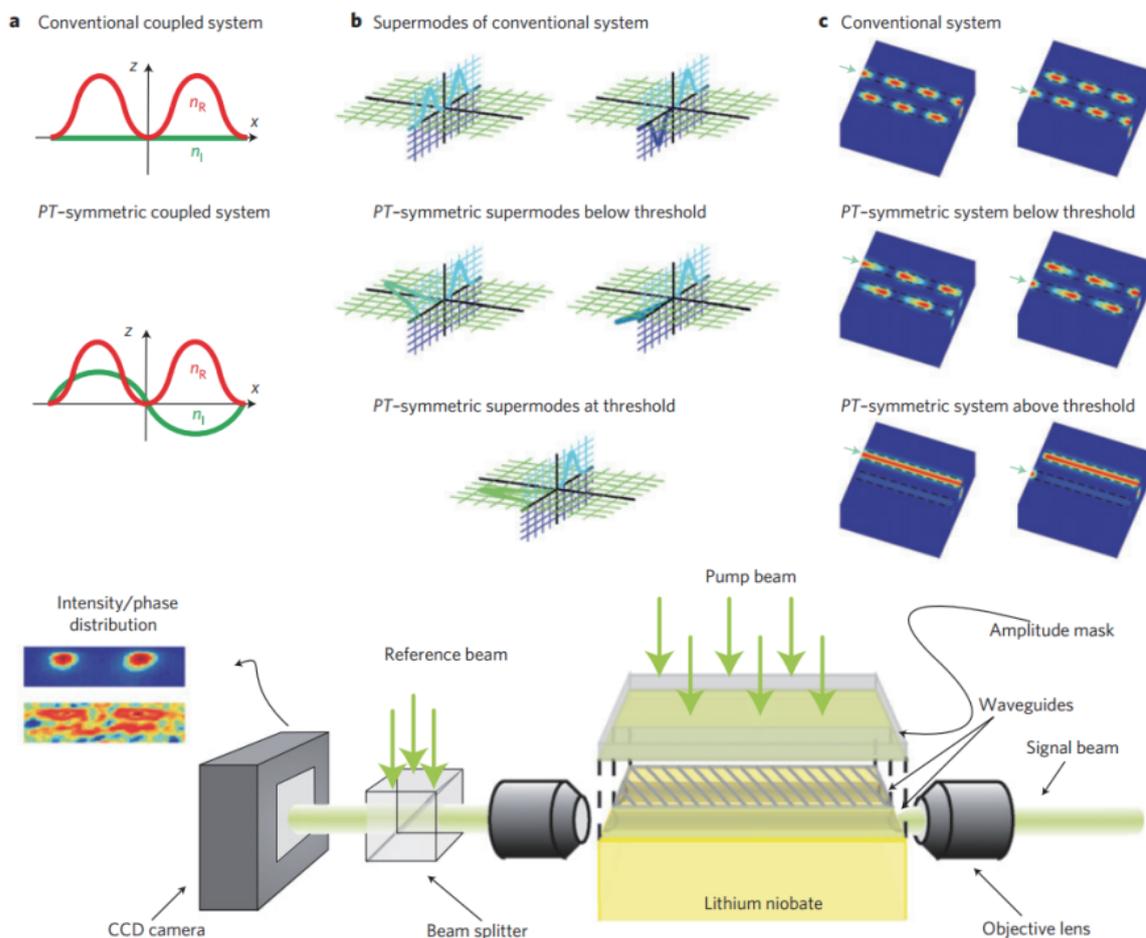


图 1.1 PT 对称耦合光学系统的实验装置图^[24]。

另一方面，近年来工程光波导的新发展为各种量子相干现象的经典类比实验的实现提供了有利的条件^[35]。比如上文提到的量子力学中，粒子含时薛定谔方程与傍轴近似下的标量麦克斯韦方程的形式等价。量子系统的一个明显的技术优势体现在光学设置中，它通过简单的荧光成像或扫描隧道光学显微镜可以直接观察波函数的演变。此外，通过沿光线传播方向引入弯曲的波导管可以提供必要的驱动外场，以至于能够实现能级间的隧穿，所以在实验中已经实现了量子现象的光学类比，如隧穿的相干破坏^[36]和布洛赫振荡^[37-38]。在这种情况下，也可以通过引入耗散和增益分布来实现复光学势。特别有趣的是可以通过合理地使用增益和耗散区域组合来实现上述 PT 对称系统，并且可以通过具体的实验来研究上述 PT 对称系统的一些未知性质。此外，在 PT 对称性中增益和耗散可以变化，从而为波导系统的优化和灵活控制铺平了道路。PT 对称性已经应用到了很多方面，比如：光学开关、光频段的单向无反射 PT 对称介质，单模 PT 对称环形激光器，CPA 激光器和声子激光器^[32]。

1.3 Landau-Zener 隧穿效应简介

在上世纪 30 年代, 物理学家 Landau、Zener 以及 Stueckelberg 发现: 当系统外部的某些参数随时间变化时, 两能级系统的免交叉点处会发生隧穿, 故此将该现象命名为 Landau-Zener-Stueckelberg 隧穿, 简称 Landau-Zener 隧穿^[39-42]。这种现象在物理学中非常普遍, 且在量子物理学的各个领域都有着广泛的应用。在新的领域中 Landau-Zener 跃迁的物理现象可以发挥重要作用, 例如, 绝热量子计算(adiabatic quantum computation)^[43-44]。它也可以在生物捕光系统中的分子间能量转移中发挥作用。在绝热量子计算中, 一个物理系统的参数(可以称为量子计算机)缓慢地变化, 使得系统不会从基态跃迁到激发态而是始终待在基态。在生物捕光系统中, 分子的不同部分之间的能量转移可能是由作为驱动场的分子变化决定的。此外, 在纳米电路中的振幅谱^[45]以及金刚石中氮空位中心^[46]中该现象也得到了很好的应用。而且在八十多年前发现的 Landau-Zener 隧穿问题在封闭系统中的性质已经被广泛研究^[39-42]。例如, 1986 年, Carroll 和 Hioe 将 Landau-Zener 非绝热跃迁推广到三能级系统^[47]。在 2000 年, 吴飏等人研究了非线性 Landau-Zener 隧穿, 在两能级系统中发现了一个有趣的特性—只要相互作用强度足够大, 在绝热极限下隧穿几率将不为零^[48]。随后在 2002 年, 刘杰等人详细介绍了非线性 Landau-Zener 隧穿理论并讨论了非线性模型在实验上的实现^[49]。2010 年, Trimborn 等人在量子相空间中研究了非线性 Landau-Zener 隧穿^[50]。2012 年, 易俗等人研究局域在各向异性势下, 旋量凝聚体的宏观量子自旋相干, 并且提出了一种利用 Landau-Zener 隧穿探测隧穿劈裂振荡行为的实验方案^[51]。然而, 物理系统总是与周围的环境发生相互作用。在外界环境中存在的 Landau-Zener 问题引起了人们的高度关注^[52-59], 且已经通过很多方法得到了可靠且准确的结果, 即 Landau-Zener 隧穿效应的应用已经很好地拓展到了非厄米系统中。由于 PT 对称性可以有效地描述环境与系统相互作用的过程, 所以本文的重点便是研究 PT 对称系统中的 Landau-Zener 隧穿。

如果系统通过能级免交叉点周期性驱动, 连续的 Landau-Zener 跃迁过程当中累积的相位可能导致相长或相消干涉, 通常称为 Landau-Zener-Stueckelberg(LZS)干涉测量^[46]。周期驱动场是控制周期驱动二能级模型量子隧穿的一个重要而有效的工具^[60-62]。通过调整驱动场, 量子隧穿可以增强或抑制。最近研究的 PT 对称系统的物理学进展也激发了周期性驱动在 PT 对称两能级系统中的研究^[28,63]。此外, 物理学家在超冷分子气体^[64], 光学晶格^[65]和氮空位中心^[48]等方面对 LZS 干涉进行了观察。

能级免交叉在物理学领域中是一个相当重要的问题，分子的极化与非极化态的交叉可以说明其基本特性，如图 1.2 所示。

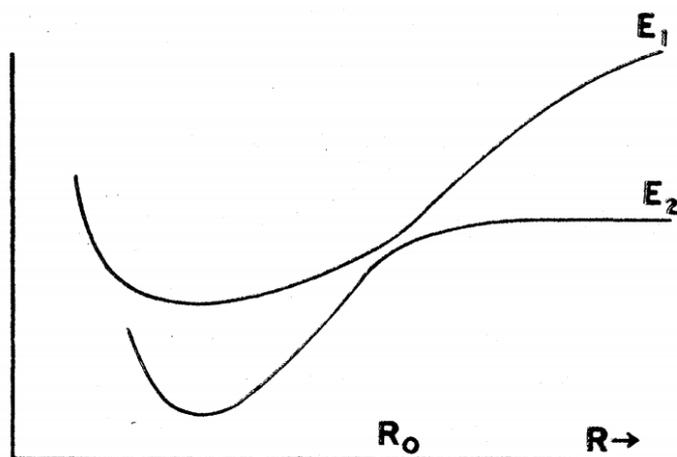


图 1.2 分子的极化和非极化态的本征值随参数 R 的变化^[38]。

考虑固定原子核的分子的两个电本征函数分别为 $\psi_1(x/R)$, $\psi_2(x/R)$, 且两本征函数有如下特性: 当 $R \gg R_0$ 时, ψ_1 具有极化特性, 而 ψ_2 具有非极化特性; 但是当 $R \ll R_0$ 时, ψ_2 具有极化特性, 而 ψ_1 具有非极化特性。换句话说, 在区域 $R = R_0$ 时两本征函数的特性发生了交换^[40]。

绝热定理告诉我们: 如果分子最初处在 ψ_2 态, 且参数 R 从区间 $R \gg R_0$ 到 $R \ll R_0$ 的变化速度十分缓慢, 那么分子将始终处在 ψ_2 。但是如果 R 是以有限速度变化, 则末态 $\psi(x/R)$ 可以写成如下线性叠加的形式:

$$\psi(x/R) = A_1(R)\psi_1(x/R) + A_2(R)\psi_2(x/R). \quad (1.10)$$

Neumann 和 Wigner 找到了 $\psi(x/R)$ 表达式中的系数所满足的关系^[66]

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow 0, & |A_2| &\rightarrow 1 \\ A_2 &\rightarrow 0, & |A_1| &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

但并没有获得其具体表达式。怎样获得 A_1 和 A_2 随 R 的依赖关系成为一个有趣的数学问题, 在保留系统基本特性的基础上, 尽可能的对其进行简化: 对于所有的 R , ψ_1 和 ψ_2 都可以分别写成 ϕ_1 , ϕ_2 的线性叠加。而且在区间 $R \gg R_0$ 中 ψ_1 与 ϕ_1 有相同的特性, 在 $R \ll R_0$ 中 ψ_2 与 ϕ_2 有相同的特性。基矢 ϕ_1 , ϕ_2 是正交的, ϕ_1 是纯极化态且 a_1 表示态 ϕ_1 上的几率幅, ϕ_2 是纯非极化态且 a_2 表示态 ϕ_2 上的几率幅。 a_1 , a_2 满足如下的薛定谔方程:

$$i\dot{a}_1 = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_{12} a_2$$

$$i\dot{a}_2 = \varepsilon_{12}a_1 + \varepsilon_2a_2 \quad (1.12)$$

(1.12)式也可以写为:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

其中

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

我们假定: (a) 由于跃迁区域很小, 可以认为 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 随时间是线性变化的, 即 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \beta t$; (b) 两能级间的耦合 ε_{12} 近似地看作常数。若系统初始时刻处于 ϕ_1 态,

$$|a_1(-\infty)| = 1; \quad |a_2(-\infty)| = 0 \quad (1.15)$$

对 a_j 作变量代换, 可以得到

$$a_j = c_j e^{-i \int \varepsilon_j dt} \quad (1.16)$$

带入式(1.12), 可得

$$\begin{aligned} i\dot{c}_1 &= \varepsilon_{12}c_2 e^{i \int \beta t dt} \\ i\dot{c}_2 &= \varepsilon_{12}c_1 e^{-i \int \beta t dt} \end{aligned} \quad (1.17)$$

对式(1.17)中的任意一个方程进行二阶微分, 并利用另一方程可得

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2} + i\beta t \dot{c}_2 + \varepsilon_{12}^2 c_2 = 0 \quad (1.18)$$

再次对 c_2 作变量代换

$$c_2 = u_2 e^{\frac{i}{2} \int \beta t dt} \quad (1.19)$$

将变量代换(1.19)带入式(1.18), 得到关于 u_2 的二阶微分方程

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\varepsilon_{12}^2 - \frac{i\beta}{2} + \frac{\beta^2 t^2}{4} \right) u_2 = 0 \quad (1.20)$$

化简上式, 可得标准的 Weber 方程

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) u_2 = 0 \quad (1.21)$$

其中 $z = \sqrt{\beta} e^{i\pi/4}$, $n = i\varepsilon_{12}^2/\beta$ 。(1.21)式的解为 Weber 函数, 将其代入初始条件(1.15)并运用 Weber 函数在无穷远处的渐近表达式可得:

$$|c_2(\infty)| = \frac{2\pi\gamma e^{-\pi\gamma}}{\Gamma(i\gamma+1)\Gamma(i\gamma-1)} = 2e^{-\pi\gamma} \sinh(\pi\gamma) = 1 - e^{-2\pi\gamma} \quad (1.22)$$

其中 $\gamma = \varepsilon_{12}^2/\beta$ 。所以, 系统的隧穿几率为:

$$P = \exp\left(-\frac{2\pi\varepsilon_{12}^2}{\beta}\right) \quad (1.23)$$

(1.23)式也可以写成如下形式:

$$P = \exp\left(-\frac{\pi\Delta^2}{2\beta}\right) \quad (1.24)$$

其中, Δ 为免交叉点处的能隙且 $\Delta = 2\varepsilon_{12}$ 。驱动速率 β 的定义式为

$$\beta = \left| \frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{dt} \right| \quad (1.25)$$

我们可以通过(1.24)得出, Landau-Zener 隧穿的概率和免交叉点处的能隙 Δ 和驱动速率 β 有关。当驱动速率 $\beta \rightarrow 0$ 时, 隧穿几率也趋近于 0, 这与绝热定理相符合; 当 $\beta \neq 0$ 时, 隧穿概率不为 0, 即粒子有一部分从低能级跃迁到高能级; 当 $\beta \rightarrow \infty$ 时, 隧穿概率趋近于 1, 粒子几乎完全从低能级跃迁到高能级。

在标准量子力学中要求哈密顿算符必须具有厄米性, 在这一背景下 LZS 现象一直被研究至今。系统的哈密顿量必须保证其不仅具有实的能谱, 而且在演化时概率守恒。我们由上文可知厄米性 $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ 并不是必需的, 它可以被物理宇称条件和时间反演对称即 PT 对称所取代^[67-68]。因此, 原则上可以通过使用非厄米 PT 对称哈密顿量来描述不违反量子力学物理公理的过程。关于 PT 对称系统的内积, 单位性, 可观测量的定义和其他重要问题的正确定义已经被深入研究^[69]。

1.4 本文主要内容

基于以上背景介绍, 本文做了如下几方面的工作: 第二章中首先介绍了当光在波导中传播时, 麦克斯韦方程在傍轴近似下的光传播方程, 该方程类似于含时薛定谔方程, 另外改变波导的弯曲程度可提供必要的驱动外场。其次, 我们研究了光在 (X, Z) 平面正弦弯曲的光波导阵列中的传输情况, 以及在有效两能级系统中能级免

交叉点处的 Landau-Zener 隧穿概率的解析解; 在第三章中我们通过对周期势的调制, 研究了不同周期势对 PT 对称区间的影响以及其相应的能谱。在不改变系统周期的基础上, 通过调制 PT 对称的势函数, 我们发现不改变实部周期的前提下虚部周期的减小将导致了 PT 对称的区间变小。并且通过数值计算得到周期势调制后最低两能带之间的 Landau-Zener 隧穿概率。最后, 在第四章中对整篇文章做出简单总结以及下一步工作的展望。

第二章 PT 对称光波导中的 Landau-Zener 隧穿

在过去的几十年里，量子-光学类比的实验和理论研究经历了一次惊人的复苏。特别是不同的光波导结构或耦合光波导被证明是一个非常丰富的实验室工具，用于光波与在原子、分子中量子相干效应的类比。第一类光学类比量子力学和量子信息的一般性问题，包括Aharonov-Bohm效应^[70]和Berry相^[71]，量子隧穿的相干控制^[36]，量子力学衰变的控制以及Zeno动力学^[72]，非厄米PT对称量子系统的波动力学^[20]，量子崩塌-复苏^[73-74]，自旋霍尔效应^[75]，经典的量子纠缠的模拟器，量子传输和量子随机行走^[76]。第二类光学类比模拟激光场驱动的原子的相干效应，如Rabi振荡和绝热快速通道^[77]，相干布居囚禁和相干布居迁移如类受激拉曼绝热通道^[78]，在超强激光场中原子的稳定性^[79]，Franck Condon原理的光学模拟^[80]，电磁感应透明现象^[81]。最后，第三类光学类比固体物理学包括：Bloch振荡^[27]，Zener隧穿^[40]，Anderson局域化^[82]，动态局域化^[83]以及其他的现象^[84-86]。量子-光学类比的最新发展主要关注于弯曲波导结构的应用。接下来的章节将详细讨论量子光学类比的一些最新进展，特别着重于在弯曲光波导中光的近轴传播时的量子光学类比。尽管本章介绍的不是特别详尽，但是光学和量子力学之间的类比研究仍然是一个活跃的研究领域，可以在相关物理领域中传递新的思想、概念和方法。

2.1 光波导中线性薛定谔方程的推导

当光在波导中传播时，麦克斯韦方程在傍轴近似下的光传播方程类似于含时薛定谔方程，且该方程可由麦克斯韦(Maxwell)方程推导变形得出。描述电磁场运动的方程组是麦克斯韦方程组^[87]，其微分形式为：

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\
 \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

式中 \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} 和 \vec{B} 分别为电场强度矢量、磁场强度矢量、电位移矢量和磁感应强度矢量； \vec{J} , ρ 分别为自由电流强度和自由电荷密度。而 ∇ 在直角坐标系中的表达式为

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

现在研究在光波导中电磁场运动形式，也就是说不存在自由电荷和传导电流的条件下($\vec{J}=0, \rho=0$ 时的情形)，麦克斯韦方程组中两个非齐次方程组变为齐次方程组：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (2.2)$$

设所考虑的介质是线性，各向同性，非磁性，内部不存在耗散的，且具有标量介电常数 ε 和标量磁导率 μ ，则本构方程可以写为

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

研究电磁场时，通常感兴趣的是电场强度 E 。将(2.2)式中第一式等式两边取旋度并利用第二式和(2.3)得，

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\quad (2.4)$$

用矢量分析公式及 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 可得，

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}\quad (2.5)$$

代入(2.4)式得电场强度 \vec{E} 的偏微分方程：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.\quad (2.6)$$

通常，我们考虑时谐场的情况，即电磁场按照正弦波的形式变化。假设周期性变化的角频率为 ω ，电磁波沿 Z 向传播，(2.6)式具有随时间周期变化的解，数学上用复数形式表示为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{e}_x [E(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + c.c.] \quad (2.7)$$

式中 $c.c$ 代表前一项的复共轭， \hat{e}_x 为 x 方向的单位矢量。将(2.7)代入(2.6)式，我们可以得到亥姆霍茨(Helmholtz)方程

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0 \quad (2.8)$$

其中 $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ 。若电磁波沿 Z 方向传播，振幅方程(2.8)应有传播因子，所以我们把

电场取为 $E(\vec{r}) = \psi(X, Y, Z) \exp(ik_z Z)$ 。将该表达式代入(2.8)，可以得到

$$\begin{aligned} & \nabla^2 E(\vec{r}) \\ &= \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right] \exp(ik_z Z) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \exp(ik_z Z) \\ &+ 2ik_z \frac{\partial \psi}{\partial Z} \exp(ik_z Z) - k_z^2 \psi \exp(ik_z Z) \end{aligned}$$

在慢变包络近似(Slowly Varying Envelop Approximation)下，有 $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right|$ ，忽略二级偏导项，(2.8)式写为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + 2ik_z \frac{\partial \psi}{\partial Z} + (k^2 - k_z^2) \psi = 0 \quad (2.9)$$

其中 $k = nk_0$ ， $k_z = n_s k_0$ 。 $n(X, Y, Z)$ 为介质材料的折射率， k_0 为真空中的波矢， n_s 是波导中基质的折射率。(2.9)式变为如下形式

$$i\hbar \partial_z \psi = -\frac{\hbar^2}{2n_s} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) + U(X, Y, Z) \psi \quad (2.10)$$

其中势函数的表达式为

$$U(X, Y, Z) = \frac{n_s^2 - n(X, Y, Z)^2}{2n_s} \approx n_s - n(X, Y, Z)$$

$\hbar = \lambda/2\pi$ ， λ 为真空中的波长。方程(2.10)类似于含时薛定谔方程，其中 \hbar 相当于 \hbar ， Z 相当于时间 t ， n_s 相当于质量 m 。光学中光波导的发展离不开理论工作的指导，目前已经发展了很多计算方法用于精确预测和设计光波导中的传输特性，从而使光波导在理论和应用上的研究都产生新的飞跃。接下来我们将在2.2章中介绍一个关于光波导的具体模型来加深我们对它的理解。

2.2 理论模型

我们研究波长为 λ 的单色光在 (X, Z) 平面光波导阵列中的传输情况。其中光波导阵列是沿 X 方向且等间距排列，其间距为 a 。波导沿 Z 方向是弯曲的，且弯曲程度都一致用 $X_0(Z) = A \sin(\omega Z)$ 来描述，其中 A 是波导管弯曲程度的振幅， ω 是其频率。波导管排列示意图如图 2.1 所示。

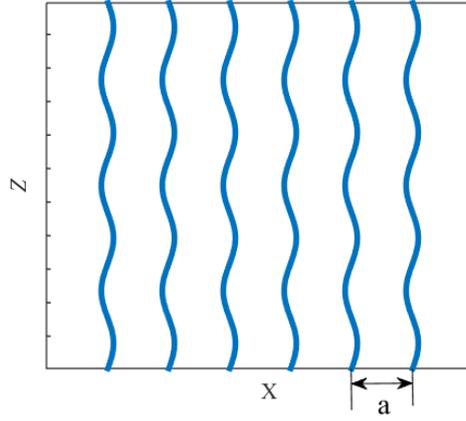


图 2.1 波导阵列示意图。

对于二维光波导，光在波导中传播时，在 Y 方向上不受限制可看作 ∞ ，即 $\partial/\partial Y = 0$ 。由方程 (2.10) 可得，描述电场振幅 ψ 的有效传播方程为^[35]

$$i\tilde{\lambda}\partial_z\psi = -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_s}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 X} + U(x)\psi \quad (2.11)$$

其中 $x = X - X_0(Z)$ ， $U(x) \approx n_s - n(x)$ ， $n(x)$ 是波导阵列的有效折射率且周期为 a ，即 $n(x) = n(x+a)$ 。利用规范变换

$$\Psi(x, Z) = \psi(x, Z) \exp\left(-\frac{in_s}{\tilde{\lambda}}\dot{X}_0(Z)x - \frac{in_s}{2\tilde{\lambda}}\int_0^Z d\xi \dot{X}_0^2(\xi)\right) \quad (2.12)$$

(点表示对 Z 求导)，方程(2.11)变为^[35]

$$i\tilde{\lambda}\partial_z\Psi = \hat{H}_0\Psi - F(Z)x\Psi \quad (2.13)$$

其中

$$\hat{H}_0 = -\frac{\tilde{\lambda}^2}{2n_s}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + U(x) \quad (2.14)$$

周期驱动力为

$$F(Z) = -n_s\ddot{X}_0(Z) = n_s A\omega^2 \sin(\omega Z) \quad (2.15)$$

对于复数势， $U(x)$ 的虚数部分使得哈密顿量 \hat{H} 变成非厄米算符。在下面，我们将考虑满足(1.8)式的势函数形式

$$U(x) = U_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + iU_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad (2.16)$$

从而 \hat{H}_0 是 PT 对称的。对于 $U_1 > U_2$ ， \hat{H}_0 的本征能量是实数。当 $U_1 < U_2$ 时能谱出现复数，PT 对称发生破缺，本征值为复数且满足互为复共轭对。今后，我们认为 $U_1 > U_2$ ，

除非另有规定。在不考虑周期驱动力的情况下， \hat{H}_0 的本征函数为布洛赫(Bloch)动量为 q 的 Floquet–Bloch 波函数 $\phi_{qn}(x)$ ，其满足方程 $\hat{H}_0\phi_{qn}(x) = E_n(q)\phi_{qn}(x)$ ，其中 $E_n(q)$ 对应第 n 个 Floquet–Bloch 带的本征能量。然而在晶体中 $E_n(-q) = E_n(q)$ ，波函数在宇称变换 $x \rightarrow -x$ 以及 $q \rightarrow -q$ 时，遵循以下关系 $\phi_{qn}^\dagger(x) = \phi_{-qn}(-x)$ ，其中 $\phi_{qn}^\dagger(x)$ 是 \hat{H}_0^\dagger 的本征函数。此外，满足正交关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{qn}^\dagger(x)\phi_{q'm}(x)dx = d_{qn}\delta(q-q')\delta_{nm} \quad (2.17)$$

其中 $d_{qn} = \pm 1$ 。传播方程(2.13)的波函数可以写成 \hat{H}_0 的本征函数的叠加形式：

$\Psi_q(x, Z) = \sum_n C_{qn}(Z)\phi_{qn}(x)$ ，这里 $C_{qn}(Z) = C_n \exp(-iE_n Z/\lambda)$ ， C_n 为常系数， $\phi_{qn}(x) = \omega_{qn}(x)e^{iqx}$ ， $\omega_{qn}(x+a) = \omega_{qn}(x)$ 。将 $\omega_{qn}(x)$ 在傅里叶基矢下展开：

$$\Psi_q(x, Z) = \sum_l a_q^l(Z)e^{i(2k'l+q)x} \quad (2.18)$$

其中 $a_q^l(Z) = \sum_n C_{qn}(Z)b_{qn}^l$ ， $k' = \pi/a$ 。 b_{qn}^l 是 $\omega_{qn}(x)$ 的傅里叶展开系数，量子数 $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。将方程(2.16)和(2.18)代入(2.13)中，我们得到关于 a_q^l 的无量纲动力学方程

$$i\frac{\partial a_q^l}{\partial z} = (2l + \tilde{q})^2 a_q^l + (V_1 - V_2)a_q^{l+1} + (V_1 + V_2)a_q^{l-1} \quad (2.19)$$

其中 $z = Z\varepsilon_k/\lambda$ ， $\tilde{q} = q/k'$ ， $V_j = U_j/2\varepsilon_k$ ， $j = 1, 2$ ，其中 $\varepsilon_k = \lambda^2 k'^2/2n_s$ 。为了方便，在通常量子力学方程(2.19)可写为演化方程

$$i\partial_z |a_q(z)\rangle = \hat{H}_0 |a_q(z)\rangle \quad (2.20)$$

其哈密顿量可以写成下面的形式

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & (\tilde{q}-2)^2 & V_1+V_2 & 0 & 0 \\ \dots & V_1-V_2 & \tilde{q}^2 & V_1+V_2 & \dots \\ 0 & 0 & V_1-V_2 & (\tilde{q}+2)^2 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

从(2.21)式可以看出哈密顿量矩阵是实数矩阵，但是 $\hat{H}_0^\dagger \neq \hat{H}_0$ ，也就是说 \hat{H}_0 为非厄米哈密顿量且在 $V_1 > V_2$ 时存在实数谱。从这个表达可以看出，势函数虚数部分的振幅 V_2 决定了 \hat{H}_0 的性质。问题类似于在离散链上质点运动的动力学，且跃迁振幅不对称分别为 $V_1 + V_2$ ， $V_1 - V_2$ ，格点在位能为 $(2l + \tilde{q})^2$ 。在光学系统(2.13)中，很明显的事实是： U_2 的正值(负值)对应了能量的增益(耗散)。将(2.21)式哈密顿量数值对角化得到的能

带图如图 2.2。图 2.2(a,b)画出了在 $V_1 > V_2$ 的情况下的能带图，其中实线代表第一能带，虚线和点划线分别代表第二能带和第三能带。图 2.2(a)显示最低两能带接近但不交叉；图 2.2(b)显示在 PT 对称区间能量的虚部是 0，能谱是实的；图 2.2(c,d) 画出了 $V_2 = V_1$ 时的能带图。图 2.2(c)发现在 $\tilde{q} = 1$ 时能级简并，图 2.2(d)仍然显示本征能量的虚部是 0，能谱是实的；图 2.2(e,f) 画出了在 $V_1 < V_2$ 情况下的能带图，此时 PT 对称发生破缺。图 2.2(f)显示本征能量的虚部不为 0，即出现虚数。而且第一能带和第二能带的实数部分和虚数部分分别关于横坐标对称，其表明了 PT 对称发生破缺时，本征值为复数且满足成对互为复共轭对。所以，我们可以得出 $V_1 = V_2$ 是奇异点发生的条件，即系统的相变点。

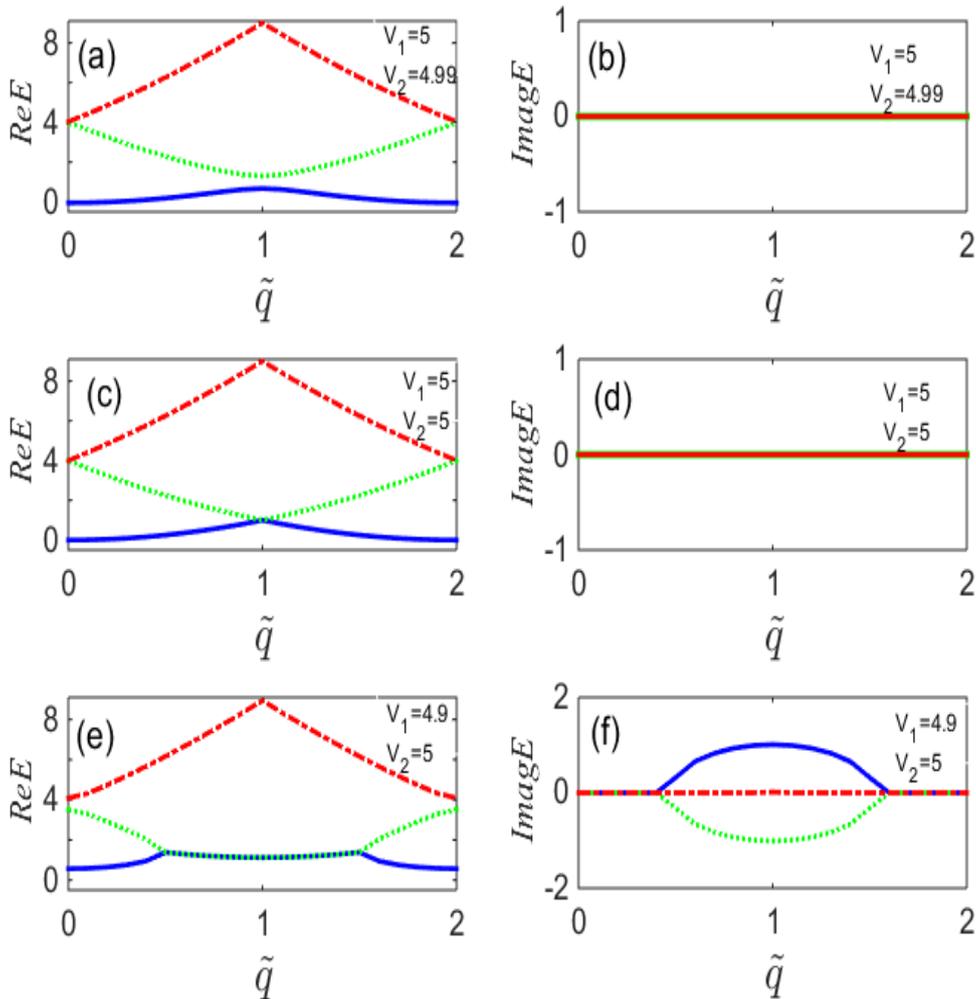


图 2.2 系统的能带是布洛赫动量的函数：(a)、(b)当 $V_1 > V_2$ 时描述了三个最低能带的实部和虚部；

(c)、(d)分别表示 $V_2 = V_1$ 的情况；(e)、(f) 分别表示 $V_1 < V_2$ 的情况。

在本章中，研究在近轴弯曲导致的交流驱动力(2.15)下，布洛赫动量随时间的演化

$$q(z) = q_0 - n_s A \omega \cos\left(\frac{\omega \tilde{\lambda}}{\varepsilon_k} z\right) \quad (2.22)$$

此外，我们将重点讨论在 PT 对称区间对应的最低两能带能级免交叉点处的动力学问题(如图 2.2(a)所示)。在有效的两能级系统中随时间的演化问题将在章节 2.3 中进一步讨论。需要注意的是，对于 PT 对称哈密顿量 \hat{H}_0 ，传播光束的功率保持恒定，始终保证 $U_1 > U_2$ 。如果我们考虑外力的存在，如方程(2.15)，那么 PT 对称性被破坏了，功率不再是守恒量。因此，在力的作用下，能带之间的跃迁在功率不守恒时才可能发生。最近，在外力很小的情况下，研究表明具有 PT 对称的复式晶格中的布洛赫振荡行为与普通晶格中不同^[30]。我们将会在本章 2.3.2 中介绍在任意强度的恒定外力 $F(Z) = F$ 下，两能级系统的动力学问题。

2.3 有效两能级系统中的 Landau-Zener 隧穿

为了获得动力学的近似解析结果，我们将重点放在对免交叉点附近分析上。对于给定的两能带之间的微小分离即能级免交叉，可以忽略其他能带对它的影响。一个合适的描述可以由有效的两能级哈密顿量来提供。从矩阵(2.21)考虑最低两能带，并获得其相应的有效哈密顿量

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} [\tilde{q} + 2(l-1)]^2 & V_1 + V_2 \\ V_1 - V_2 & (\tilde{q} + 2l)^2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

所以能级平移 $(\tilde{q} + 2l)^2 + 2 - 2(\tilde{q} + 2l)$ 后，可得有效两能级系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon & 2(V_1 + V_2) \\ 2(V_1 - V_2) & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

其中 $\varepsilon = 4(1 - 2l - \tilde{q})$ 。不同于厄米情形，在方程(2.23)中 $\hat{H}_{1,2} \neq \hat{H}_{2,1}^*$ ，因此本征值会出现复数。通过解方程(2.23)得久期方程

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + 4(V_1^2 - V_2^2)} \quad (2.25)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，两能带之间的能隙为 $\Delta = \sqrt{4(V_1^2 - V_2^2)}$ 。另一方面，当 $V_1^2 > V_2^2$ 时，虚数本征值出现在区域 $\varepsilon^2 < 4(V_2^2 - V_1^2)$ ，表明体系超过临界点，即 PT 对称破缺。

2.3.1 交变驱动力下有效两能级系统中的 Landau-Zener 隧穿

正如我们前面提到的，在方程(2.13)中沿近轴方向弯曲的正弦轴的存在模拟了交变驱动力，使得布洛赫(Bloch)动量沿传播方向周期性变化在方程(2.22)中。因此，矩阵(2.24)的对角元素可以写成以下形式

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{A} \cos(\tilde{\omega}z) \quad (2.26)$$

其中 $\varepsilon_0 = 4(1 - 2l - q_0/k')$ ， $\tilde{\omega} = \omega \tilde{\lambda}/\varepsilon_k$ ， $\tilde{A} = 4n_s A \omega/k' = 2A\tilde{\omega}k'$ 。能谱的结果如图 2.3 所示。实线代表第一能带 E_- ，点线代表第二能带 E_+ 。为了研究这种周期驱动的二能级系统，我们将采用绝热-脉冲模型，它对于研究重复驱动通过免交叉点的系统是非常方便的，且免交叉点的位置为

$$\tilde{q} = 1 - 2l \quad (2.27)$$

其中 l 为整数。

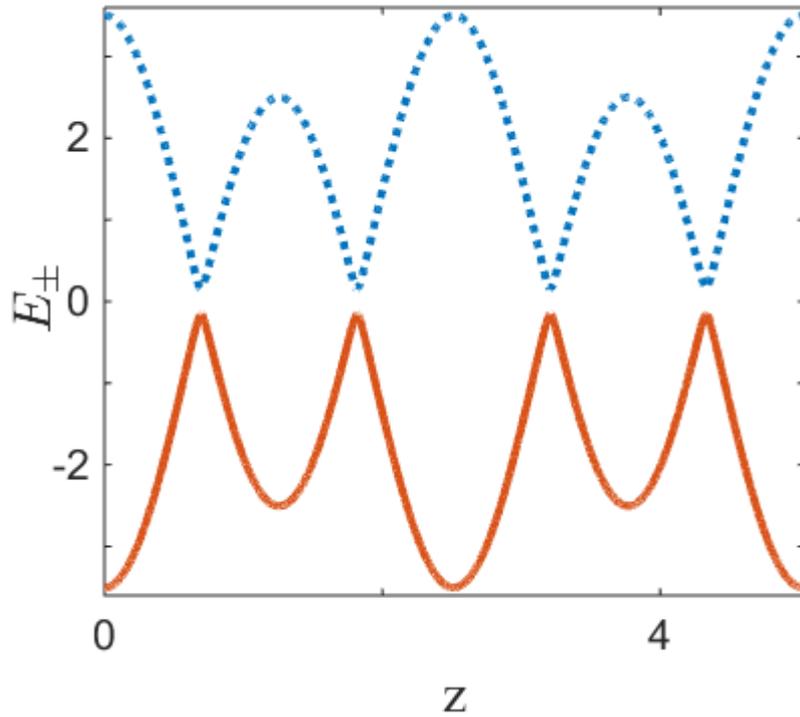


图 2.3 周期驱动二能级系统的能谱随时间的变化。

Landau-Zener 隧穿概率的解析表达式为

$$P_{LZ} = e^{-2\pi\gamma}. \quad (2.28)$$

绝热参数 $\gamma = \varepsilon_{12}^2/\beta = \Delta^2/4\beta = (V_1^2 - V_2^2)/\beta$ ，表明隧穿十分缓慢。考虑到周期驱动

(2.26), 在本章中, 免交叉点处的速度可以根据(1.25)计算给出

$$\beta = \tilde{A}\tilde{\omega}\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_0}{A}\right)^2}. \quad (2.29)$$

2.3.2 恒定外力下有效两能级系统中的 Landau-Zener 隧穿

方程(2.13)中的波导管的弯曲程度可以模拟出一个恒定的外力 $F=c$, 该外力导致布洛赫动量在传播方向随时间的演化为:

$$q(z) = \frac{c\tilde{\lambda}}{\varepsilon_k} z \quad (2.30)$$

因此, 有效两能级哈密顿量矩阵(2.24)的对角元素可以写成以下形式

$$\varepsilon = -4\alpha z + \varepsilon_0 \quad (2.31)$$

其中 $\varepsilon_0 = 4(1-2l)$, $\alpha = \tilde{\lambda}ca/\pi\varepsilon_k$ 。能谱的结果如图 2.4 所示。实线代表第一能带和第二能带, 虚线代表在极限情况 $V_1 = |V_2|$ 下能级的分布。

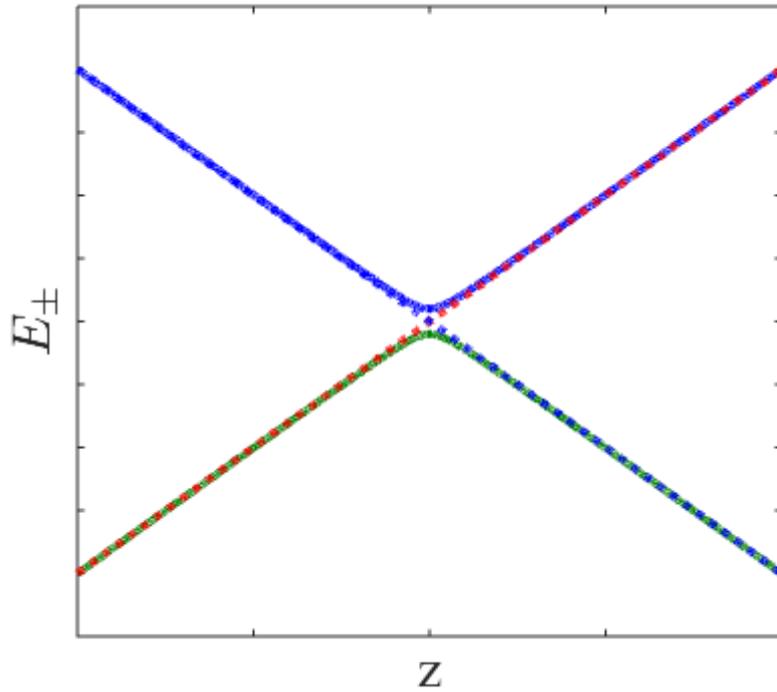


图 2.4 在线性驱动下, 二能级系统的能谱随时间的变化。

在 Landau-Zener 理论中, 免交叉点处的速度同样是由(1.25)计算给出

$$\beta = 4\alpha \quad (2.32)$$

当 $z = \varepsilon_0/4\alpha$ 时, 能级经过能隙并分离。 ε 是用来调控两能级之间的跃迁。为了研究带间跃迁, 初始时刻必须远离免交叉处 $|\beta z| \gg \sqrt{4(V_1^2 - V_2^2)}$ 。为了简单起见, 我们考

考虑基态 $|a_1(-\infty)|^2 = 1$ ，激发态 $a_2(-\infty) = 0$ 。在足够长的时间之后，随着系统的演化，我们可以给出渐近值的强度，即 Landau-Zener 隧穿的隧穿概率

$$P = |a_2(\infty)|^2 = \exp\left[-\frac{\pi\Delta^2}{2\beta}\right] = \exp\left[-\frac{\pi(V_1^2 - V_2^2)}{2\alpha}\right]. \quad (2.33)$$

2.4 本章小结

在 PT 对称复式晶格中的 Landau-Zener -Stueckelberg 隧穿可以在光波导阵列中实现。本章从傍轴近似下的光传播方程出发研究了波长为 λ 的单色光在 (X, Z) 平面光波导阵列中的传输情况，并计算出有效两能级系统的隧穿概率。总的来说，两能级系统框架为复式晶体在周期驱动下动力学的主要特征提供了准确的预测，并给出了全面的理解。通过研究发现，由于 Landau-Zener-Stueckelberg(LZS)干涉机制的存在，结果强烈地依赖于在周期驱动过程中动力学相位的累积。总之，我们发现 Landau-Zener-Stueckelberg(LZS)干涉机制可以作为一个强大的工具来控制复式波导阵列光束强度。

第三章 PT 对称波导中周期势的调制对相变的影响

PT 对称的研究最早是在光波导中实现的。波导折射率^[29]满足 $n(x) = n^*(-x)$ ，则由折射率决定的势函数满足 $U(x) = U^*(-x)$ 。由于 PT 对称哈密顿量对势函数的特殊要求，系统中引入 PT 对称时通常需要构造满足条件的势函数形式来实现^[88-89]。当光在波导中传播时，麦克斯韦方程在傍轴近似下的光传播方程类似于含时薛定谔方程^[26-27]，另外改变波导的弯曲程度可提供必要的驱动外场^[35]。当周期势的实部和虚部的周期相同，且实部振幅大于虚部振幅时，系统的哈密顿量处于 PT 对称区域；当实部振幅小于虚部振幅时，PT 对称发生破缺；两个振幅相等时是奇异点。当周期势的实部和虚部周期不同时，其对 PT 对称区间以及能谱的影响是本章研究的重点。

3.1 PT 对称光波导中周期势调制对 PT 对称区间及能谱的影响

2012 年，Morales-Molina 等人研究了势函数的实部和虚部周期相同，即 $U(x) = U_1 \cos(2k'x) + iU_2 \sin(2k'x)$ 时存在实数谱的条件以及其相应的能谱，这里 $k' = \pi/a$ ， U_1 ， U_2 分别代表势函数实部及虚部的振幅。结果表明当 $U_1 > U_2$ 时， \hat{H}_0 的本征能量是实数。当 $U_1 < U_2$ 时能谱出现复数，PT 对称发生破缺^[31]。

本章着重研究周期势的实部和虚部周期不同时对 PT 对称及能谱的影响。考虑势函数为

$$U(x) = U_1 \cos(2k'x) + iU_2 \sin(4k'x) \quad (3.1)$$

$U(x)$ 的周期为 a ，但是我们从公式(3.1)发现实部周期与 $U(x)$ 相同，而虚部函数的周期是 $U(x)$ 的 $1/2$ ，相当于 $U(x)$ 一个周期内增益或耗散出现的频率多了一倍，即实部周期仍然为 a ，而虚部的周期为 $a/2$ 的情形。

根据第二章中的方程(2.13)，在不考虑周期驱动力的情况下，该传播方程的波函数仍然可以写成 \hat{H}_0 的本征函数的叠加形式，且由于系统周期不变，周期函数 $\omega_{qn}(x)$ 在傅里叶基矢下展开形式仍然不变，即波函数展开形式与(2.18)式相同。

将方程(3.1)和(2.18)代入(2.13)中，我们得到关于 a_q^l 的无量纲动力学方程

$$i \frac{\partial a_q^l}{\partial z} = (2l + \tilde{q})^2 a_q^l + V_1 a_q^{l+1} + V_1 a_q^{l-1} + V_2 a_q^{l-2} - V_2 a_q^{l+2} \quad (3.2)$$

在量子力学中为了方便，方程(3.2)可写为演化方程

$$i \partial_z |a_q(z)\rangle = \hat{H}_0 |a_q(z)\rangle \quad (3.3)$$

其哈密顿量可以写成下面的形式

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & (\tilde{q}-2)^2 & V_1 & V_2 & 0 \\ \cdots & V_1 & \tilde{q}^2 & V_1 & \cdots \\ 0 & -V_2 & V_1 & (\tilde{q}+2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

我们可以发现 $\hat{H}_0^\dagger \neq \hat{H}_0$ ，虽然每个矩阵元是实数，但(3.4)式是非厄米的哈密顿量。文献[31]研究的哈密顿量非对角元只出现在近邻对角线上，而(3.4)式中则出现了次近邻项。通过 101 个波导数值计算发现：文献[31]中研究的结果 $V_1 = V_2$ 是奇异点发生的条件(如图 2(a)三角符号所示，虚线是数值拟合函数)。在图 3.1(a)中当 $V_2 < V_1$ 系统才有实的本征谱。而我们研究的哈密顿量(3.4) V_1 和 V_2 满足如图 3.1(b)曲线是奇异点的位置(圆圈代表数值结果，虚线代表对数值结果的拟合函数)，在曲线下面区域才有实的本征谱。

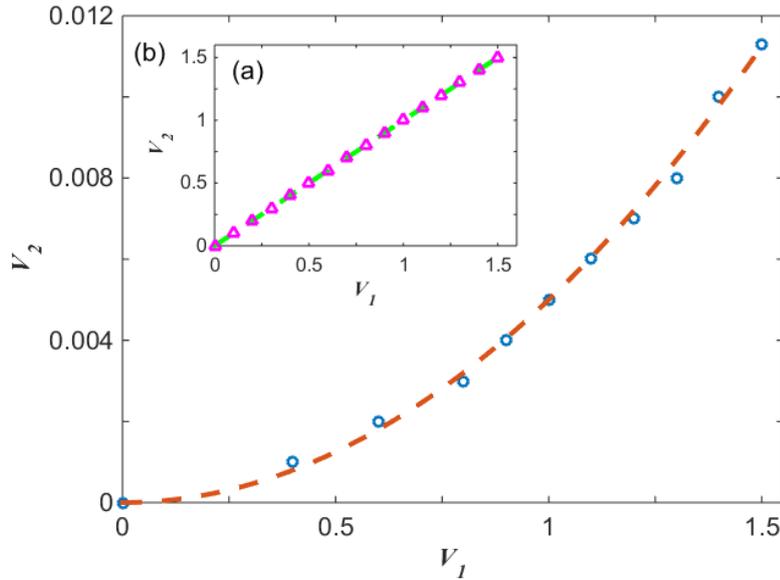


图 3.1 文献[31]中奇异点 V_1 和 V_2 的关系图。(b)方程(3.4)奇异点 V_1 和 V_2 的关系图。

结果表明由于势函数实部和虚部的周期不同 PT 对称区域缩小了。通过拟合发现 V_1 和 V_2 满足以下关系：

$$V_2 \approx \alpha V_1^2 \quad (3.5)$$

其中 $\alpha = 0.005$ (仅考虑 V_1 取 0 ~ 1.5 时二者之间的关系)。该方程还原量纲后为：

$U_2 \approx \alpha U_1^2 / 2\varepsilon_k$ 。当 $V_2 < \alpha V_1^2$ 时，公式(3.4)有实的本征谱，反之则反。在 PT 对称区间，我们发现最低两能带在 $\tilde{q} = 1$ 处，带隙最小，而 V_1 的取值会影响带隙的大小。图 3.2(a, b)画出了在 $V_2 < \alpha V_1^2$ 的情况下的能带图，其中实线代表第一能带，虚线和点划

线分别代表第二能带和第三能带。图 3.2(b)显示在 PT 对称区间能量的虚部是 0，能谱是实的。而当 $V_2 > \alpha V_1^2$ 时，如图 3.2(c, d) 能量虚部出现非零值，PT 对称发生破缺。

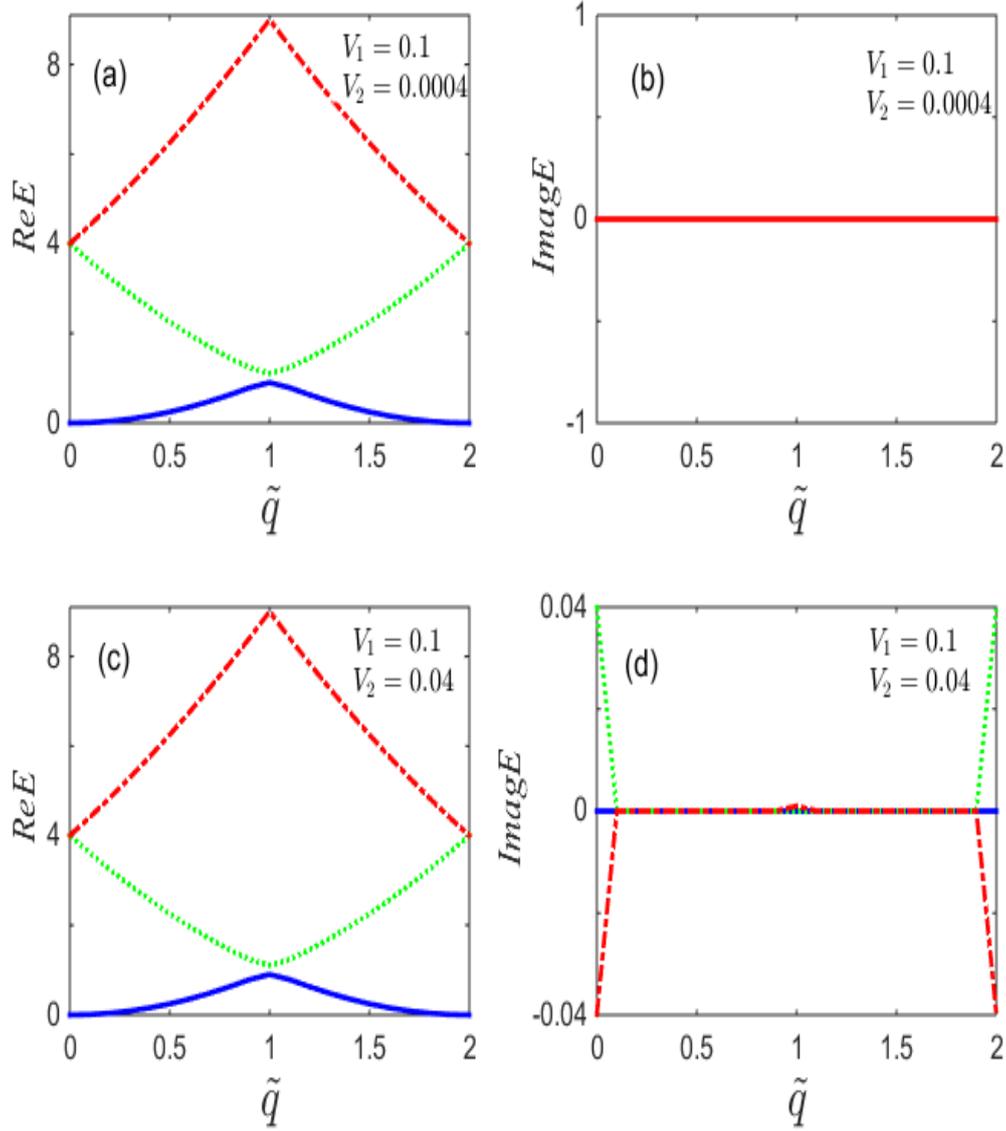


图 3.2 系统的能带是布洛赫动量的函数:(a)、(b)当 $V_2 < \alpha V_1^2$ 时描述了三个最低能带的实部和虚部;
(c)、(d)分别表示 $V_2 > \alpha V_1^2$ 的情况。

另一方面，我们考虑周期势函数形式为

$$U(x) = U_1 \cos(2k'x) + iU_2 \sin(6k'x) \quad (3.6)$$

$U(x)$ 的周期为 a ，但是我们从公式(3.6)发现实部周期与 $U(x)$ 相同，而虚部函数的周期是 $U(x)$ 的 $1/3$ ，也就是 $U(x)$ 一个周期内增益和耗散(虚部)出现的频率多了两倍，即实部周期仍然为 a ，而虚部的周期为 $a/3$ 的情形。通过同样的方法，我们可以得到关于

a_q^l 的无量纲动力学方程

$$i \frac{\partial a_q^l}{\partial z} = (2l + \tilde{q})^2 a_q^l + V_1 a_q^{l+1} + V_1 a_q^{l-1} + V_2 a_q^{l-3} - V_2 a_q^{l+3} \quad (3.7)$$

将(3.7)式写成演化方程(3.3)的形式，其哈密顿量可表示为

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & (\tilde{q}-2)^2 & V_1 & 0 & V_2 \\ 0 & V_1 & \tilde{q}^2 & V_1 & 0 \\ -V_2 & 0 & V_1 & (\tilde{q}+2)^2 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

相比哈密顿量(3.4)，该哈密顿量的非对角项 $(\hat{H}_0)_{l,l\pm 1} = V_1$ 不变，而另外两项位置发生改变： $(\hat{H}_0)_{l,l+3} = V_2$ 和 $(\hat{H}_0)_{l,l-3} = -V_2$ ，即非对角项出现在更加远离对角线的地方。对于我们研究的哈密顿量(3.8)， V_1 和 V_2 满足如图 3.3 曲线是奇异点的位置(圆圈代表数值结果，虚线代表对数值结果的拟合函数)，在曲线下面区域才有实的本征谱。

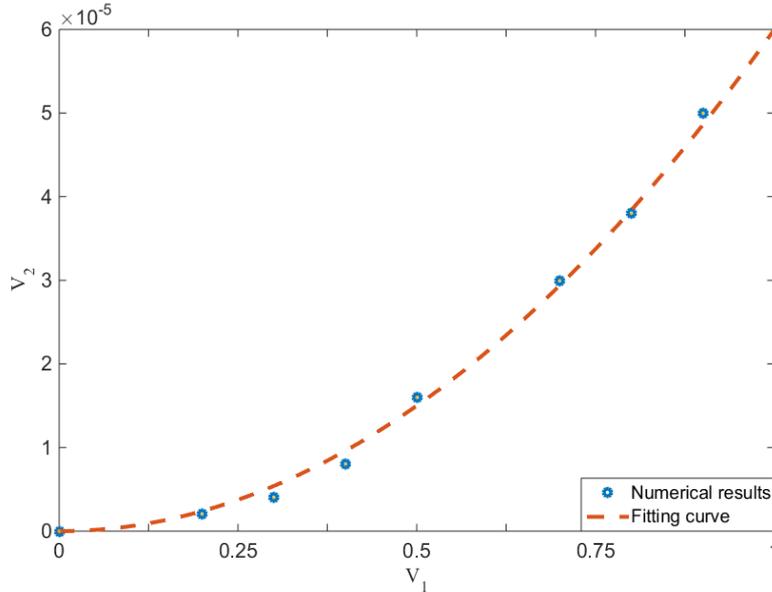


图 3.3 方程(3.8)奇异点 V_1 和 V_2 的关系图。

同样通过数值计算我们发现哈密顿量有实本征谱的区间变小， V_1 和 V_2 满足

$$V_2 \approx \beta V_1^2 \quad (3.9)$$

是 PT 对称发生破缺的奇异点，其中 $\beta = 0.00006$ (仅考虑 V_1 取值很小时二者之间的关系)。该方程还原量纲后为： $U_2 \approx \beta U_1^2 / 2\varepsilon_k$ 。当 $V_2 < \beta V_1^2$ 时，公式(3.8)有实的本征谱，反之则反。在 PT 对称区间，我们发现最低两能带在 $\tilde{q} = 1$ 处，带隙最小，而 V_1 的取值会影响带隙的大小。图 3.4(a, b)画出了在 $V_2 < \beta V_1^2$ 的情况下的能带图，其中实线代表第一能带，虚线和点划线分别代表第二能带和第三能带。图 3.4(b)显示在 PT 对称

区间能量的虚部是 0，能谱是实的。而当 $V_2 > \beta V_1^2$ 时，如图 3.4(c, d) 能量虚部出现非零值，PT 对称发生破缺。

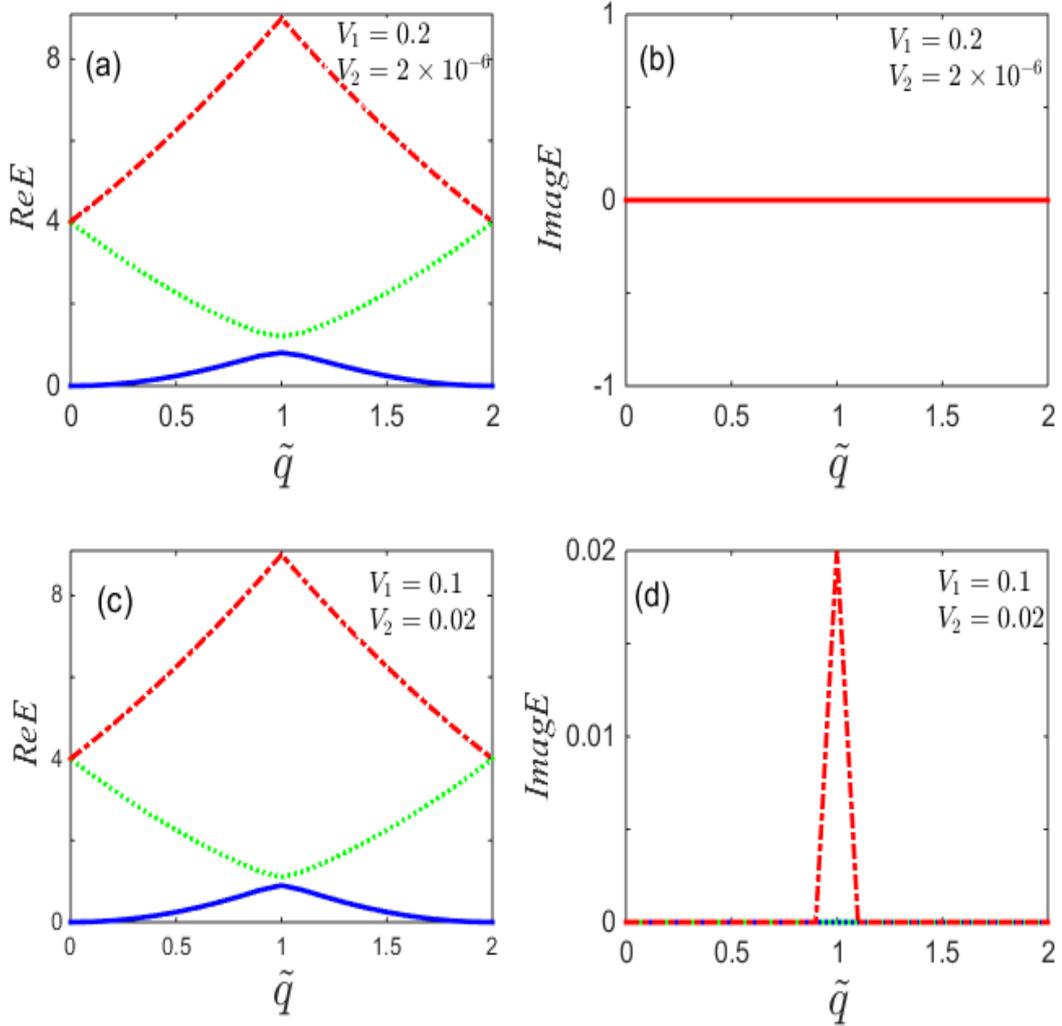


图 3.4 系统的能带是布洛赫动量的函数:(a)、(b)当 $V_2 < \beta V_1^2$ 时描述了三个最低能带的实部和虚部;

(c)、(d)分别表示 $V_2 > \beta V_1^2$ 的情况。

根据上文中的介绍，我们可以将结果推广到更为普遍的情况。如果势函数的形式为 $U(x) = U_1(x)\sin(2\pi x/a) + iU_2(x)\cos(2n\pi x/a)$ ，其中 $n = 1, 2, \dots$ 。整个系统周期并不发生变化，仍然为 a ，且哈密顿量在倒格子空间下的对角元仍然不会发生改变，非对角项 $(\hat{H}_0)_{l,l\pm 1} = V_1$ 位置不变，而另外两项随着 n 的增加位置发生移动，如 $(\hat{H}_0)_{l,l+n} = V_2$ 和 $(\hat{H}_0)_{l,l-n} = -V_2$ 。通过数值计算发现随着 n 的增大，参数 V_1 和 V_2 满足的 PT 对称区域不断变小。而如果势函数的形式为 $U(x) = U_1(x)\sin(2\pi x/a) + iU_2(x)\cos[(2n+1)\pi x/a]$ ，其中 $n = 1, 2, \dots$ ，整个系统周期

将变为 $2a$ 。在该情况下，数值计算发现 PT 对称区间非常小。在本章中我们只研究系统周期不变的情况，对周期发生改变时对相变的影响不做详尽介绍。

3.2 PT 对称光波导中周期势调制对 Landau-Zener 隧穿影响

在本章中近轴弯曲导致的交替驱动力(2.15)作用下，准动量随时间的演化依然同(2.22)式。我们主要集中观察在 PT 对称区间对应的最低两能带能级免交叉点处的动力学问题。根据两能级系统 Landau-Zener 隧穿概率公式(1.24)式，以势函数(3.1)下的能谱为例进行研究。根据数值结果(3.5)，在 PT 对称区间中每取定一组 V_1 , V_2 的值就会有唯一的 Δ 和 β 与之对应，从而利用(1.24)式计算出 Landau-Zener 隧穿的隧穿概率。如图 3.5 所示可观察到由于 V_2 远小于 V_1 ，隧穿概率随着 V_1 增大而减小，不随 V_2 的变化而变化。

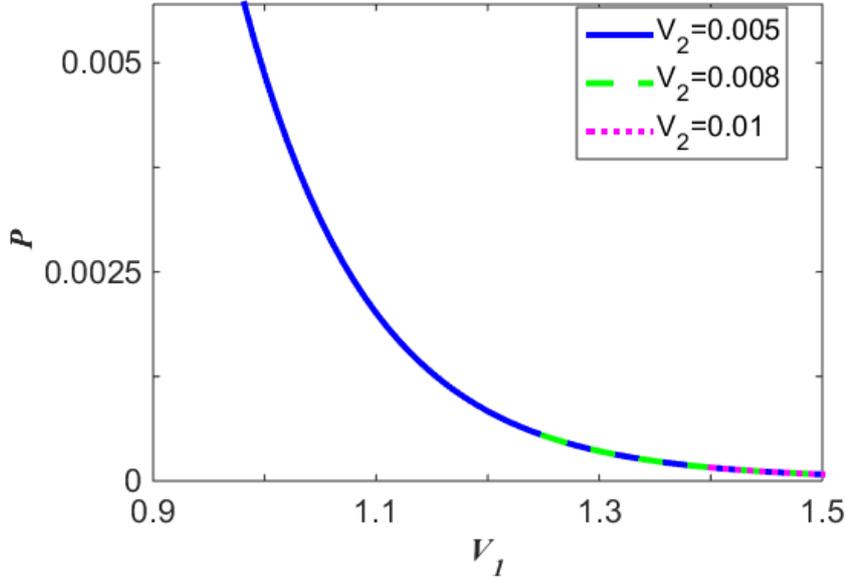


图 3.5 V_2 取不同值时，Landau-Zener 隧穿概率随 V_1 的变化。

3.3 本章小结

本章主要研究了不同周期势对 PT 对称区间的影响以及其相应的能谱。首先从傍轴近似下光传播的电场振幅方程出发，在不改变系统周期的基础上，通过调制 PT 对称的势函数，我们发现当虚部周期是实部的 $1/2$ 时，PT 对称发生破缺的奇异点为 $V_2 \approx \alpha V_1^2$ ，当 $V_2 < \alpha V_1^2$ 哈密顿量具有实的本征谱；而当 $V_2 > \alpha V_1^2$ 复数本征值出现。当虚部周期是实部周期的 $1/3$ 时，数值计算发现 PT 对称发生破缺的奇异点为 $V_2 \approx \beta V_1^2$ 。总之，在不改变实部周期的前提下虚部周期的减小导致了 PT 对称区间变小。最后利用两能级 Landau-Zener 隧穿概率公式，可以得到最低两能级免交叉点处

Landau-Zener 隧穿概率的数值解，发现隧穿概率随着 ν_1 增大而减小，不随 ν_2 的变化而变化。

第四章 总结与展望

4.1 总结

本文研究了光在一维排列满足 PT 对称的波导中的传输情况。首先介绍了量子力学中 PT 对称的研究进展，且通常通过势函数的表达式满足 $U(x) = U^*(-x)$ 来引入 PT 对称。波导结构中包括合理的增益和耗散，在光学框架中的耗散参数反映在折射率上时满足下列关系： $n(x) = n^*(-x)$ 。由于这种结构有特定对称性，所以由此产生的相变及动力学问题显示出有趣的特性。为了揭示这些特性，我们利用麦克斯韦方程在傍轴近似下的光传播方程及复折射率的周期性，得到哈密顿量 \hat{H}_0 在倒格子空间下的表达形式。将哈密顿量 \hat{H}_0 数值对角化得到其在 PT 对称区间的能带图后，我们进一步研究最低两能带能级交叉点处的动力学问题。为了获得动力学的近似解析结果，近似截取一个有效的两能级哈密顿量，从而得到 Landau-Zener 隧穿概率的解析表达式。

当周期势的实部和虚部周期相同时，利用数值方法得到 PT 对称破缺的临界点，且实部振幅大于虚部振幅时，系统的哈密顿量处于 PT 对称区域；当实部振幅小于虚部振幅时，PT 对称发生破缺；两个振幅相等时是奇异点。而在不改变系统实部周期的基础上，改变虚部的周期对其进行研究，我们发现当虚部周期是实部的 1/2 时，PT 对称发生破缺的奇异点为 $V_2 \approx \alpha V_1^2$ ，当 $V_2 < \alpha V_1^2$ 哈密顿量具有实的本征谱；而当 $V_2 > \alpha V_1^2$ 复数本征值出现。当虚部周期是实部周期的 1/3 时，数值计算发现 PT 对称发生破缺的奇异点为 $V_2 \approx \beta V_1^2$ 。总之，在不改变实部周期的前提下虚部周期的减小将会导致 PT 对称区间变小。因为在对周期势的虚部周期进行调制后，无法近似截取一个有效的两能级哈密顿量，所以无法得到 Landau-Zener 隧穿概率的解析表达式。我们利用两能级 Landau-Zener 隧穿概率公式，得到周期势调制下 H_0 能谱的最低两能级交叉点处 Landau-Zener 隧穿概率的数值解。

4.2 展望

光在光波导阵列中传播时，可以实现在 PT 对称复式晶格中的 Landau-Zener-Stueckelberg 隧穿。在不同背景下，复式晶格可以在冷原子系统中实现。在这方面，对于光学晶格所实现的物质波在能带之间的跃迁的研究，原则上可以推广到 PT 对称系统。最近在复式晶体中对布洛赫振荡进行了研究，我们预计进一步探索复式晶体的奇异输运性质。此外，非厄米 PT 对称理论可以应用到很多物理模型中，比如：

Aubry-André 模型、动力学问题的研究、一维非厄米 PT 对称格点模型的拓扑和散射性质、自旋为半整数的费米子系统研究等。

参考文献

- [1] C. M. Bender and S. Boettcher, Real spectra in non-hermitian hamiltonians having PT symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998)
- [2] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Complex extension of quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401 (2002).
- [3] Z. Ahmed, Energy band structure due to a complex, periodic, PT-invariant potential, *Phys. Lett. A* **286**, 231 (2001).
- [4] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Faster than Hermitian quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 040403 (2007).
- [5] M. Znojil, PT-symmetric square well, *Phys. Lett. A* **285**, 7 (2001).
- [6] N. Moiseyev and S. Friedland, Association of resonance states with the incomplete spectrum of finite complex-scaled Hamiltonian matrices, *Phys. Rev. A* **22**, 618 (1980).
- [7] P. Dorey, C. Dunning, and R. Tateo, Spectral equivalences, bethe ansatz equations, and reality properties in PT-symmetric quantum mechanics, *J. Phys. A* **34**, 5679 (2001).
- [8] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Extension of PT-symmetric quantum mechanics to quantum field theory with cubic interaction, *Phys. Rev. D* **70**, 025001 (2004).
- [9] K. C. Shin, Eigenvalues of PT-symmetric oscillators with polynomial potentials, *J. Phys. A* **38**, 6147 (2005).
- [10] R. El-Ganainy, K. G. Makris, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, Theory of coupled optical PT-symmetric structures, *Opt. Lett.* **32**, 2632 (2007).
- [11] I. Y. Goldsheid and B. A. Khoruzhenko, Distribution of Eigenvalues in Non-Hermitian Anderson Models, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2897 (1997).
- [12] B. Bagchi and C. Quesne, Sl as a complex Lie algebra and the associated non-Hermitian Hamiltonians with real eigenvalues, *Phys. Lett. A* **273**, 285 (2000).
- [13] H. Markum, R. Pullirsch, and T. Wettig, Non-Hermitian random matrix theory and lattice QCD with chemical potential, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 484 (1999).
- [14] M. V. Berry, Lop-sided diffraction by absorbing crystals, *J. Phys. A* **31**, 3493 (1998).
- [15] D. O. Chudesnikov and V. P. Yakovlev, Bragg scattering on complex potential and formation of Super-Narrow momentum distributions of atoms in light fields, *Laser*

- Phys. **1**, 110 (1991).
- [16] M. K. Oberthaler, R. Abfalterer, and S. Bernet, *Atom Waves in Crystals of Light*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4980 (1996).
- [17] R. Michael and S. Barry, *Methods of modern mathematical physics Functional analysis*, Academic Press, New York-London, **14**, 9 (1980).
- [18] B. Zhu, L. Rong, and S. Chen, Interplay between Fano resonance and PT-symmetric in non-Hermitian discrete systems, Phys. Rev. A **91**, 042131 (2015).
- [19] E. P. Wigner and U. Fano, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Academic Press, New York, **28**, 408 (1959).
- [20] K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, Beam dynamics in PT-symmetric optical lattices, Phys. Rev. Lett. **100**, 103904 (2008).
- [21] Z. H. Musslimani, R. El-Ganainy, K. G. Makris, and D. N. Christodoulides, Optical solitons in PT periodic potentials, Phys. Rev. Lett. **100**, 030402 (2008).
- [22] A. Mostafazadeh, Spectral singularities of complex scattering potentials and infinite reflection and transmission coefficients at real energies, Phys. Rev. Lett. **102**, 220402 (2009).
- [23] C. Keller, M. K. Oberthaler, and R. Abfalterer, Tailored Complex Potentials and Friedel's Law in Atom Optics, Phys. Rev. Lett. **79**, 3327 (1997).
- [24] C. E. Rüter, Observation of parity-time symmetry in optics, Nat. Phys. **6**, 192 (2010).
- [25] S. Klaiman, Moiseyev, and Günther, Visualization of branch points in PT-symmetric waveguides, Phys. Rev. Lett. **101**, 080402 (2008).
- [26] S. Longhi, M. Marangoni, and M. Lobino, Observation of dynamic localization in periodically curved waveguide arrays, Phys. Rev. Lett. **96**, 243901 (2006).
- [27] S. Longhi, Optical Zener-Bloch oscillations in binary waveguide arrays, Europhys. Lett. **76**, 416 (2006).
- [28] X. Luo, J. Huang, and H. Zhong, Pseudo-parity-time symmetry in optical systems, Phys. Rev. Lett. **110**, 243902 (2013).
- [29] S. Longhi, Photonic transport via chirped adiabatic passage in optical waveguides, Opt. Phys. **40**, F189 (2007).
- [30] S. Longhi, Bloch Oscillations in Complex Crystals with PT-symmetric, Phys. Rev. Lett. **103**, 123601 (2009).

-
- [31] S. A. Reyes, F. A. Olivares, and L. Morales-Molina, Landau-Zener –Stückelberg interferometry in PT-symmetric optical waveguides, *J. Phys. A* . **45**, 1 (2012).
- [32] V. V. Konotop, J. Yang, and D. A. Zezyulin, Nonlinear waves in PT-symmetric systems, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035002 (2016).
- [33] J. Li, X. Zhan, and C. Ding, Enhanced nonlinear optics in coupled optical microcavities with an unbroken and broken parity-time symmetry, *Phys. Rev. A* **92**, 043830 (2015).
- [34] S. Longhi, Parity-Time symmetry meets photonics: A new twist in non-Hermitian optics, *Europhys. Lett.* **120**, 64001 (2018).
- [35] S. Longhi, Quantum-optical analogies using photonic structures, *Laser Photon. Rev.* **3**, 243 (2009).
- [36] G. D. Valle, M. Ornigotti, and E. Cianci, Visualization of coherent destruction of tunneling in an optical double well system, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 263601 (2007).
- [37] G. Lenz, I. Talanina, and C. M. De Sterke, Bloch oscillations in an array of curved optical waveguides, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 963 (1999).
- [38] N. Chiodo, V. G. Della, and R. Osellame, Imaging of Bloch oscillations in erbium-doped curved waveguide arrays, *Opt. Lett.* **31**, 1651 (2006).
- [39] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, *Phys. Z. Sowjetunion* **1**, 88 (1932).
- [40] C. Zener, Non-adiabatic crossing of energy levels, *Proc. R. Soc. London. A.* **137**, 696 (1932).
- [41] E. C. G. Stueckelberg, Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen, *Helv. Phys. Acta.* **5**, 369 (1932).
- [42] D. A. Harmin and P. N. Price, Incoherent time evolution on a grid of Landau-Zener anticrossings, *Phys. Rev. A* **49**, 1933 (1994).
- [43] M. H. S. Amin, D. V. Averin, and J. A. Nesteroff, Decoherence in adiabatic quantum computation, *Phys. Rev. A* **91**, 718 (2007).
- [44] A. Bardow, W. Marquardt, and V. Göke, A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of an NP complete problem, *Science* **292**, 472 (2001).
- [45] D. M. Berns, M. S. Rudner, and S. O. Valenzuela, Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom, *Nature* **455**, 51 (2008); S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and

- F. Nori, Landau-Zener –Stückelberg interferometry, *Phys. Rep.* **492**, 1(2010);
 S. Ashhab, J. R. Johansson, and A. M. Zagoskin, Two-level systems driven by large-amplitude fields, *Phys. Rev. A* **75**, 1004 (2007).
- [46] P. Huang, J. Zhou, and F. Fang, Landau-Zener -Stückelberg interferometry of a single electronic spin in a noisy environment, *Phys. Rev. X* **1**, 011003 (2011); J. Zhou, P. Huang, and Q. Zhang, Observation of time-domain Rabi oscillations in the Landau-Zener regime with a single electronic spin, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 010503 (2014).
- [47] C. E. Carroll and F. T. Hioe, Transition probabilities for the three-level Landau-Zener model, *J. Phys. A* . **19**, 2061 (1986).
- [48] B. Wu and Q. Niu, Nonlinear Landau-Zener tunneling, *Phys. Rev. A* **61**, 023402 (2000).
- [49] J. Liu, B. Wu, and Q. Niu, Theory of nonlinear Landau-Zener tunneling, *Phys. Rev. A* **66**, 023404 (2002).
- [50] F. Trimborn, D. Witthaut, and V. Kegel, Nonlinear Landau-Zener tunneling in quantum phase space, *New J. Phys.* **12**, 053010 (2010).
- [51] S. Yi, Y. Huang, Y. Zhang, L. Rong, and X. Wang, Macroscopic quantum coherence in spinor condensates confined in an anisotropic potential, *Phys. Rev. A* **86**, 043625 (2002).
- [52] M. Wubs, K. Saito, and S. Kohler, Gauging a quantum heat bath with dissipative Landau-Zener transitions, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200404 (2002).
- [53] Y. Gefen, E. Ben-Jacob, and A. O. Caldeira, Zener transitions in dissipative driven systems, *Phys. Rev. B* **36**, 2770 (1987).
- [54] P. Ao and J. Rammer, Quantum dynamics of a two-state system in a dissipative environment, *Phys. Rev. B* **43**, 5397 (1991).
- [55] M. Nishino, K. Saito, and S. Miyashita, Noise effect on the nonadiabatic transition and correction to the tunneling energy gap estimated by the Landau-Zener -Stuckelberg formula, *Phys. Rev. B* **65**, 014403 (2001).
- [56] M. S. Stopol, Adiabatic quantum computation in open systems, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 250503 (2005).
- [57] V. L. Pokrovsky and D. Sun, Fast quantum noise in the Landau-Zener transition,

- Phys. Rev. B **76**, 024310 (2007).
- [58] M. H. S. Amin, C. J. S. Truncik, and D. V. Averin, Role of Single Qubit Decoherence Time in Adiabatic Quantum Computation, Phys. Rev. A **80**, 022303 (2009).
- [59] P. Neilinger, S. N. Shevchenko, and J. Bogár, Landau-Zener -Stückelberg-Majorana lasing in circuit QED, Phys. Rev. B **94**, 094519 (2016).
- [60] Y. Wu and X. Yang, Strong-coupling theory of periodically driven two-level systems, Phys. Rev. Lett. **98**, 013601 (2007).
- [61] Q. Xie and W. Hai, Analytical results for a monochromatically driven two-level system, Phys. Rev. A **82**, 10334 (2010).
- [62] W. Hai, K. Hai, and Q. Chen, Erratum: Transparent control of an exactly solvable two-level system via combined modulations, Phys. Rev. A **87**, 023403 (2013).
- [63] N. Moiseyev, Crossing rule for a PT-symmetric two-level time-periodic system, Phys. Rev. A **83**, 911 (2011).
- [64] M. Mark, T. Kraemer, and P. Waldburger, Stückelberg-interferometry with ultra-cold atoms, Phys. Rev. Lett. **99**, 113201 (2007).
- [65] S. Kling, T. Salger, and C. Grossert, Atomic Bloch-Zener oscillations and Stückelberg interferometry in optical lattices, Phys. Rev. Lett. **105**, 215301 (2010).
- [66] J. V. Neumann and E. P. Wigner, Über das verhalten von eigenwerten bei adiabatischen prozessen, J. Chem. Phys. **137**, 294 (1929).
- [67] H. Barkay and N. Moiseyev, Complex density probability in non-Hermitian quantum mechanics: Interpretation and a formula for resonant tunneling probability amplitude, Phys. Rev. A **64**, 044702 (2001).
- [68] A. V. Sokolov, A. A. Andrianov, and F. Cannata, Non-Hermitian quantum mechanics of non-diagonalizable Hamiltonians: puzzles with self-orthogonal states, J. Phys. A. **39**, 10207 (2006).
- [69] P. Dorey, C. Dunning and R. Tateo, Topical Review: The ODE/IM correspondence, J. Phys. A. **40**, 205 (2007).
- [70] D. Neshev, A. Nepomnyashchy, and Y. S. Kivshar, Nonlinear Aharonov-Bohm scattering by optical vortices, Phys. Rev. Lett. **87**, 043901 (2001).
- [71] R. Y. Chiao and Y. S. Wu, Manifestations of Berry's topological phase for the photon, Phys. Rev. Lett. **57**, 933 (1986).

- [72] S. Longhi, Control of photon tunneling in optical waveguides, *Opt. Lett.* **32**, 557 (2007).
- [73] M. Berry, I. Marzoli, and W. Schleich, Quantum carpets, carpets of light, *Phys. World* **14**, 39 (2001).
- [74] S. Longhi, Quantum bouncing ball on a lattice: An optical realization, *Phys. Rev. A* **77**, 1012 (2008).
- [75] M. Onoda, S. Murakami, and N. Nagaosa, Hall effect of light, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 083901 (2004).
- [76] N. Bhattacharya and R. J. Spreeuw, Implementation of quantum search algorithm using classical Fourier optics, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 137901 (2002).
- [77] G. Tayebirad, A. Zenesini, and D. Ciampini, Time-resolved measurement of Landau-Zener tunneling in different bases, *Phys. Rev. A* **82**, 94 (2010).
- [78] A. M. Kenis, I. Vorobeichik, and M. Orenstein, Non-evanescent adiabatic directional coupler, *IEEE J. Quantum Electron.* **37**, 1321 (2001).
- [79] S. Longhi, M. Marangoni, and D. Janner, Observation of wave packet dichotomy and adiabatic stabilization in an optical waveguide, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 073002 (2005).
- [80] S. G. Krivoslykov and I. N. Sissakian, Mode coupling between two connected multimode parabolic-index optical waveguides, *Opt. Quantum Electron.* **11**, 393 (1979).
- [81] A. Naweed, G. Farca, and S. I. Shopova, Induced transparency and absorption in coupled whispering-gallery microresonators, *Phys. Rev. A* **71**, 043804 (2005).
- [82] Y. Lahini, A. Avidan, and F. Pozzi, Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013906 (2008).
- [83] J. Wan, M. Laforest, and C. M. D. Sterke, Optical filters based on dynamic localization in curved coupled optical waveguides, *Opt. Commun.* **247**, 353 (2005).
- [84] A. Szameit, F. Dreisow, and H. Hartung, Quasi-incoherent propagation in waveguide arrays, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 241113 (2007).
- [85] P. Leboeuf, and S. Moulieras, Superfluid Motion of Light, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 163904 (2010).
- [86] R. Iwanow, D. A. Mayarrioja, and D. N. Christodoulides, Discrete Talbot effect in waveguide arrays, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 053902 (2005).

- [87] L. Li, Exponentially convergent and numerically efficient solution of Maxwell's equations for lamellar gratings: comment, *J. Opt. Soc. Am.* **13**, 541 (1996).
- [88] 朱博, 周期调制 PT 对称光学波导体系的动力学及其调控, 吉首大学 (2016).
- [89] X. Xu, L. Shi, and L. Ren, Optical gradient forces in PT-symmetric coupled-waveguide structures, *Opt. Express.* **8**, 10220 (2018).

攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目

胡蕊, 郭利平, PT对称波导中周期势的调制对相变的影响, 山西大学学报(自然科学版)

致 谢

时光匆匆，不知不觉间已经在山西大学理论物理研究所度过了三年。回首在理论物理研究所的日子，心中倍感充实，在这几年的学习生活中有很多快乐，很多感动，也有曾遇到过无数的困难。衷心感谢我的导师郭利平老师，一直以来在学术上给我指导，在科研上给我鼓励，手把手地教授知识和方法。感谢郭老师在我失落、无助的时候给予我的帮助以及鞭策，我的论文从选题到开题报告以及论文提纲以及论文的不足之处郭老师都提出了宝贵性的建议。在这个过程中郭利平老师付出了大量的时间和心血，她虽然工作很繁忙，但是郭利平老师不仅在论文设计上帮助我，并且在生活上也对我同样的关心和照顾。在此谨向我的导师郭利平老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

同时，作为冷原子小组中的一员，每周一次的组会让我们受益匪浅，不仅学到了很多方法和知识，而且通过作报告改变了很多不好的习惯。张云波老师严谨的科研态度，以及兢兢业业的工作精神值得我们所有人去学习，在此衷心的感谢张老师，在小组所学习到的一切是我一生宝贵的财富。

在山西大学理论所学习的三年，感谢王利老师、徐志浩老师、尹相国老师对科研指导的帮助。感谢师兄师姐以及师弟师妹：陈立，刘敬鹤，陆展鹏，高春平，杨利民，张瑞江，田康康，王凤梅，薛娅婷，张奋华，皇甫宏丽，武璟楠，渠天涛，郭敏，游惠敏，昌茂林。感谢办公室的所有同学给予我科研和生活上的帮助，并带给我无数的欢乐。在此感谢所有关心、支持、帮助过我的同学，和曾经在各个方面给予过我帮助的理论所的老师，我再一次真诚地向他们表示衷心地感谢！感谢我的父母，在我无助失落的时候，给予我无条件的支持，让我无忧无虑的度过我的硕士生涯。

最后，向在百忙中抽出时间对本文进行评审并提出宝贵意见的各位老师表示衷心地感谢！

胡 蕊

2018年3月于山西大学理论物理研究所

个人简况及联系方式

姓名：胡蕊

性别：女

籍贯：山西省五台县

学习经历：2015年9月至2018年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

联系方式：15735176481

电子邮箱：1640014498@qq.com

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日

