



2016 届硕士学位论文

# 莫特绝缘态中玻色子的淬火动力学

作者姓名	王 乐
指导教师	郭利平 副教授 张云波 教 授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2013 年 9 月至 2016 年 6 月

二〇一六年六月



山西大学

2016 届硕士学位论文

# 莫特绝缘态中玻色子的淬火动力学

作者姓名	王 乐
指导教师	郭利平 副教授 张云波 教 授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2013 年 9 月至 2016 年 6 月

二〇一六年六月

**Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2016**

## Quench Dynamics of Bosons in Mott Insulator States

Student Name	Le Wang
Supervisor	Associate Prof. Li-ping Guo Prof. Yun-bo Zhang
Major	Condensed Matter Physics
Field of Research	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2013.09-2016.06

June, 2016

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 玻色-哈伯德模型.....	1
1.2 莫特绝缘-超流相变.....	2
1.3 莫特绝缘态中粒子空穴对研究.....	4
1.4 偶极相互作用简介.....	5
第二章 短程强相互作用体系的淬火动力学.....	9
2.1 淬火调节跃迁矩阵元至很小时系统密度关联的动力学演化.....	9
2.1.1 Bogoliubov 变换.....	10
2.1.2 密度关联的动力学演化.....	13
2.2 淬火调节跃迁矩阵元为零时系统的崩塌-复原振荡.....	16
2.2.1 动量分布的解析计算.....	17
2.2.2 可见度的时间演化.....	20
2.3 小结.....	22
第三章 莫特绝缘态中偶极玻色子的淬火动力学.....	23
3.1 莫特绝缘态中偶极玻色子的能谱.....	23
3.2 偶极相互作用对崩塌-复原振荡的影响及可见度的演化.....	24
3.3 偶极相互作用对宇称关联函数的影响.....	28
3.4 小结.....	30
第四章 总结与展望.....	33
附录 A 偶极相互作用的相关计算.....	35
参考文献.....	37
攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目.....	43
致 谢.....	45
个人简况及联系方式.....	47
承 诺 书.....	49
学位论文使用授权声明.....	51



## Contents

<b>Chinese Abstract</b> .....	I
<b>ABSTRACT</b> .....	III
<b>Chaprer 1 Introduction</b> .....	1
1.1 Bose-Hubbard model.....	1
1.2 Mott-Superfluid phase transition.....	2
1.3 Particle-hole pairs in Mott states.....	4
1.4 Introduction to dipole-dipole interaction.....	5
<b>Chapter 2 Quench dynamics of short range strong interaction system</b> .....	9
2.1 Dynamics of density correlation when quenching to small hopping matrix element.....	9
2.1.1 Hamiltonian diagonalization by Bogoliubov transformation.....	10
2.1.2 Dynamics of density correlation.....	13
2.2 Collapse and revival oscillations when quenching to zero hopping matrix element.....	16
2.2.1 Analytic solutions of the momentum distribution.....	17
2.2.2 Dynamics of the visibility.....	21
2.3 Conclusion.....	22
<b>Chapter 3 Quench dynamics of dipolar bosons in Mott insulator states</b> .....	23
3.1 The energy spectrum of dipolar bosons in Mott insulator states.....	23
3.2 The influence of the dipole-dipole interaction to the collapse and revival oscillations and the visibility.....	24
3.3 The influence of the dipole-dipole interaction to parity correlation functions.....	28
3.4 Conclusion.....	30
<b>Chapter 4 Summary and Outlook</b> .....	33
<b>Appendix A</b> .....	35
<b>Refernces</b> .....	37
<b>Research Achievements</b> .....	43
<b>Acknowledgment</b> .....	45
<b>Personal Profiles</b> .....	47

<b>Letter of Commitment</b> .....	49
<b>Authorization Statement</b> .....	51

## 中文摘要

光晶格可以形象地模拟固体晶格的环境，将原子囚禁在光晶格中来研究其量子物理特性是研究超冷原子最为常见的方法之一，其物理行为可以通过标准的哈伯德模型来描述。随着实验和理论不断发展，许多拓展哈伯德模型相应出现。实验上已经实现了具有强偶极矩的原子和异核分子的囚禁和观测，这为研究具有偶极相互作用的多体系统提供了一个很好的平台。本文研究了具有偶极相互作用的玻色哈伯德模型莫特绝缘态的动力学演化。

首先介绍了玻色-哈伯德模型，并分析了莫特绝缘态和超流态及其相变的特点。在莫特绝缘态中，粒子空穴对的存在对量子关联的动力学起着非常重要的作用，针对两种不同的淬火参数分别介绍采用不同的解析方法计算出现粒子空穴对系统的动力学问题。一方面是 Barmettler 等人利用 Jordan-Wigner 变换和 Bogoliubov 变换的方法分析的系统密度关联传播；另一方面是 Mahmud 等人利用强耦合展开及微扰理论的方法分析的莫特绝缘态中奇特的崩塌-复原振荡及可见度的变化。在此基础上，我们在具有偶极相互作用的玻色-哈伯德模型中，通过强耦合展开及微扰理论的方法研究了淬火后莫特绝缘态的动力学演化，与标准的玻色哈伯德模型相比，偶极相互作用使得动量分布在演化过程中的振幅和周期增大，且振幅出现衰减与恢复的特性。可见度随时间周期振荡，而相互作用较弱时，振荡的周期随偶极相互作用线性增加。另外我们还通过宇称关联函数来研究了偶极相互作用对莫特超流相变的影响。

**关键词：** 粒子空穴对；偶极相互作用；崩塌-复原振荡；动量分布；可见度



**ABSTRACT**

The optical lattice generates a vivid simulation of the solid lattice environment. Cold atoms trapped in optical lattices can be described by the standard Hubbard model. Various kinds of extended Hubbard model are proposed with the successive development of theory and experiment. Especially the trapping and cooling of chromium atoms and hetero-nuclear molecules with large dipole moment have been realized in experiments. It provides an ideal platform for the study of many body systems with dipolar interaction. In this thesis we mainly study the quench dynamical evolution in Mott Insulator of the Boson-Hubbard model with dipole-dipole interaction.

We first introduce the development of optical lattice and some related experiments of cold atoms as well as the Boson-Hubbard model. On this basis we analyze the characteristics of the Superfluid state, Mott-Insulator state and phases transition between them. In the Mott Insulator state, the particle-hole pairs are of great importance in the dynamics of quantum correlation. Dynamics problems of two kinds of parameters of the quench in the system of optical lattice are presented through two different analytical methods when the particle-hole pairs appear, i.e. the propagation of density correlations using Jordan-Wigner transformation and Bogoliubov transformation, and a novel collapse and revival (CR) oscillation and change of visibility for quenched Mott states by means of the strong-coupling expansion and perturbation theory. On this basis, we calculate the dynamical evolution of the quenched Mott-insulator states in one-dimensional Bose Hubbard system with dipolar interaction. Compared with the standard Bose-Hubbard model, the amplitude and period of the evolution of the momentum distribution increase with the dipolar interaction and the phenomenon of collapse and revival appears. The time-dependent visibility exhibits periodic oscillation, the period of which increases linearly with the increase of the dipole interaction. In addition, we also study the influence of

the dipole interaction on the Mott-Superfluid phase transition by the parity correlation functions.

**Key words:** Particle-hole pairs; The dipole-dipole interaction; Collapse and revival oscillation; The momentum distribution; Visibility

# 第一章 绪论

## 1.1 玻色-哈伯德模型

建立在紧束缚近似基础上的哈伯德模型是固体物理中最经典的模型之一，用来研究固体晶格中电子的运动、磁特性及导体绝缘体相变等<sup>[1]</sup>。从概念上来说哈伯德模型非常简单，它具有两个量子相：莫特绝缘相（MI）和超流相（SF）。莫特绝缘相首先是由 Mott 引入来解释新型绝缘相的<sup>[4]</sup>，与传统的能带理论不同的是这种绝缘相是由电子之间的强相互作用引起的。在 Mott 的理论中，强相互作用将最初的能带分裂成两条，这两条能带之间有一个能隙，并且最低的能带被粒子填满，因此系统处于绝缘相。超流相是一个宏观量子相，其行为像是一个没有粘度的液体。这两个相在多体物理的研究中起着非常重要的作用。玻色哈伯德模型 (Bose-Hubbard) 是强关联多体模型的玻色版本，最早用来研究纳米管中惰性气体的吸收或者具有强电荷效应的超导薄膜中的库伯(Copper)对<sup>[2,3]</sup>等现象。2002 年，格雷尼尔 (Greiner) 等人通过控制光晶格势阱深度，首次在实验上观察到了三维光晶格中排斥相互作用<sup>87</sup>Rb 原子的玻色-爱因斯坦凝聚体从超流相 (Superfluid) 到莫特绝缘相 (Mott-Insulator) 的量子相变<sup>[5]</sup>，并对其相关性质进行了研究。人们在标准的玻色哈伯德模型上取得了一定的进展后，各种拓展的玻色-哈伯德模型相继产生<sup>[6-12]</sup>，许多理论工作者通过各种近似的方法研究了哈伯德模型及其拓展模型中的量子相变以及相关的物理性质。

在紧束缚近似下，利用瓦尼尔函数  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$  将场算符

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_j b_j w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (1.1)$$

展开，可将光晶格束缚势中，超冷玻色子的哈密顿量<sup>[13]</sup>约化为玻色哈伯德模型

$$H(J, U) = \sum_j -J (b_j^\dagger b_{j+1} + b_{j+1}^\dagger b_j) + \frac{1}{2} U \sum_j n_j (n_j - 1) \quad (1.2)$$

这里， $b_j^\dagger$  ( $b_j$ ) 表示在第  $j$  个格点上的产生 (湮灭) 算符，其满足玻色对易关系

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = [b_i, b_j] = 0, \quad n_j = b_j^\dagger b_j \text{ 为 } j \text{ 格点的粒子数算符。}$$

哈伯德模型的第一项是动能项， $J$  为最紧邻格点间的跃迁 (hopping) 矩阵元；第二项表示同一格点内原子之间的相互作用，系数  $U$  为在位 (on-site) 相互作用强度。玻色哈伯德模型描述了玻色子的跃迁矩阵元  $J$  和引起玻色子局域化的在位排斥相互作用能  $U$  之间的

竞争。在装载有超冷原子的光晶格中这两个能量的比值  $J/U$  可以通过改变无量纲化的光晶格深度  $V_0/E_r$  来进行调节，这里反冲能量  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$ 。当动能项占主导地位时，系统处于具有长程序的超流相，当相互作用占主导地位时，系统将处于莫特绝缘相，两者竞争是产生相变的原因。

## 1.2 莫特绝缘-超流相变

二十世纪末，Jaksch等人预测了在玻色哈伯德模型中通过调节在位相互作用强度  $U$  与隧穿矩阵元  $J$  的比值，可以实现低温条件下的莫特绝缘态与超流态的相变，这个现象已经在Greiner等人的实验中得以验证，而比值的变化是通过改变激光强度来实现的。

首先，在玻色哈伯德模型中，莫特绝缘相出现在  $U \gg J$  的极限情况下，玻色子局域在每个格点被整数个原子占据的态上。考虑单填充的情况，即粒子数  $N$  等于格点数  $N_L$ ，忽略原子隧穿，则相应的基态可以表示为

$$|\psi_{MT}\rangle_{J=0} \propto \left( \prod_{j=1}^{N_L} b_j^\dagger \right) |0\rangle \quad (1.3)$$

上式是一个每个格点有一个原子的局域Fock态的直积态。莫特绝缘相是不可压缩的，即  $\partial \bar{n} / \partial \mu = 0$ （ $\bar{n}$  为莫特绝缘态中的平均占据数），这表明随着化学势的增加在位密度（on-site density）是不变的。随着  $J$  的增加原子跃迁会导致双占据的出现，每出现一个双占据系统的能量增加  $U$ ，当由跃迁而增加的动能小于由于双占据引起的在位相互作用  $U$  时，原子仍然是局域的。然而，只要  $J \neq 0$ ，基态就不再是像式 (1.3) 那样简单的直积形式了，一旦增加的动能  $J$  足以克服在位相互作用  $U$ ，那么系统就经莫特超流相进入到超流相。

当  $U \ll J$  时，单粒子的波函数扩展到整个晶格空间，系统处于超流态，对于各向同性的系统，多体系统的基态波函数可以写为

$$|\psi_{SF}\rangle_{U=0} \propto \frac{1}{\sqrt{N!}} \left( \sum_{j=1}^{N_L} b_j^\dagger \right)^N |0\rangle \quad (1.4)$$

超流态是可压缩的态，在超流态中，每个格点的粒子数是不确定的，此时在哈密顿量中起主导作用的是跃迁项  $J$ 。

在周期势中，莫特绝缘态与超流态是通过调节激光的强度改变参数  $J/U$  的值来实现相变的，对于玻色哈伯德模型来说，利用解析的方法进行解析求解得到相边界是非常困难的。平均场近似的方法是求解相边界的一个比较有效的方法，其缺点是结果

并不非常精确。利用平均场近似的方法得到的相图<sup>[14]</sup>，如图1.1所示，图中的花瓣形区域为莫特绝缘相，阴影区域以外的区域为超流相，从下到上的三个花瓣区域分别表示填充因子为1，2，和3三种情况下的莫特绝缘相，花瓣的边缘为莫特超流的相边界。

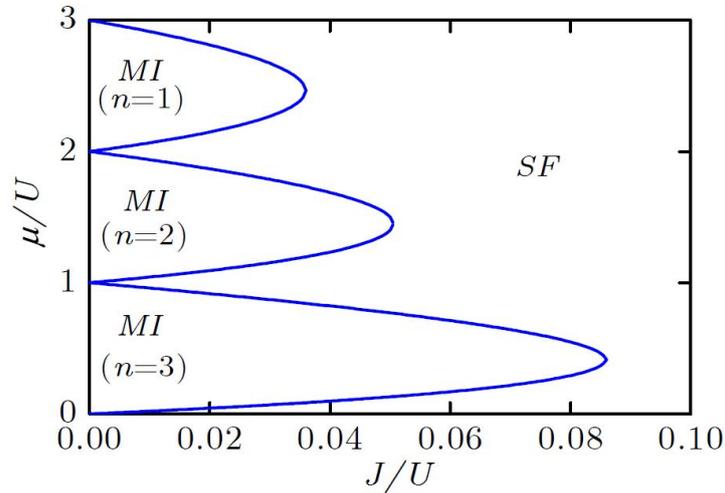


图 1.1 平均场近似得到的一维玻色哈伯德模型的相图

若要得到更为精确的相边界只能通过数值的方法，而通过不同的数值方法给出的相图边界略有差别<sup>[15-21]</sup>，图1.2给出了一维光晶格在平均粒子数为1的情况下相变边界的几种数值结果，其中“+”和“×”表示量子蒙特卡罗（Quantum Monte Carlo 简称为QMC）方法得到的结果，正方形是密度矩阵重整化群方法（Density Matrix Renormalization Group 简称为DMRG）得到的结果，实线是强耦合展开的方法得到

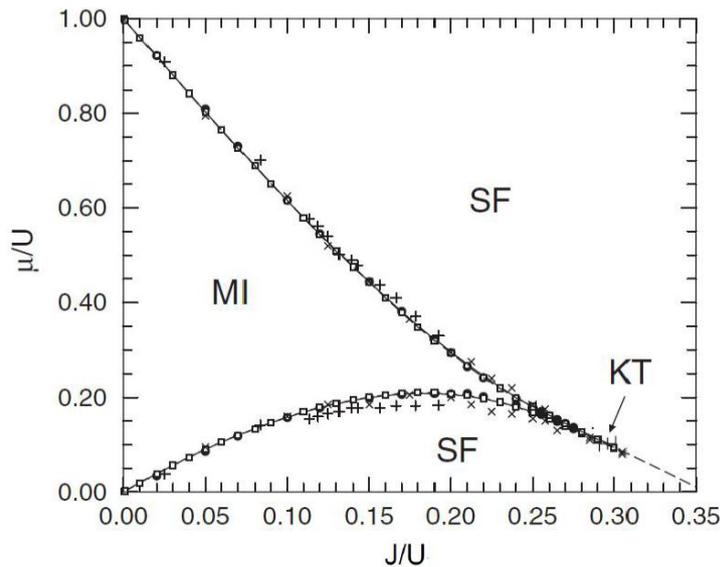


图 1.2 利用不同的方法获得的一维玻色哈伯德模型的相图<sup>[21]</sup>，填充因子为1

的相边界。利用QMC和DMRG两种数值方法得到的相图与平均场近似方法得到的结果有一定差别，数值结果上不仅没有一个凸圆的结构，并且存在一个KT（Kosterlitz-Thouless）相变。

### 1.3 莫特绝缘态中粒子空穴对研究

自然界中，大部分真实系统都是强相互作用系统，欲求解这类系统的动力学演化问题是非常困难的，有一些复杂系统即便是数值方法也是很难求解的，这就突显出了量子模拟的重要性，即利用人工的方法制造一个实验平台，通过对相关参量的调节，来模拟真实系统。光晶格和超冷原子是研究强相互作用量子多体系统的重要工具，在光晶格中较为典型的强相互作用系统是莫特绝缘态。

在莫特绝缘态的研究中，粒子空穴对<sup>[21-25]</sup>的存在对系统物理性质有很大的影响，例如，描述原子行为的波函数的干涉图像，对于完美的莫特绝缘态（ $J=0$ ），波函数是不相干的，因此，实验上观察不到干涉现象，而对于含有粒子空穴对的莫特绝缘态却存在微弱的干涉现象<sup>[24]</sup>。超冷原子气体为探究量子动力学提供了一个很好的研究平台，2011年，M. Endres等人利用高分辨荧光成像技术在低维量子气体的莫特绝缘相中观测到彼此关联的粒子空穴对的存在<sup>[26]</sup>，这为理论研究提供了强有力的实验基础。接下来我们介绍一下粒子空穴对的产生。在隧穿系数等于零的极限下，粒子的涨落完全被抑制，每个格点的粒子占据数相等。当存在一个有限的跃迁矩阵元且系统仍然处于莫特绝缘态，量子涨落使系统中产生了彼此关联的粒子空穴对，这可以理解为虚激发，这些粒子空穴对从本质上决定了莫特绝缘态的性质。图1.3表示在二维系统中，通过抑制 $y$ 轴方向的隧穿，退化到一维体系，从而只在 $x$ 轴方向产

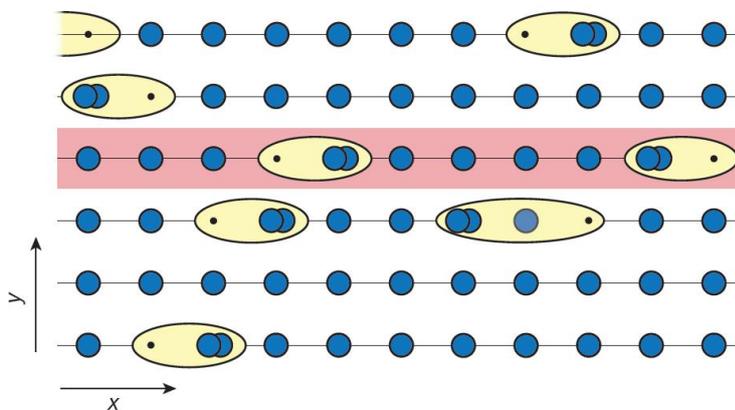


图 1.3 一维光晶格中相互关联的粒子空穴对的示意图<sup>[26]</sup>

生粒子空穴对的示意图，图中的蓝色小球表示粒子。调节晶格深度，当 $x$ 轴方向的一

维莫特绝缘态的隧穿不为零且很小时，粒子可沿  $x$  轴隧穿到其它的格点上，图中的黄色椭圆区域代表粒子空穴对的位置。研究工作者对于这种含有粒子空穴对的系统进行了诸多研究，2012年Cheneau等人在理论和实验上利用淬火技术调节晶格的深度来控制粒子空穴对的产生并制备相应的初态来研究关联的光锥传播<sup>[27]</sup>，同一年Barnettler等人用一个由玻色哈伯德模型衍生的精确可解的模型研究了密度关联的传播<sup>[28]</sup>，2014年，Mahmud等人研究了粒子空穴对系统的崩塌-复原振荡<sup>[21]</sup>。

#### 1.4 偶极相互作用简介

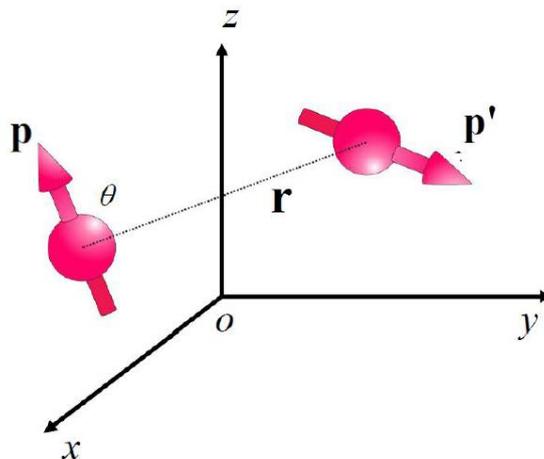
偶极相互作用一般是由于原子或分子间的固有偶极矩(电偶极矩或磁偶极矩)产生的，在具有较大偶极矩的系统中，偶极相互作用对物理性质的影响是不可忽略的。图 1.4 为产生偶极相互作用各物理量的示意图，图中的红色小球是偶极子，箭头是偶极矩 ( $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{p}'$ ) 的方向，两个偶极子之间的位移矢量为  $\mathbf{r}$ ，因此偶极相互作用能的表达式可以写为<sup>[29]</sup>

$$V(\mathbf{r}) = \frac{C}{4\pi r^3} \left[ \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' - 3 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right] \quad (1.5)$$

对磁偶极相互作用这里  $C$  代表真空中的磁导率  $\mu_0$ ，对电偶极矩相互作用  $C$  代表真空中的介电常数的倒数  $1/\epsilon_0$ 。极化后的偶极子的偶极相互作用能可化简为

$$V(\mathbf{r}) = \frac{p^2 C}{4\pi r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \quad (1.6)$$

$\theta$  表示极化方向与两个偶极子之间的位移矢量为  $\mathbf{r}$  的夹角。偶极矩的排列方式不同将会产生不同类型的偶极相互作用。下面我们举例说明不同排列方式所引起的排斥和吸引的偶极相互作用：若两偶极子肩并肩排列，即两个偶极子的极化方向均指向  $z$  轴



1.4 偶极相互作用的示意图

的正方向或负方向，即式 (1.6) 中的  $\theta$  角等于  $\pi/2$ ，则偶极相互作用能为

$$V(\mathbf{r}) = \frac{p^2 C}{4\pi r^3} \quad (1.7)$$

这种情况下的偶极相互作用为排斥相互作用。若两个偶极子的极化方向均指向位移矢量的方向或反方向， $\theta$  角等于零或  $\pi$ ，这种情况下偶极相互作用能 (1.6) 可以化简为

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{p^2 C}{2\pi r^3} \quad (1.8)$$

这里的负号说明此时偶极相互作用为吸引相互作用。所以，偶极相互作用的大小与两偶极子之间距离的 3 次方的形式衰减。早在 2001 年，德国的 Pfau 小组就已经提出了一套可行的方案<sup>[30]</sup>，通过调节偶极矩的旋转方向来控制偶极相互作用的类型和大小。

BEC 成功实现后，关于偶极相互作用的研究得到了很多研究工作者的关注，但是，由于成功凝聚的 Na, Rb, Li 等原子<sup>[31-34]</sup>的偶极相互作用很小甚至可以忽略，不能充分体现出偶极相互作用的地位。直至 2005 年，Griesmaier 等人在实验上实现了  $^{52}\text{Cr}$  原子的 BEC<sup>[35]</sup>后，为偶极相互作用的研究打开了一个广阔的研究前景。由于  $^{52}\text{Cr}$  原子的电偶极矩是  $6\mu_B$ ，所以电偶极相互作用是一般碱性原子的 36 倍，同时通过 Feshbach 共振技术可以将  $^{52}\text{Cr}$  原子间的短程相互作用调节到零附近，这样可以很好地突显出长程相互作用对系统物理性质的影响。之后，关于偶极相互作用对 BEC 影响的研究蓬勃开展起来，对偶极 BEC 稳定性的研究<sup>[36-38]</sup>，以及偶极相互作用的存在会使系统中出现很多奇特的量子相<sup>[39-41]</sup>等。逐渐的人们开始对具有更大偶极相互作用的粒子<sup>[42-44]</sup>展开研究，最近几年关于异核分子 (hetero-nuclear molecules) 的产生为偶极相互作用的研究提供了一个更广阔的研究空间，例如， $^6\text{Li}-^{133}\text{Cs}$ <sup>[45,46]</sup>的磁偶极矩达到 5.5D。而实验上关于碱土金属和稀土金属<sup>[47]</sup>的研究也是十分炙热的，偶极相互作用的研究将仍然会是冷原子物理研究的重要领域之一。

基于以上的知识背景，本文主要做了以下的工作：第二章中首先考虑了标准的玻色哈伯德模型，介绍了利用 Jordan-Wigner 变换和 Bogoliubov 变换的方法分析初始状态为跃迁矩阵元为零的莫特绝缘态，通过淬火调节跃迁矩阵元至很小值时系统密度关联的传播情况。其次介绍了跃迁矩阵元很小的粒子空穴对系统，通过淬火调节跃迁矩阵元为零时利用强耦合展开及微扰理论的方法分析强相互作用的玻色系统的动力学演化<sup>[48-52]</sup>，包括了崩塌-复原振荡现象，以及可见度的变化。在第三章中我们在第二章的基础上研究了偶极玻色子系统的动力学演化，讨论了偶极相互作用对崩

塌-复原振荡及可见度的影响，也研究了偶极相互作用对宇称关联的影响。在第四章中对本文的内容进行了总结和展望。



## 第二章 短程强相互作用体系的淬火动力学

淬火是通过突然改变系统的参量来获得人们所需要的物理状态的过程。光晶格中的超冷原子是研究多体量子动力学的重要工具，其易操控性引起了人们的极大关注。通过调节光晶格阱深很容易实现淬火。本章着重介绍莫特绝缘态中冷原子淬火动力学的基本理论和实验。一方面初始状态为跃迁矩阵元为零的莫特绝缘态，淬火调节跃迁矩阵元至很小的值，Barnettler等人研究了系统密度关联的演化<sup>[28]</sup>。另一方面初态是跃迁矩阵元很小且含有粒子空穴对的态，淬火调节至其为零，Mahmud等人研究了系统的动量分布及可见度随时间的演化<sup>[21]</sup>。粒子空穴对的存在对强关联系统起着非常重要的作用，本章我们主要介绍这两个方面的短程强相互作用系统的动力学问题。

### 2.1 淬火调节跃迁矩阵元至很小时系统密度关联的动力学演化

对于初态为跃迁矩阵元为零的莫特绝缘态（图2.1(a)），突然降低晶格的深度使得跃迁矩阵元不为零但很小时，如图2.1(b)和(c)系统中会产生彼此关联的粒子空穴对，研究这种情况下系统密度关联的动力学演化被大家所关注。

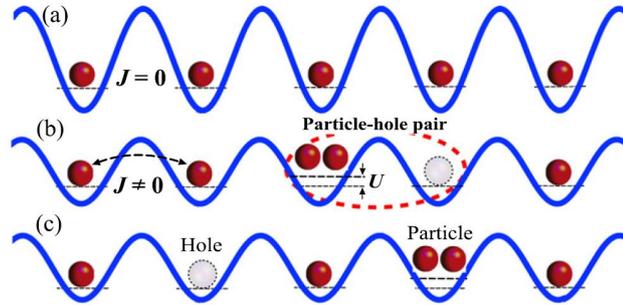


图 2.1 淬火和莫特绝缘态的示意图<sup>[21]</sup>

一维光晶格中玻色子的行为可用玻色哈伯德模型(1.2)来描述。在填充因子为 $\bar{n}$ 的莫特绝缘态，系统含有粒子空穴对时粒子数的占据情况分为 $\bar{n}$ 、 $\bar{n}+1$ 和 $\bar{n}-1$ 三种情况，为了更直观地描述空穴 $\bar{n}-1$ 和双占据 $\bar{n}+1$ 两种情况，引入辅助玻色子算符 $a_{j,\sigma}^\dagger$ ，其中 $\sigma=\pm$ ，“+”代表双占据，“-”代表空穴。 $a_{j,+}^\dagger$ 表示在 $j$ 格点上产生一个双占据， $a_{j,-}$ 表示在 $j$ 格点上湮灭一个空穴。 $|\bar{n}\rangle$ 是辅助玻色子算符的“真空态”，满足关系式

$$a_{j,+}^\dagger |\bar{n}\rangle_j = |\bar{n}+1\rangle_j, a_{j,-}^\dagger |\bar{n}\rangle_j = |\bar{n}-1\rangle_j, a_{j,\sigma} |\bar{n}\rangle_j = 0 \quad (2.1)$$

且辅助玻色子算符与原算符的关系是

$$b_j^\dagger = \sqrt{\bar{n}+1}a_{j,+}^\dagger + \sqrt{\bar{n}}a_{j,-} \quad (2.2)$$

$$b_j = \sqrt{\bar{n}}a_{j,-}^\dagger + \sqrt{\bar{n}+1}a_{j,+}$$

则辅助算符满足对易关系

$$[a_{j,\sigma}, a_{j',\sigma'}^\dagger] = \delta_{j,j'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (2.3)$$

$$[a_{j,\sigma}^\dagger, a_{j',\sigma'}^\dagger] = [a_{j,\sigma}, a_{j',\sigma'}] = 0$$

在一个格点上不会出现两个双占据或两个空穴的情况，因此辅助玻色子算符满足硬核玻色关系

$$(a_{j,\sigma}^\dagger)^2 = (a_{j,\sigma})^2 = 0 \quad (2.4)$$

另外双占据和空穴不应该同时存在于同一个格点上，所以满足

$$a_{j,+}^\dagger a_{j,+} a_{j,-}^\dagger a_{j,-} = 0 \quad (2.5)$$

这些是描述粒子空穴对系统的辅助玻色算符所要满足的关系式。将 (2.2)，(2.3)，(2.4) 和 (2.5) 式带入 (1.2) 式并将能量平移  $U(2\bar{n}+1)N/2 + \bar{n}$ ， $N$  为总粒子数，可得哈密顿量

$$\begin{aligned} H(J,U) = \sum_j \left\{ -J \left[ (\bar{n}+1) a_{j,+}^\dagger a_{j+1,+} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} a_{j,+}^\dagger a_{j+1,-}^\dagger + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} a_{j,-} a_{j+1,+} \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{n} a_{j,-} a_{j+1,-}^\dagger + (\bar{n}+1) a_{j+1,+}^\dagger a_{j,+} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} a_{j+1,+}^\dagger a_{j,-}^\dagger \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} a_{j+1,-} a_{j,+}^\dagger + \bar{n} a_{j+1,-}^\dagger a_{j,-}^\dagger \right] + \frac{U}{2} (n_j - \bar{n})^2 \right\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

具有非对角项。为了研究系统的动力学问题，需要计算本征能量和本征态，进而求得描述系统动力学的波函数。

### 2.1.1 Bogoliubov 变换

辅助算符满足硬核条件 (2.5)，由于费米子算符满足同样的对易关系，所以利用 Jordan-Wigner 变换，将玻色子算符  $a_{j,\sigma}$  变换为费米子算符  $c_{j,\sigma}$  来进行处理

$$a_{j,\sigma} = Z_{j,\sigma} c_{j,\sigma} \quad (2.7)$$

其中,

$$\begin{aligned} Z_{j,+} &= \exp\left(i\pi \sum_{\sigma, j' < j} n_{j',\sigma}\right) = \exp\left(i\pi \sum_{j'}^{j-1} (n_{j',+} + n_{j',-})\right) \\ Z_{j,-} &= Z_{j,+} \exp(i\pi n_{j,+}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

可以证明费米子与玻色子的辅助粒子数算符相等  $n_{j,\sigma} = c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} = a_{j,\sigma}^\dagger a_{j,\sigma}$ , 辅助粒子数算符与标准的粒子数算符满足

$$n_j = n_{j,+} - n_{j,-} + 1 \quad (2.9)$$

这里  $n_{j,+}$ ,  $n_{j,-}$  分别表示双占据和空穴的辅助粒子数算符。限制条件 (2.5) 是排除同一格点被两种不同辅助粒子占据的情况, 可以用非双占据投影算符  $P_j = 1 - n_{j,+} n_{j,-}$ ,

$P = \prod_j P_j$  描述。将 (2.7) 式带入 (2.6) 式, 哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned} H(J,U) &= \sum_j P \left\{ -J \left[ (\bar{n}+1) c_{j,+}^\dagger c_{j+1,+} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} c_{j,+}^\dagger c_{j+1,-} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} c_{j,-} c_{j+1,+} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{n} c_{j+1,-}^\dagger c_{j,-} \right] + \frac{U}{2} (n_{j,+} + n_{j,-}) \right\} P \end{aligned} \quad (2.10)$$

因  $n_{j,+} n_{j,-} = 0$ , 则  $P_j = 1$ ,  $P = 1$ 。格点空间的哈密顿量可以化简为

$$\begin{aligned} H(J,U) &= \sum_j \left\{ -J \left[ (\bar{n}+1) c_{j,+}^\dagger c_{j+1,+} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} c_{j,+}^\dagger c_{j+1,-} + \sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} c_{j,-} c_{j+1,+} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{n} c_{j+1,-}^\dagger c_{j,-} \right] + \frac{U}{2} (n_{j,+} + n_{j,-}) \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

接下来通过傅立叶变换

$$\begin{aligned} c_{j,-}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_{-k,-}^\dagger e^{-ikj} \\ c_{j,+}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_{k,+}^\dagger e^{ikj} \end{aligned} \quad (2.12)$$

将哈密顿量从实空间变换到动量空间, 设晶格常量为 1, 将 (2.12) 式带入 (2.11) 式化简得

$$H(J,U) = \sum_k c_{k,+}^\dagger c_{k,+} \left[ -2J(\bar{n}+1) \cos k + \frac{U}{2} \right] + \sum_k c_{-k,-}^\dagger c_{-k,-} \left[ -2J\bar{n} \cos k + \frac{U}{2} \right]$$

$$+\sum_k c_{k,+}^\dagger c_{-k,-}^\dagger 2iJ\sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)}\sin k - \sum_k c_{-k,-} c_{k,+} 2iJ\sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)}\sin k \quad (2.13)$$

利用 Bogoliubov 变换, 引入准粒子的产生湮灭算符  $\gamma_{k,+}^\dagger$ ,  $\gamma_{-k,-}^\dagger$ ,  $\gamma_{k,+}$ ,  $\gamma_{-k,-}$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{k,+}^\dagger \\ \gamma_{-k,-}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u(k) & v(k) \\ -v^*(k) & u^*(k) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_{k,+}^\dagger \\ c_{-k,-}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

根据其满足的费米对易关系, 可得系数  $u(k)$  和  $v(k)$  的系式

$$|u(k)|^2 + |v(k)|^2 = 1 \quad (2.15)$$

用准粒子算符表示哈密顿量, 并令其非对角元为零, 然后与 (2.15) 联立可得到待定系数在哈密顿量对角化时的表达形式

$$u(k) = 1 + O\left(\frac{J^2}{U^2}\right) \quad (2.16)$$

$$v(k) = i \frac{2J\sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)}}{U} \sin k + O\left(\frac{J^2}{U^2}\right)$$

这里近似到  $J/U$  的一次方项。通过 Bogoliubov 变换对角化后的哈密顿量为

$$H_{dia}(J, U) = \sum_k \left( \varepsilon_+(k) \gamma_{k,+}^\dagger \gamma_{k,+} + \varepsilon_-(k) \gamma_{-k,-}^\dagger \gamma_{-k,-} \right) \quad (2.17)$$

其中

$$\varepsilon_\pm = \mp J \cos k + \frac{1}{2} \sqrt{\left[ 4\sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)}J \sin k \right]^2 + \left[ U - 2(2\bar{n}+1)J \cos k \right]^2} \quad (2.18)$$

为准粒子的色散关系。从 (2.17) 式我们可以发现系统的基态是“真空态”, 即没有准粒子出现的态, 而带有相反动量的准粒子对的能量为

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ + \varepsilon_- &= \sqrt{\left[ 4\sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)}J \sin k \right]^2 + \left[ U - 2(2\bar{n}+1)J \cos k \right]^2} \\ &\approx U - 2(2\bar{n}+1)J \cos k + O\left(\frac{J^2}{U^2}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.1.2 密度关联的动力学演化

为了研究密度关联的动力学演化，需要计算  $t$  时刻系统的波函数。系统的基态波函数为准粒子的真空态

$$|\psi_0(U/J)\rangle \propto \prod_k \gamma_{k,+} \gamma_{-k,-} |\bar{n}\rangle \quad (2.20)$$

其满足关系式  $\gamma_{k,+} |\psi_0(U/J)\rangle = \gamma_{-k,-} |\psi_0(U/J)\rangle = 0$ 。归一化后的基态波函数可以化简为

$$|\psi_0(U/J)\rangle = \prod_k \frac{1}{v(k)} \gamma_{k,+} \gamma_{-k,-} |\bar{n}\rangle = \prod_k [u(k) + v(k) c_{k,+}^\dagger c_{-k,-}^\dagger] |\bar{n}\rangle \quad (2.21)$$

初态选择系统参量为  $J_I$  和  $U_I$  时的基态波函数，相应的 Bogoliubov 变换的待定参数为  $u_0(k)$  和  $v_0(k)$ ，则初态波函数可以写为

$$|\psi'_0\rangle = \prod_k [u_0(k) + v_0(k) c_{k,+}^\dagger c_{-k,-}^\dagger] |\bar{n}\rangle \quad (2.22)$$

经  $t$  时刻后系统的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_{dia}t/\hbar} |\psi'_0\rangle \quad (2.23)$$

其中  $H_{dia}(J_F, U_F)$  是淬火后的对角化哈密顿量（即 (2.17) 式中取  $J = J_F$ ， $U = U_F$ ），用其本征基矢将初态展开，由 (2.21)，(2.22) 和 (2.23) 式计算可得  $t$  时刻系统的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = \prod_k [\bar{u}(k) - \bar{v}(k) e^{-i(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)t/\hbar} \gamma_{k,+}^\dagger \gamma_{-k,-}^\dagger] |\psi_0(U_F/J_F)\rangle \quad (2.24)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{u}(k) &= u(k)u_0(k) - v(k)v_0(k) \\ \bar{v}(k) &= v(k)u_0(k) - u(k)v_0(k) \end{aligned} \quad (2.25)$$

选择填充因子为 1 的绝缘态作为初态，参数  $u_0(k) = 1$ ， $v_0(k) = 0$ 。由 (2.19)，(2.23) 和 (2.24) 得到淬火后  $t$  时刻的多体波函数

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\bar{n}\rangle + i \frac{2\sqrt{2}J_F}{U_F} \sum_k \sin(ka) c_{k,+}^\dagger c_{-k,-}^\dagger |\bar{n}\rangle \\ &\quad - i \frac{2\sqrt{2}J_F}{U_F} \sum_k \sin(ka) e^{-i(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)t/\hbar} c_{k,+}^\dagger c_{-k,-}^\dagger |\bar{n}\rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

这里可以分为两部分来理解，一部分是与时间无关的前两项，由 Fock 态和束缚的最

近邻粒子空穴对的叠加态（简称为束缚对）组成。另一部分与时间有关的项，是传播的粒子空穴对的叠加态（简称为传播对），淬火动力学主要是由传播对引起。这个波函数可以用来很好的理解淬火动力学的密度关联性质。

密度关联函数定义为

$$C_l = \langle n_j n_{j+l} \rangle - \langle n_j \rangle \langle n_{j+l} \rangle \quad (2.27)$$

$l$  是两格点间距，利用 (2.9) 式对上式进行化简，同时引入函数  $G_l^{\sigma, \sigma'}$

$$\begin{aligned} C_l &= \left( \langle n_{j,+} n_{j+l,+} \rangle - \langle n_{j,+} \rangle \langle n_{j+l,+} \rangle \right) - \left( \langle n_{j,+} n_{j+l,-} \rangle - \langle n_{j,+} \rangle \langle n_{j+l,-} \rangle \right) \\ &\quad - \left( \langle n_{j,-} n_{j+l,+} \rangle - \langle n_{j,-} \rangle \langle n_{j+l,+} \rangle \right) + \left( \langle n_{j,-} n_{j+l,-} \rangle - \langle n_{j,-} \rangle \langle n_{j+l,-} \rangle \right) \\ &= G_l^{++} - G_l^{+-} - G_l^{-+} + G_l^{--} \\ &= \sum_{\sigma} (G_l^{\sigma, \sigma} - G_l^{\sigma, \bar{\sigma}}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

其中  $\bar{\sigma} = -\sigma$ 。利用维克定理 (Wick theorem)，将函数  $G_l^{\sigma, \sigma'}$  进行化简

$$\begin{aligned} G_l^{\sigma, \sigma'} &= \langle n_{j+l, \sigma} n_{j, \sigma'} \rangle - \langle n_{j+l, \sigma} \rangle \langle n_{j, \sigma'} \rangle \\ &= \langle c_{j+l, \sigma} c_{j, \sigma'} \rangle^* \langle c_{j+l, \sigma} c_{j, \sigma'} \rangle - \langle c_{j+l, \sigma}^\dagger c_{j, \sigma'} \rangle \langle c_{j+l, \sigma}^\dagger c_{j, \sigma'} \rangle^* \end{aligned} \quad (2.29)$$

非零的单体关联函数为

$$\begin{aligned} g_l^{\sigma \bar{\sigma}} &= \langle c_{j+l, \sigma} c_{j, \bar{\sigma}} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dke^{ikl} \langle c_{k, \sigma} c_{-k, \bar{\sigma}} \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} g_l^{\sigma \sigma} &= \langle c_{j+l, \sigma}^\dagger c_{j, \sigma} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dke^{ikl} \langle c_{k, \sigma}^\dagger c_{-k, \sigma} \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

这里不同类型的单体关联函数满足  $g_l^{++} = g_l^{--}$ ,  $g_l^{+-} = g_l^{-+}$ ，利用 (2.29) 和 (2.30) 可

以将函数  $G_l^{\sigma, \sigma'}$  进行化简，当  $\bar{\sigma} = -\sigma = \sigma'$  时，

$$G_l^{\sigma, \bar{\sigma}} = |g_l^{\sigma \bar{\sigma}}|^2 \quad (2.32)$$

当  $\bar{\sigma} = \sigma$  时，

$$G_l^{\sigma, \sigma} = -|g_l^{\sigma \sigma}|^2 \quad (2.33)$$

因此密度关联函数 (2.28) 式可以化简为

$$\begin{aligned} C_l &= -|g_l^{++}|^2 - |g_l^{+-}|^2 - |g_l^{-+}|^2 - |g_l^{--}|^2 \\ &= -2\left(|g_l^{++}|^2 + |g_l^{+-}|^2\right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

根据式 (2.24), (2.30), (2.31) 和 (2.34) 求得密度关联函数

$$C_{l=1} = -2\left(\frac{J_F\sqrt{2}}{U_F}\right)^2 \left[ \left(\frac{-2}{\tilde{J}t} B_1(\tilde{J}t)\right)^2 + \frac{-4}{\tilde{J}t} B_1(\tilde{J}t) \cos(U_F t / \hbar) + 1 \right] \quad (2.35)$$

$$C_{l>1} = -2\left(\frac{2dJ_F\sqrt{2}}{U_F}\right)^2 \left(\frac{B_l(\tilde{J}t)}{\tilde{J}t}\right)^2 \quad (2.36)$$

这里  $B_l(x)$  是  $l$  阶贝塞尔函数,  $\tilde{J} = 2J_F(2\bar{n}+1)/\hbar$ 。

利用 (2.35) 和 (2.36) 式可以得到密度关联动力学演化图像 2.2, 进而分析不同粒子空穴对间隔的动力学性质。图中展示了  $J_F/U_F = 18$  时系统密度关联函数的动力学演化。为了观察方便将不同  $l$  值的关联图像进行了竖直方向的平移, 平移量为 0.005, 图中的虚线为不同纵坐标值的参考线。从图中可以看出, 格点间隔  $l > 1$  的密度关联图象呈现有规律下沉的负信号, 这个负信号是由于传播的粒子空穴对所引起的。随着间隔  $l$  的增大, 负值出现所需要的时间越长, 负信号下沉的趋势越小, 密度

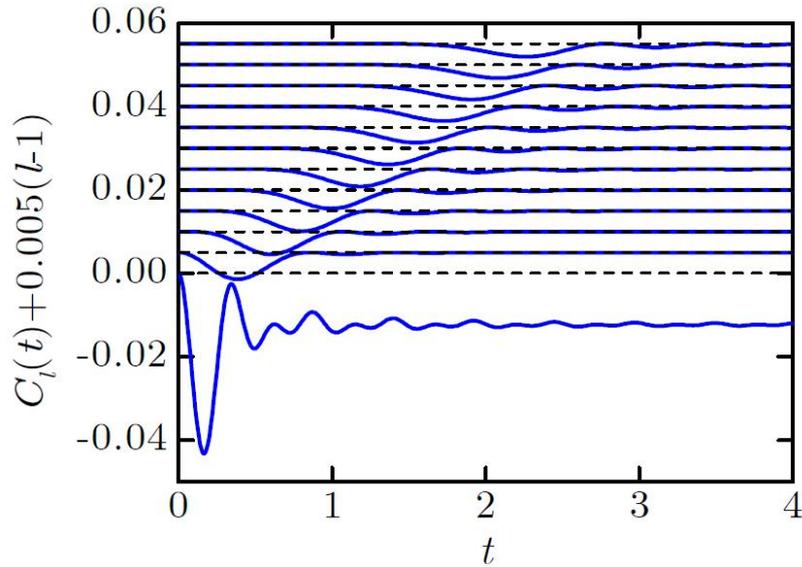


图 2.2 密度关联的动力学演化,  $J_F/U_F = 18$ ,  $J_F = 1$ ,  $\hbar = 1$ ;

实线从下至上依次为  $l = 1, 2, 3, \dots, 12$

关联越弱。而对于  $l=1$  的情况是较为复杂的，在较短的时间内有一个大的振荡，实际是由于式 (2.26) 中的束缚对的空穴（双占据）与传播对的双占据（空穴）之间的相互作用引起的，即为 (2.35) 式中的余弦函数。

## 2.2 淬火调节跃迁矩阵元为零时系统的崩塌-复原振荡

另一方面，在一个含有粒子空穴对的系统中，突然提高晶格的深度至跃迁矩阵元为零，可以研究其动量分布及可见度随时间演化的情况。崩塌-复原振荡一直被认为是淬火长程相关系统的典型行为，2014年Mahmud等人发现淬火后莫特绝缘态同样可以观测到崩塌-复原振荡，且玻色子，费米子以及玻色费米混合物都是成立的。在淬火莫特绝缘态中观测到的崩塌-复原振荡与淬火超流态是有所区别的，这种崩塌-复原振荡主要体现在粒子的动量分布<sup>[21,53,54]</sup>上。

当晶格的深度无限大（即跃迁矩阵元为零）时，呈现出的莫特绝缘态，我们称之为完美的莫特绝缘态。在Fock态空间表征下，填充因子为1的完美莫特绝缘态可以表示为  $|111\dots\rangle$ ，如图2.1 (a) 所示。当跃迁矩阵元为一个很小的有限值且系统仍处于莫特绝缘态时，如图2.1 (b) 和 (c)，这个多体系统波函数包含彼此关联的粒子空穴对，可以表示为  $|1201\dots11\rangle$ ， $|1210\dots11\rangle$ ， $|1012\dots11\rangle$  等。在含有粒子空穴对的莫特绝缘态下，突然提高晶格的深度使跃迁矩阵元为零，所有的粒子冻结在原来的位置上，系统的哈密顿量将引起时间演化相因子的变化。

描述一维玻色系统的哈密顿量见 (1.2) 式，由此淬火前描述系统的哈密顿量表示为  $H(J_t, U_t)$ ，淬火后的哈密顿量表示为  $H(0, U_F)$ ，而淬火后的时间演化是由  $H(0, U_F)$  所决定。这一部分我们主要介绍淬火超流态与淬火莫特绝缘态所得到的崩塌-复原振荡的区别。崩塌-复原振荡是通过动量分布

$$n_k(t) = (1/L) \sum_{j,j'} e^{ik(j-j)} \rho_{jj'}(t) \quad (2.37)$$

来体现的，其中  $\rho_{jj'}(t) = \langle b_j^\dagger b_{j'} \rangle$  为单粒子密度矩阵。

图2.3 (a) 是淬火莫特绝缘态下的动量分布，在初始时刻我们可以看见粒子数主要集中在  $k=0$  处，随着时间的增加， $k=0$  处的粒子数逐渐减少，在半个周期时  $k=\pm\pi$  处的粒子数会多于零动量处的粒子数，粒子数的最大值出现在  $k=\pm\pi$  处。图2.3 (b) 是淬火超流态下的动量分布，我们可以看到初始时刻在  $k=0$  处有尖锐的峰值，与淬火莫特绝缘态相比，此处的粒子数要远多于  $k=\pm\pi$  处的粒子数。随着时间的增加  $k=0$  处的粒子数逐渐减少，其他位置的粒子数有少许的增加，在半个周期时粒子数在第

一布里渊区内均匀分布。也就是说，在时间演化的过程中，粒子数的最大占据始终在零动量处。这种淬火后不同的崩塌-复原振荡可以作为区别超流态与莫特绝缘态的一种方法。

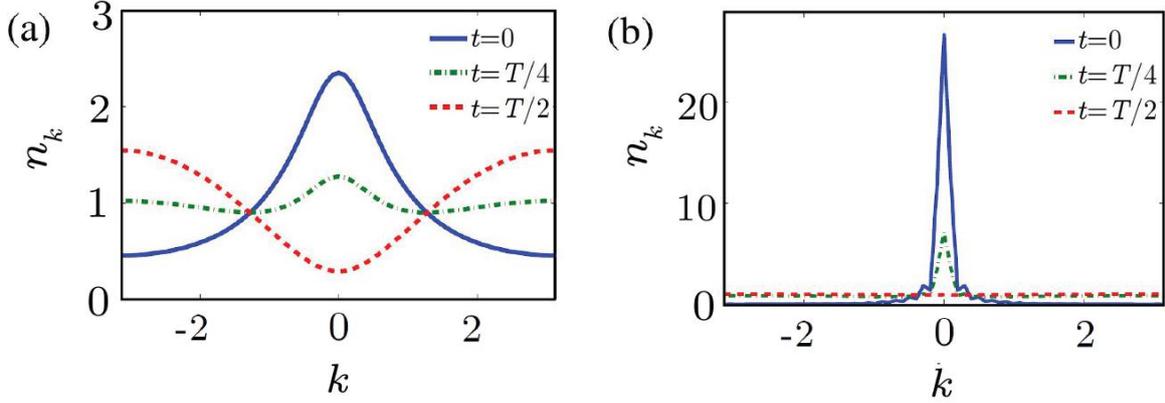


图 2.3 淬火莫特绝缘态与超流态动量分布<sup>[36]</sup>。这里主要通过数值的方法（TEBD）

计算不同时刻的动量分布，选取晶格长度 $L=32$ ，总粒子数为32，

(a)  $J_t/U_t = 10$ ，(b)  $J_t/U_t = 1$ 。

### 2.2.1 动量分布的解析计算

淬火莫特绝缘态的崩塌-复原振荡也可以通过强耦合展开（strong-coupling expansion, 简称为SCE）的方法计算得到。当粒子发生跃迁时，粒子空穴对出现，系统的能量会增加，含有不同数量的粒子空穴对的态之间有一个能隙，当相互作用很强时，能隙会变得很大，因此可以忽略多个粒子空穴对的态（即高能部分）。假设各向同性的光晶格系统中，为了解析计算时方便构造基矢，选择 $L = 2M + 1$ 个格点的晶格，满足周期边界条件且填充因子为 $\bar{n}$ 。根据强耦合展开，当跃迁矩阵元不为零且远小于相互作用时，将跃迁矩阵元看作是微扰项，相互作用项为非微扰项，其未受微扰的基态波函数是完美莫特绝缘态 $|0\rangle = |\bar{n}, \bar{n}, \bar{n}, \dots\rangle$ 。对这个态进行修正的波函数是含有一对粒子空穴对的态，这里将这些态按照双占据（ $\bar{n} + 1$ ）和空穴（ $\bar{n} - 1$ ）所在的位置不同进行分类构造基矢

$$|e_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \left( \dots + \underbrace{|\dots, \bar{n} - 1, \dots, \bar{n} + 1, \dots\rangle}_d + \dots + \underbrace{|\dots, \bar{n} + 1, \dots, \bar{n} - 1, \dots\rangle}_d + \dots \right) \quad (2.38)$$

双占据和空穴的间隔 $d = 1, 2, \dots, M$ ，其中 $M$ 为周期边界条件下的最大间隔数。（2.38）

中的点号代表的是填充数等于平均占据数  $\bar{n}$ 。哈密顿量  $H(J_I, U_I)$  在基矢

$$\{|0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_M\rangle\} \quad (2.39)$$

下可以展开为

$$H(J_I, U_I) = \begin{bmatrix} E_0 & Z^T \\ Z & K \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

其中态  $|0\rangle$  对应的对角矩阵元为  $E_0 = U_I L \bar{n} (\bar{n} - 1) / 2$ ，矩阵  $Z^T = (\sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)} J_I, 0, 0, 0, \dots)$  是  $|e_d\rangle$  态和  $|0\rangle$  态耦合成的一行  $M$  列矩阵， $K$  是  $M$  个  $|e_d\rangle$  态表征下的一个  $M \times M$  的三对角矩阵

$$K = \begin{bmatrix} E_0 + U_I & -(2\bar{n} + 1)J_I & 0 & \dots \\ -(2\bar{n} + 1)J_I & E_0 + U_I & -(2\bar{n} + 1)J_I & \dots \\ 0 & -(2\bar{n} + 1)J_I & E_0 + U_I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

利用微扰理论可得一阶修正的波函数为

$$|\psi_g^{(1)}\rangle = \sum_{n \neq g} \frac{\langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_g^{(0)} \rangle}{E_g^{(0)} - E_n^{(0)}} |\psi_n^{(0)}\rangle = \sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)} \frac{J_I}{U_I} |e_1\rangle \quad (2.42)$$

其中， $H'$  是微扰项， $|\psi_g^{(0)}\rangle$  表示基态  $|0\rangle$ ，对应的能量为  $E_g^{(0)}$ ； $|\psi_n^{(0)}\rangle$  表示所有含粒子空穴对的激发态  $|e_d\rangle$ ，其对应的能量为  $E_n^{(0)}$ ，且  $n$  和  $d$  的取值是同步的，即  $|\psi_1^{(0)}\rangle = |e_1\rangle$ ， $|\psi_2^{(0)}\rangle = |e_2\rangle$ ，依此类推。二阶修正的波函数为

$$|\psi_g^{(2)}\rangle = \sum_{m \neq g} \left\{ \sum_{n \neq g} \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_g^{(0)} \rangle}{(E_g^{(0)} - E_m^{(0)})(E_g^{(0)} - E_n^{(0)})} - \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_g^{(0)} \rangle \langle \psi_g^{(0)} | H' | \psi_m^{(0)} \rangle}{(E_g^{(0)} - E_m^{(0)})^2} \right\} |\psi_m^{(0)}\rangle \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \sum_{m \neq g} \frac{|\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_g^{(0)} \rangle|^2}{(E_g^{(0)} - E_m^{(0)})^2} |\psi_g^{(0)}\rangle \\ & = (2\bar{n} + 1) \sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)} \frac{J_I^2}{U_I^2} |e_2\rangle - L\bar{n}(\bar{n}+1) \frac{J_I^2}{U_I^2} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

因此，由 (2.42) 和 (2.44) 式可得，修正后的基态波函数为

$$\begin{aligned}
|\psi_g\rangle &= |\psi_g^{(0)}\rangle + |\psi_g^{(1)}\rangle + |\psi_g^{(2)}\rangle \\
&= \left(1 - L\bar{n}(\bar{n}+1)\frac{J_I^2}{U_I^2}\right)|0\rangle + \sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)}\frac{J_I}{U_I}|e_1\rangle \\
&\quad + (2\bar{n}+1)\sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)}\frac{J_I^2}{U_I^2}|e_2\rangle + O\left(\frac{J_I^3}{U_I^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

若突然提高晶格的深度使系统跃迁矩阵元为零 ( $J_F = 0$ )，接下来的时间演化由淬灭后的哈密顿量  $H(0, U_F)$  所决定，而此时的哈密顿量  $H(0, U_F)$  在所选的基矢下是对角化的，且态  $|e_d\rangle$  是  $M$  重的简并态。因此对于选择淬灭前的波函数 (2.45) 式作为初态，则  $t$  时刻的波函数可以写为

$$\begin{aligned}
|\psi_g(t)\rangle &= \left(1 - L\bar{n}(\bar{n}+1)\frac{J_I^2}{U_I^2}\right)|0\rangle + \sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)}\frac{J_I}{U_I}|e_1\rangle e^{-iU_F t/\hbar} \\
&\quad + (2\bar{n}+1)\sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)}\frac{J_I^2}{U_I^2}|e_2\rangle e^{-iU_F t/\hbar}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

这里将非微扰修正的基态能量  $E_0$  作为“背景能”。

为了计算动量分布，其定义式见 (2.37) 式，首先利用波函数 (2.46)，求得单粒子密度矩阵  $\rho_{j'j}(t)$  为

$$\begin{aligned}
\rho_{j'j}(t) &= \left(1 - 2L\bar{n}(\bar{n}+1)\frac{J_I^2}{U_I^2}\right)\langle 0|b_j^\dagger b_{j'}|0\rangle \\
&\quad + \sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)}\frac{J_I}{U_I}(\langle 0|b_j^\dagger b_{j'}|e_1\rangle e^{-iU_F t/\hbar} + \langle e_1|b_j^\dagger b_{j'}|0\rangle e^{iU_F t/\hbar}) \\
&\quad + (2\bar{n}+1)\sqrt{2L\bar{n}(\bar{n}+1)}\frac{J_I^2}{U_I^2}(\langle 0|b_j^\dagger b_{j'}|e_2\rangle e^{-iU_F t/\hbar} + \langle e_2|b_j^\dagger b_{j'}|0\rangle e^{iU_F t/\hbar}) \\
&\quad + 2L\bar{n}(\bar{n}+1)\frac{J_I^2}{U_I^2}\langle e_1|b_j^\dagger b_{j'}|e_1\rangle
\end{aligned} \tag{2.47}$$

由于跃迁矩阵元  $J_I$  较小，所以这里的计算近似到  $J_I/U_I$  的二次方项，忽略高阶小量。单粒子密度矩阵实际上是一个五对角矩阵，设相应的对角常量为  $\varsigma_{|j-j'|}(t)$ ，则

$$\begin{aligned}
\varsigma_0(t) &= \bar{n} \\
\varsigma_1(t) &= 2\bar{n}(\bar{n}+1)(J_I/U_I)\cos(U_F t/\hbar) \\
\varsigma_2(t) &= \bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1)(J_I^2/U_I^2)(1+\cos(U_F t/\hbar))
\end{aligned} \tag{2.48}$$

其它的矩阵元为零。 $\zeta_0(t)$ 是对角元上的数据， $\zeta_1(t)$ 是与对角元近邻项的数据， $\zeta_2(t)$ 是与对角元次近邻项的数据。在热力学极限下，由(2.37)和(2.47)式可得动量分布函数为

$$n_k(t) \approx 1 + 4\bar{n}(\bar{n}+1) \frac{J_I}{U_I} \cos\left(\frac{U_F t}{\hbar}\right) \cos(k) + 2\bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1) \frac{J_I^2}{U_I^2} \left[1 + 2 \cos\left(\frac{U_F t}{\hbar}\right)\right] \cos(2k) \quad (2.49)$$

图2.4 (a) 展示了不同时刻的动量分布，由于解析计算的方法是在强相互作用下进行的，因此选择具有强相互作用的参量比值 $J_I/U_I = 1/20$ 。图2.4 (a) 表示三个不同时刻的动量分布，与图2.3 (a) 中的动量分布相比较崩塌-复原振荡仍然很明显，但可以清

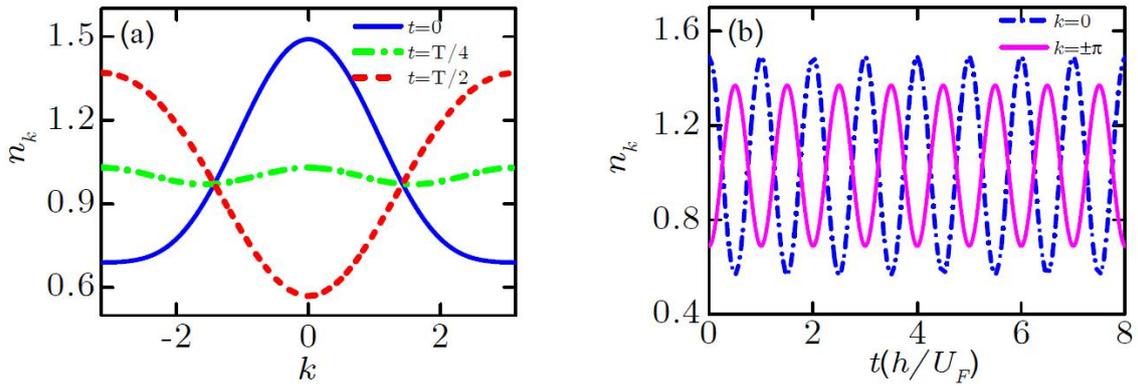


图 2.4 解析计算下的动量分布(a)及动量分布的时间演化(b)。

$$J_I/U_I = 1/20, \quad U_F/U_I = 10, \quad \bar{n} = 1$$

楚的看出幅度减小，这主要是由于相互作用越强动量分布越趋于均匀分布。图2.4 (b) 展示了零动量和布里渊区边界处的粒子数的时间演化，随着时间的增加零动量与布里渊区边界处的粒子数的分布呈周期性振荡，由(2.49)式可知振荡周期为 $h/U_F$ 。另外从图2.4 (b) 中我们还可以看出零动量分布的时间演化的振幅大于布里渊区边界处动量分布时间演化的振幅。

### 2.2.2 可见度的时间演化

可见度可以定量地描述超流态与莫特绝缘态的波函数的干涉情况，在没有任何粒子跃迁的莫特绝缘态中，波函数是不相干的，那么这种情况下的可见度为零。而

描述超流态的波函数相干性很强，所呈现出的干涉图像是非常清晰的，随着晶格深度的增加干涉图像的清晰程度变差（干涉图像参见文献[5]），可见度越小。通过第二节可以知道淬火超流态与绝缘态的崩塌-复原振荡的最大差异实际上是在零动量与布里渊区的边界两处的粒子数分布不同，为了计算方便，这里通过 $t$ 时刻零动量态与 $\pi$ 动量态之间的差异来体现干涉现象的强弱，这样可以定义下面的可见度

$$v(t) = \frac{n_{k=0}(t) - n_{k=\pi}(t)}{n_{k=0}(t) + n_{k=\pi}(t)} \quad (2.50)$$

而这个可见度也可以用作区分淬火绝缘态与淬火超流态的一个物理量。利用(2.49)式和(2.50)式得可见度的表达式为

$$v(t) = 4(\bar{n} + 1) \frac{J_I}{U_I} \cos\left(\frac{U_F t}{\hbar}\right) \quad (2.54)$$

图2.5(a)为强相互作用时可见度在不同相互作用下的数值结果与解析结果。从图中可以发现在 $J_I/U_I = 1/10$ 时解析结果（蓝色实线）与数值结果（绿色方块线）有一定的差距，而在 $J_I/U_I = 1/20$ 时解析结果（红色实线）与数值结果（浅蓝色点线）

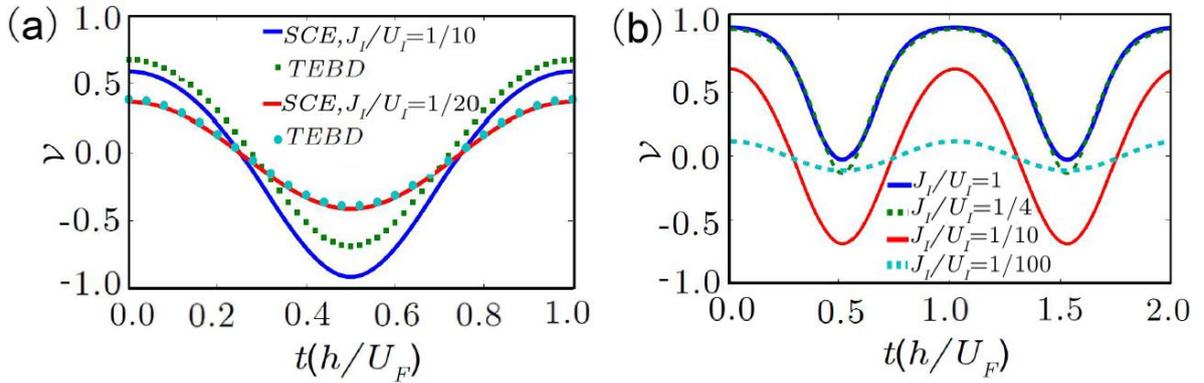


图 2.5 (a) 强相互作用下可见度时间演化的解析解与数值解的对比，  
(b) 不同相互作用下可见度时间演化的数值解<sup>[36]</sup>。

这里用到的数值方法（TEBD）选取晶格长度 $L=32$ ，总的粒子数为32

吻合的非常好。如图2.5（b）展示了不同相互作用时可见度的数值结果。图（b）中的蓝色实线为 $J_I/U_I = 1$ 时可见度的时间演化，发现可见度的值在演化过程中始终是正值，这是因为初态为超流态时，由于在动量空间粒子数分布特点，粒子数的最大占据始终在 $k=0$ 处。而图2.5（b）中的绿色虚线，蓝色虚线和红色实线分别表示 $J_I/U_I = 1/4$ ， $J_I/U_I = 1/10$ 和 $J_I/U_I = 1/100$ 时可见度的时间演化。从图中可以看出

可见度出现正负值交替的现象。从如图2.5 (b) 中的红色实线和绿色虚线我们可以看出，相互作用越强可见度越趋于在  $\nu = 0$  附近呈周期性对称分布，从可见度的解析表达式 (2.54) 中可以看出振荡周期为  $T = h/U_F$ 。从图2.5 (b) 中的红色实线和绿色虚线还可以看出，在强相互作用下，相互作用越强振幅越小，说明在有限隧穿的系统可见度随晶格深度的增加而减小。

### 2.3 小结

在本章中针对两种不同的淬火参数分别采用不同的解析方法研究了出现粒子空穴对系统的动力学问题。一方面通过 Jordan-Wigner 变换及 Bogoliubov 变换研究了初态是跃迁矩阵元为零的莫特绝缘态，经淬火调节跃迁矩阵元至很小时系统的动力学演化。由于演化过程中出现粒子空穴对，使得密度关联的传播信号出现负值，这个负值信号出现的时间随格点间隔的增大而增加，且最近邻格点的关联与其它间隔的关联相比较，在较短的时间内出现特殊的振荡。

另一方面利用强耦合展开及微扰理论的方法研究了将含有粒子空穴对的系统淬火调节至跃迁矩阵元为零后系统的动力学。由于强相互作用系统中彼此关联的粒子空穴对的存在，其动量分布出现奇特崩塌-复原振荡，粒子数的最大占据在  $T/4$  后会出现在  $k = \pm\pi$  处，这与初态为超流态时粒子数的最大占据始终在  $k = 0$  处有明显不同。此外，可见度也是有明显差别的，对于淬火莫特绝缘态的可见度的时间演化图像类似于三角函数，在  $\nu = 0$  附近呈现周期振荡的形式，而淬火超流态得到的可见度，在演化过程中始终是正值。最后将强相互作用下可见度的数值结果与解析结果进行了对比，结果表明在  $J_t/U_t = 1/20$  时解析的方法与数值的方法吻合的非常好，这可以为我们接下来要研究的问题做铺垫。

### 第三章 莫特绝缘态中偶极玻色子的淬火动力学

随着偶极相互作用的实验和理论发展，偶极相互作用变得越来越重要，在前两章的基础上，这一章我们主要研究具有偶极相互作用的拓展玻色哈伯德模型的淬火动力学。基于第二章的初态为含有粒子空穴对的态，淬火调节至跃迁矩阵元为零的动力学研究方法，我们研究在莫特绝缘态中偶极相互作用对系统的动量分布和可见度的影响并分析宇称关联的变化。

#### 3.1 莫特绝缘态中偶极玻色子的能谱

考虑具有长程偶极相互作用的玻色子被捕陷在一维光晶格中，所有的偶极玻色子都是肩并肩排列的，则系统的哈密顿量为：

$$H(J,U,V) = \sum_j \left[ -J(b_j^\dagger b_{j+1} + b_{j+1}^\dagger b_j) + \frac{U}{2} n_j (n_j - 1) \right] + \frac{V}{2} \sum_{j \neq j'} \frac{1}{|j-j'|^3} n_j n_{j'}, \quad (3.1)$$

其中  $V$  是偶极相互作用强度，当电偶极矩（磁偶极矩）肩并肩排列时  $V > 0$ ，为排斥相互作用。粒子在不同格点间的偶极相互作用以  $|j-j'|^3$  的形式衰减。淬火调节的过程中  $V$  不变。

当  $J_l = 0$  且  $V$  也很小时，系统呈现了一个完美的莫特绝缘态；当  $J_l \neq 0$  且很小时，系统中会出现彼此关联的粒子空穴对，描述这个系统的哈密顿量表示为  $H(J_l, U_l, V)$ ，淬火这个多体系统，即突然提升晶格的深度使得跃迁矩阵元为零（ $J_F = 0$ ），此时，支配着淬火后系统动力学演化的哈密顿量表示为  $H(0, U_F, V)$ 。对于没有偶极相互作用（ $V = 0$ ）的情况，这个模型就退化到标准的一维玻色哈伯德模型。在引入偶极相互作用后，随着偶极相互作用  $V$  的增加体系会显现丰富的物理特性。这里我们首先研究在强排斥极限  $J_l \rightarrow 0$  且填充因子  $g = 1$  时，通过数值计算来观察系统的相变情况，从而找出基态为完美的莫特绝缘态时  $V$  的取值范围。

图 3.1 展示了晶格长度  $L=12$ ，周期边界条件下，能量随  $V/U_l$  变化的情况，我们展示了偶相互作用较小时，能量最低的几种态的能谱，其中蓝色表示态  $|1,1,1,\dots,1\rangle$  所对应的能量，标记为 a 态；红色表示仅有一对粒子空穴对被激发时的态，标记为 b 态；绿色表示有更多粒子被激发的情况，标记为 c 态。这里的绿色仅呈现了部分多粒子被激发的态的能谱。从图 3.1 中可以看出在  $V/U_l < 0.36$  时，(a) 态始终为系统的基态，并且仅有一对粒子空穴被激发的态 (b) 与高能部分 (c) 之间有一个能隙，使得低能与高能部分被分隔开来，当在位相互作用很强时，这个能隙将会变得很宽，可

将高能部分忽略掉，进而可以仅考虑描述系统的态中只含有一对粒子空穴对的情况。

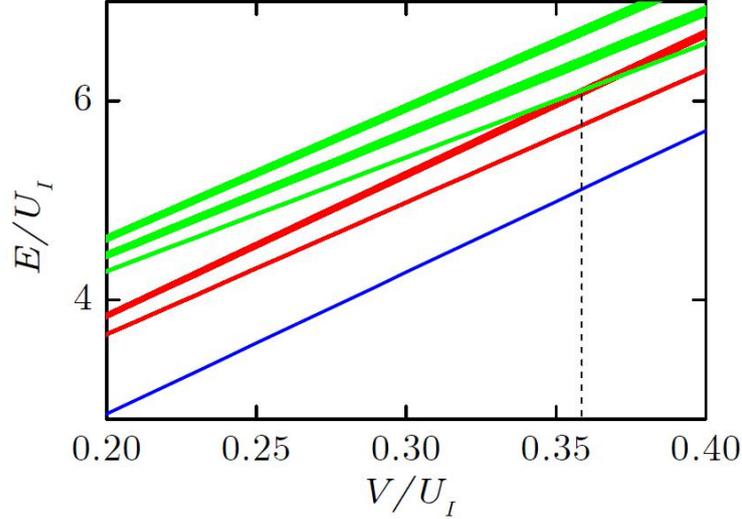


图 3.1 强排斥极限  $J_I \rightarrow 0$ ，填充因子为 1 时的低能谱随着  $V/U_I$  变化的情形

### 3.2 偶极相互作用对崩塌-复原振荡的影响及可见度的演化

我们仅考虑莫特绝缘态和仅有一对粒子空穴对处于低能态的情况。因此选择区域  $V/U_I < 0.36$ ，对于周期边界条件下晶格长度为  $L = 2M + 1$  的情况，基矢的选择参见 (2.41) 式，填充因子为 1 时这组基矢可以表示为

$$|e_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} (\dots + |\dots 1, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, 1, \dots\rangle + \dots + |\dots 1, 1, 0, 1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots\rangle) \quad (3.2)$$

在这组基矢下哈密顿量  $H(J_I, U_I, V)$  可以写为

$$H(J_I, U_I, V) = \begin{bmatrix} E_0 & A^T \\ A & K \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

这里，对角矩阵元  $E_0 = VL(1/1^3 + 1/2^3 + \dots + 1/d^3)$ ，矩阵  $A^T = (0, 0, 0, 0, \dots)$ ，矩阵  $K$  的对角矩阵元为  $\langle e_d | H_I | e_d \rangle = E_0 - V/d^3 + U_I$ ，非对角矩阵元  $\langle e_m | H_I | e_{m'} \rangle = -3J_I \delta_{m, m' \pm 1}$ 。哈密顿量 (3.1) 中偶极相互作用项的对角矩阵元的详细计算过程参见附录 A。系统以  $J_I$  作为微扰，由于哈密顿量  $H(J_I, U_I, V)$  是非简并的，利用非简并微扰理论可以得到修正后的基态波函数。其一阶修正波函数为

$$|\psi_g^{(1)}\rangle = 2\sqrt{L} \frac{J_I}{(V - U_I)} |e_1\rangle \quad (3.4)$$

二阶修正的波函数为

$$|\psi_g^{(2)}\rangle = 6\sqrt{L} \frac{J_I^2}{(V/2^3 - U_I)(V - U_I)} |e_2\rangle - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} |0\rangle \quad (3.5)$$

利用式 (3.4) 和 (3.5) 可得修正后的基态波函数为

$$\begin{aligned} |\psi_g\rangle = & \left(1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2}\right) |0\rangle + 2\sqrt{L} \frac{J_I}{(V - U_I)} |e_1\rangle \\ & + 6\sqrt{L} \frac{J_I^2}{(V/2^3 - U_I)(V - U_I)} |e_2\rangle + O\left[\left(\frac{J_I}{U_I}\right)^3\right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

突然提升晶格的深度使跃迁矩阵元为  $J_F$  为零, 系统的在位相互作用  $U_F$ , 此时的哈密顿量  $H(0, U_F, V)$  是对角化的, 态  $|e_d\rangle$  是非简并的。选取 (3.6) 式为初态波函数波函数, 则随时间的演化可以表示为

$$\begin{aligned} |\psi_g(t)\rangle = & \left(1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2}\right) |0\rangle + 2\sqrt{L} \frac{J_I}{(V - U_I)} |e_1\rangle e^{-i(1-V/U_F)2\pi t} \\ & + 6\sqrt{L} \frac{J_I^2}{(V/2^3 - U_I)(V - U_I)} |e_2\rangle e^{-i(1-V/8U_F)2\pi t} + O\left[\left(\frac{J_I}{U_I}\right)^3\right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

下面我们将考虑偶极相互作用对动量分布和可见度的影响。

由前一章可知, 淬火的莫特绝缘态下动量分布会出现奇特的崩塌-复原振荡, 这可以作为区别超流与绝缘态的一种方法, 鉴于这种情况我们分析偶极相互作用存在时对崩塌-复原振荡的影响。动量分布的定义见 (2.40) 式。利用 (3.7) 式首先得到单粒子密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho_{j'j}(t) = & \left(1 - 4L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2}\right) \langle 0 | b_j^\dagger b_{j'} | 0 \rangle \\ & + 2\sqrt{L} \frac{J_I}{(U_I - 2V)} \left( \langle 0 | b_j^\dagger b_{j'} | e_1 \rangle e^{-i(U_F - V)t/\hbar} + \langle e_1 | b_j^\dagger b_{j'} | 0 \rangle e^{i(U_F - V)t/\hbar} \right) \\ & + 6\sqrt{L} \frac{J_I^2}{(V/2^3 - U_I)(V - U_I)} \left( \langle 0 | b_j^\dagger b_{j'} | e_2 \rangle e^{-i(U_F - V/2^3)t/\hbar} + \langle e_2 | b_j^\dagger b_{j'} | 0 \rangle e^{i(U_F - V/2^3)t/\hbar} \right) \\ & + 4L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} \langle e_1 | b_j^\dagger b_{j'} | e_1 \rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

这里的计算近似到  $J_I/U_I$  的二次方项, 忽略高阶项, 单粒子密度矩阵  $\rho_{j'j}(t)$  是五对角

矩阵，相应的相应的对角常量  $\varsigma_{|j-j'|}(t)$  为

$$\begin{aligned}\varsigma_0(t) &= 1 \\ \varsigma_1(t) &= 4 \frac{J_I}{U_I - V} \cos\left(\frac{(U_F - V)t}{\hbar}\right) \\ \varsigma_2(t) &= 6 \frac{J_I^2}{(U_I - V)^2} \cos\left(\frac{(U_F - V)t}{\hbar}\right) + 12 \frac{J_I^2}{(V/8 - U_I)(V - U_I)} \cos\left(\frac{(U_F - V/8)t}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad (3.9)$$

其它的矩阵元为零。在热力学极限下，由 (2.40) 和 (3.8) 式可得动量分布的动力学演化为

$$\begin{aligned}n_k(t) &= 1 + 8 \frac{J_I/U_I}{1 - V/U_I} \cos\left[\left(1 - \frac{V/U_I}{U_F/U_I}\right)2\pi t\right] \cos(k) \\ &+ 12 \left[ \frac{(J_I/U_I)^2}{(V/U_I - 1)^2} + \frac{2(J_I/U_I)^2}{(V/8U_I - 1)(V/U_I - 1)} \cos\left(1 - \frac{V/U_I}{8U_F/U_I}\right)2\pi t \right] \cos(2k)\end{aligned}\quad (3.10)$$

另外，我们还可以分析偶极相互作用对可见度的影响，利用可见度的定义 (2.53) 式及 (3.10) 式可得

$$v(t) = 8 \frac{J_I/U_I}{1 - V/U_I} \cos\left[\left(1 - \frac{V/U_I}{U_F/U_I}\right)2\pi t\right]\quad (3.11)$$

图 3.2 (a)和(b)分别展示了  $k=0$  和  $k=\pm\pi$  处的粒子在偶极相互作用  $V=0$  与  $V\neq 0$  下的时间演化，当  $V=0$  时， $k=0$  和  $k=\pm\pi$  处的粒子随时间呈周期性振荡，如图 3.2

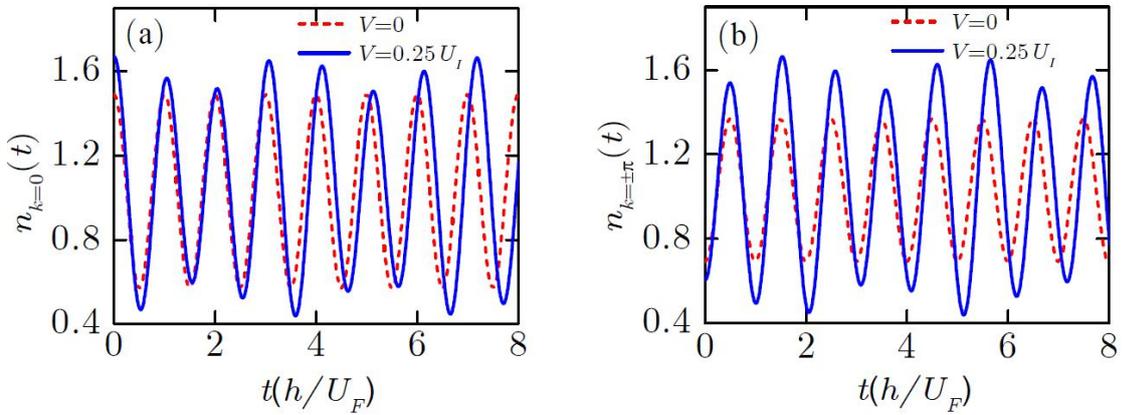


图 3.2  $n_{k=0}(t)$  和  $n_{k=\pm\pi}(t)$  在不同的偶极相互作用下的时间演化， $V=0, 0.25U_I$ ，  
这里  $J_I/U_I=1/20$ ， $U_F/U_I=10$

中的虚线，振荡的周期为  $h/U_F$ ，并且振幅是均一的；而当  $V \neq 0$  时，由方程 (3.10) 可以看出，动量分布的振荡由两个不同周期的余弦函数共同决定。图 3.2 (a)和(b)中两条实线展示偶极相互作用  $V = 0.25U_I$  时， $k = 0$  和  $k = \pm\pi$  处的粒子随时间的演化，与虚线 ( $V = 0$ ) 相比可以明显看出振荡的周期与振幅均增大，且振幅随着时间出现衰减（恢复）后又恢复（衰减）的现象。从这两幅图中可以看出，当  $V \neq 0$  时，淬火绝缘态的崩塌-复原振荡仍然存在， $k = 0$  处的粒子在崩塌（复原）的同时  $k = \pm\pi$  处的粒子在复原（崩塌）。

在图 3.3 中我们展示了  $V = 0.25U_I$  时， $n_{k=0}(t)$  和  $n_{k=\pm\pi}(t)$  动力学演化的频谱图，从图中我们可以看出， $k = 0$  与  $k = \pm\pi$  的频谱是相同的，有两个峰值，即  $n_{k=0}(t)$  和  $n_{k=\pm\pi}(t)$  的动力学演化这个信号是由两个周期函数构成，峰值即为这两个周期函数的振幅，分别为 0.533 和 0.08。振幅为 0.08 的函数部分对应的频率是 0.72，振幅为 0.533 的函数部分对应的频率是 0.97。

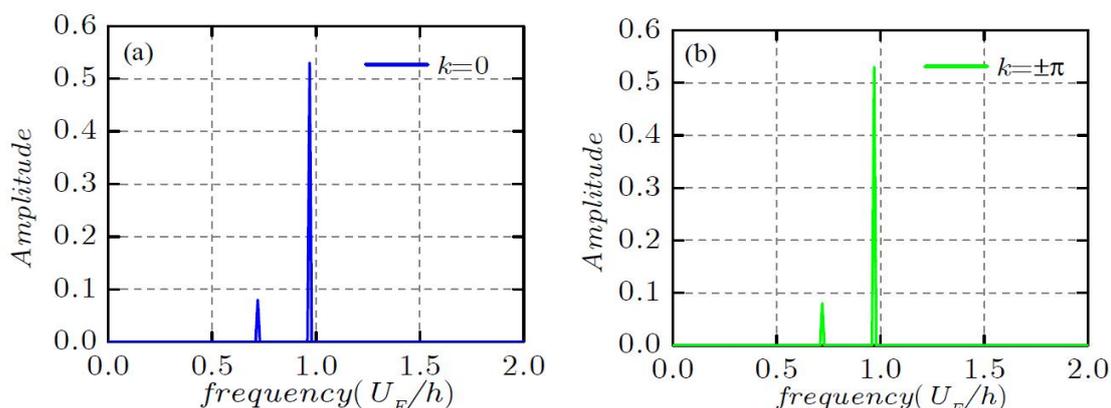


图 3.3  $n_{k=0}(t)$  和  $n_{k=\pm\pi}(t)$  动力学演化下的频谱图，

这里  $V = 0.25U_I$ ， $J/U_I = 1/20$ ， $U_F/U_I = 20$

图 3.4 中展示了在不同偶极相互作用下可见度随时间演化的情况。从图中可以发现，由于粒子空穴对的存在使得绝缘态的可见度不为零，而且在零点附近呈现周期振荡，振幅随偶极相互作用的增加而增大，表明偶极相互作用可以增加系统的干涉效应，随着偶极相互作用的增加，干涉条纹越清晰。对于不同的偶极相互作用，可见度的周期也发生了改变，由方程 (3.11) 可以得到可见度的周期为： $T = 1/(1 - (V/U_I)/(U_F/U_I))$ ，由于偶极相互作用较小时，周期  $T \approx 1 + V/U_F$ ，即周期随偶极相互作用的变化几乎是线性增加的。

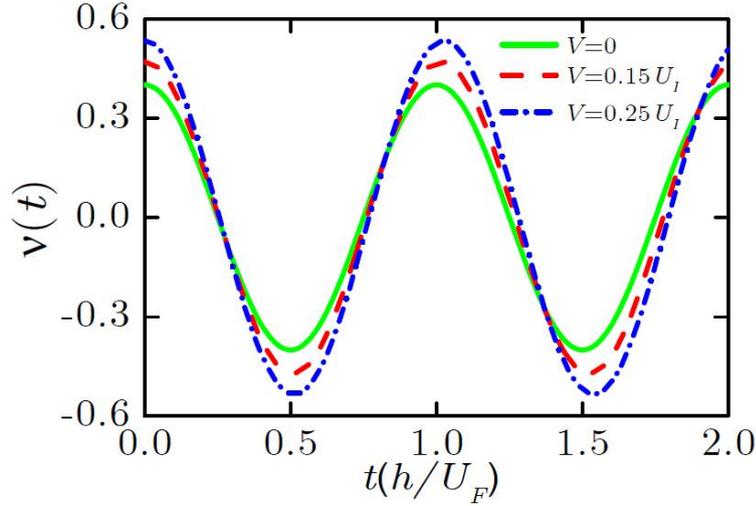


图 3.4 不同的偶极相互作用下可见度的时间演化，  
这里  $J_I/U_I=1/20$ ,  $U_F/U_I=10$

### 3.3 偶极相互作用对宇称关联函数的影响

前面我们介绍了强相互作用系统中的粒子空穴对对系统的物理性质起着非常重要的作用。对于这种粒子空穴对的系统，宇称算符  $s_j = e^{i\pi\delta n_j}$  是一个很好的研究工具，其中， $j$  为格点指标， $\delta n_j = n_j - \bar{n}$  表示  $j$  格点上即时的粒子数  $n_j$  与平均占据数  $\bar{n}$  之间的差值，当  $\delta n_j = 0$  为零时，宇称为 1；当  $|\delta n_j| = 1$  时，宇称为 -1，当宇称算符为 -1 时，表示此时格点的占据情况为双占据或空穴。粒子空穴对的关联性质可以通过宇称关联函数来描述，定义为

$$S(l) = \langle s_j s_{j+l} \rangle - \langle s_j \rangle \langle s_{j+l} \rangle \quad (3.12)$$

利用波函数 (3.7) 式计算近邻格点关联函数

$$S(1) = \langle s_j s_{j+1} \rangle - \langle s_j \rangle \langle s_{j+1} \rangle \quad (3.13)$$

这里

$$\langle s_j s_{j+1} \rangle = \left( 1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} \right)^2 + 4L \frac{J_I^2}{(U_I - V)^2} \frac{L-4}{L} + 36L \frac{J_I^4}{(V/8 - U_I)^2 (V - U_I)^2} \frac{L-8}{L} \quad (3.14)$$

$$\langle s_j \rangle = \left( 1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} \right)^2 + 4L \frac{J_I^2}{(U_I - V)^2} \frac{L-4}{L} + 36L \frac{J_I^4}{(V/8 - U_I)^2 (V - U_I)^2} \frac{L-4}{L} \quad (3.15)$$

$$\langle s_{j+1} \rangle = \left( 1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} \right)^2 + 4L \frac{J_I^2}{(U_I - V)^2} \frac{L-4}{L} + 36L \frac{J_I^4}{(V/8 - U_I)^2 (V - U_I)^2} \frac{L-4}{L} \quad (3.16)$$

利用基态波函数的内积

$$\langle \psi_g | \psi_g \rangle = \left( 1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} \right)^2 + 4L \frac{J_I^2}{(U_I - V)^2} + 36L \frac{J_I^4}{(V/8 - U_I)^2 (V - U_I)^2} \quad (3.17)$$

可得最近邻格点间的关联函数

$$S(1) = \frac{\langle \psi_g | s_j s_{j+1} | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle} - \frac{\langle \psi_g | s_j | \psi_g \rangle \langle \psi_g | s_{j+1} | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle \langle \psi_g | \psi_g \rangle} \quad (3.18)$$

将 (3.14), (3.15), (3.16) 和 (3.17) 式带入 (3.18) 式可得到最近邻格点的关联函数的表达式为

$$S(1) = \frac{16(J_I/U_I)^2}{(1 - V/U_I)^2} \left( 1 - \frac{16(J_I/U_I)^2}{(1 - V/U_I)^2} \right) \quad (3.19)$$

同理我们也可计算次近邻格点间的宇称关联, 当  $l=2$ , 其关联函数为

$$S(2) = \langle s_j s_{j+2} \rangle - \langle s_j \rangle \langle s_{j+2} \rangle \quad (3.20)$$

其中

$$\langle s_j s_{j+2} \rangle = \left( 1 - 2L \frac{J_I^2}{(V - U_I)^2} \right)^2 + 4L \frac{J_I^2}{(U_I - V)^2} \frac{L-8}{L} + 36L \frac{J_I^4}{(V/8 - U_I)^2 (V - U_I)^2} \frac{L-4}{L} \quad (3.21)$$

则次近邻格点间的宇称关联为

$$S(2) = -256 \frac{(J_I/U_I)^4}{(1 - V/U_I)^4} + 144 \frac{(J_I/U_I)^4}{(V/U_I - 1)^2 (V/8U_I - 1)^2} \quad (3.22)$$

最近邻格点的关联函数随偶极相互作用的变化, 如图3.5所示, 在这种情况下宇称并不依赖于时间。图中紫色虚线是  $V=0$  时的关联函数, 我们发现随着跃迁矩阵元的增加关联函数先增加后减小。这是由于随着跃迁矩阵元逐渐增加, 粒子空穴对的数目增大, 关联增大。关联在达到最大值后又逐渐减小。而随着的跃迁增大, 系统进入超流相。当  $V \neq 0$  时, 关联函数的最大值随着偶极相互作用的增加逐渐向隧穿减

小的方向移动，这种现象反映了莫特超流相变的临界点随偶极相互作用的增加而减小。

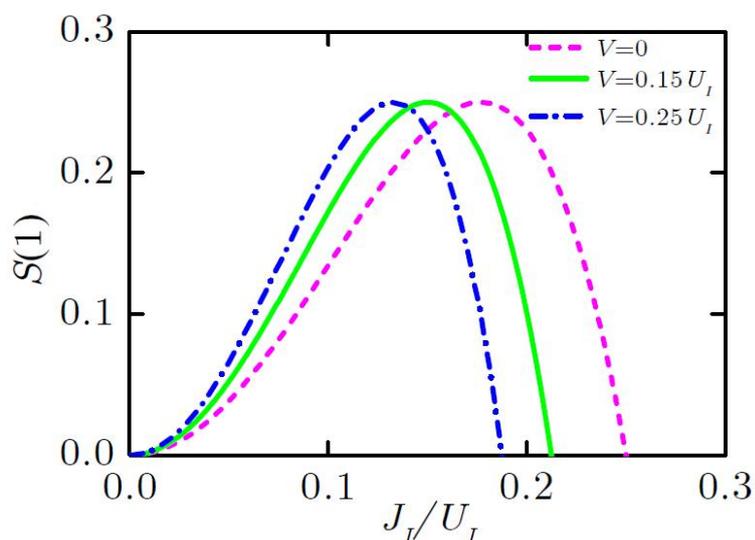


图 3.5 不同的偶极相互作用下最近邻格点的宇称关联

同理，根据次近邻格点的宇称关联 (3.23) 可以得到关联函数随  $J_I/U_I$  变化规律，如图3.6所示。我们仍然可以看出偶极相互作用对莫特超流相边界的影响，莫特绝缘相的区域随偶极相互作用的增加而减小。

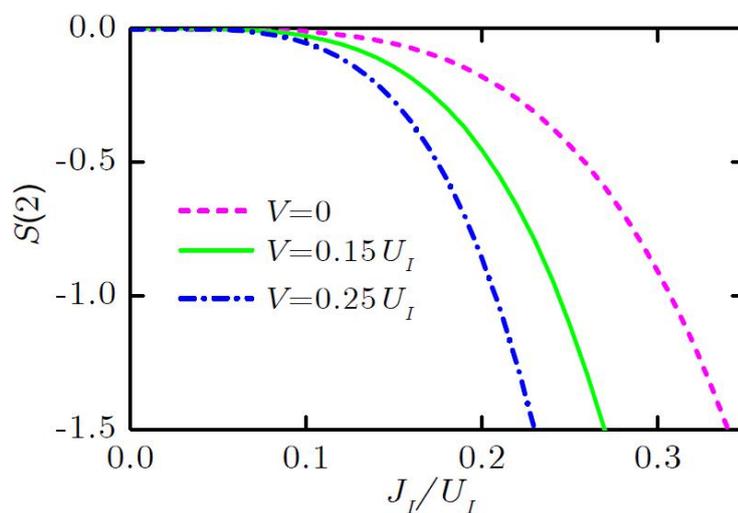


图 3.6 不同的偶极相互作用下次近邻格点的宇称关联

### 3.4 小结

在本章中对一维偶极玻色子系统的丰富物理现象展开了研究。在强排斥极限下平均填充数为1且偶极相互作用满足  $V/U_I < 0.36$  的情况下，我们主要研究了淬火后

系统的动力学特性以及宇称关联。通过观测系统的动量分布和可见度，发现随着偶极相互作用的增加，粒子的动量分布出现崩塌与复原的特性，崩塌-复原振荡的振幅和周期与标准玻色哈伯德模型相比均增大。另外，偶极相互作用较小时，可见度的周期为  $T \approx 1 + V/U_F$ ，即周期随偶极相互作用的变化几乎是线性增加的。同时，随着偶极相互作用的增大，可见度的振幅增大，这说明偶极相互作用使得系统趋向于超流相移动。而宇称关联函数也受到了一些影响，从近邻格点间关联和次近邻格点间关联的变化中都可以看出莫特超流相变的临界点随着偶极相互作用的增加而减小。



## 第四章 总结与展望

本文基于一维玻色-哈伯德模型及其拓展形式，讨论了系统密度关联函数，宇称关联及可见度等的动力学演化问题。首先介绍了在标准的一维玻色-哈伯德模型中，一方面，对于将初态是跃迁矩阵元为零的莫特绝缘态，淬火调节跃迁矩阵元至很小时的粒子空穴对系统，密度关联传播信号的负值出现的时间随格点间隔的增大而增加，且最近邻格点的关联与其它间隔的关联相比较，在较短的时间内出现特殊的振荡。另一方面利用强耦合展开及微扰理论的方法介绍了将粒子空穴对系统淬火到跃迁矩阵元为零后体系的动力学，从动量分布中可知淬火莫特绝缘态呈现出奇特的崩塌-复原振荡，主要体现在动量分布中粒子数的最大占据会随着时间的增加在  $k = 0$  与  $k = \pm\pi$  之间振荡。而且，对初态为莫特绝缘态淬火后动力学演化的描述的可见度会出现负值，这可以用来区分超流态与莫特绝缘态。重点研究了考虑偶极相互作用的拓展玻色-哈伯德模型，与标准的玻色哈伯德模型相比，偶极相互作用使得动量分布在演化过程中的振幅和周期均增大，而且振幅出现衰减与恢复的特性。另外可见度随时间成周期振荡，而相互作用较弱时，振荡的周期与随偶极相互作用线性增加。从近邻格点间的宇称关联中可以看出，随着偶极相互作用的增加，使得莫特超流相变的临界点不断减小。

实际上对于考虑偶极相互作用的玻色子系统来说是非常复杂的，在本文中我们仅考虑了  $V$  较小的区间。通过数值的方法可以知道，在区间  $V/U_I < 0.36$  内系统的基态为粒子数均匀填充的莫特绝缘态  $|1111\dots\rangle$ ，激发态可保留仅有一对粒子空穴对的态，如  $|11\dots 20\dots 11\rangle$ 。而在偶极相互作用  $V/U_I > 0.36$  时，系统的基态、激发态都会发生改变，相应的物理性质也将发生变化。在  $V$  达到一定值时，系统的基态可能是所有的格点都被粒子空穴对占据的态，即电荷密度波相 (CDW)，若填充因子仍为 1，则此基态可表示为  $|202020\dots\rangle$ ，而激发态则为粒子空穴对依次减少的态，如  $|20\dots 11\dots 20\rangle$ 。在这种情况下也是值得我们进一步去研究的。

另外，对于一维周期超晶格来说，调节晶格的跃迁矩阵元以及位能差可以使相图发生很大的变化。因此我们预计下一步研究淬火后超晶格系统的密度关联函数的时间演化。



## 附录 A 偶极相互作用的相关计算

本附录介绍了第三章计算哈密顿量 (3.1) 中的偶极相互作用项在基矢空  $\{|0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_M\rangle\}$  下展开的矩阵形式的方法。为了计算方便我们选择填充因子为 1 的莫特绝缘态。对于基矢  $\{|0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_M\rangle\}$  中的激发态都只含有一对粒子空穴对，因此格点上的粒子占据数只有三种情况 0, 1 和 2。在具体分析不同激发态下的矩阵元时我们按照这三种占据数的贡献来分析。下面我们一一介绍在这组基矢下偶极相互作用的矩阵元表达式：

① 在基矢  $|0\rangle$  下的矩阵元：

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \frac{V}{2} \sum_{j \neq j'} \frac{1}{|j-j'|^3} n_j n_{j'} | 0 \rangle \\ &= \frac{V}{2} L(1 \times 1) \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{d^3} + \dots + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{1^3} \right) \\ &= VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

②  $|e_1\rangle$  态下的对角矩阵元：对于叠加态  $|e_1\rangle$  中的子态是等价的，我们以  $|20111\dots\rangle$  为例，偶极相互作用项作用在态  $|20111\dots\rangle$  上时，空穴格点的贡献共  $2(L-1)$  项，值为 0。双占据格点的贡献共  $2(L-2)$  项，其中非零的贡献项为

$$\frac{V}{2} (2 \times 1) \left( \frac{1}{1^3} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 4 + \frac{1}{3^3} \times 4 + \dots + \frac{1}{d^3} \times 4 \right) \quad (\text{A.2})$$

在上面的式子中每一个分数后面所乘的整数 2 和 4 分别是最近邻，次近邻，再次近邻等的贡献项数，粒子数为 1 的格点贡献共  $A_L^2 - (4L-6)$  项，其中非零的贡献项为

$$\frac{V}{2} (1 \times 1) \left( \frac{1}{1^3} \times 2(L-3) + \frac{1}{2^3} \times 2(L-4) + \frac{1}{3^3} \times 2(L-4) + \dots + \frac{1}{d^3} \times 2(L-4) \right) \quad (\text{A.3})$$

这里，(A.3) 中分数后面所乘的整数  $2(L-3)$  和  $2(L-4)$  的意义与 (A.2) 中的 2 和 4 的意义相同，下面的计算中所有分数后面所成的整数的意义都与 (A.2) 相同。将式 (A.2) 与 (A.3) 相加得到偶极相互作用项作用在态  $|20111\dots\rangle$  上的值

$$VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) - \frac{V}{1^3} \quad (\text{A.4})$$

所以 $|e_1\rangle$ 态下偶极相互作用项的对角矩阵元为

$$\begin{aligned} & \langle e_1 | \frac{V}{2} \sum_{j \neq j'} \frac{1}{|j-j'|^3} n_j n_{j'} | e_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2L} 2L \left[ VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) - \frac{V}{1^3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$= VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) - \frac{V}{1^3} \quad (\text{A.6})$$

这里， $1/2L$  是态 $|e_1\rangle$ 的归一化系数，而它后面的 $2L$ 表示态 $|e_1\rangle$ 中共有 $2L$ 个子态。

③  $|e_2\rangle$ 态下的对角矩阵元：计算方法与 $|e_1\rangle$ 态的相同。以 $|210111\dots\rangle$ 为例，偶极相互作用项作用在态 $|210111\dots\rangle$ 上时，三种粒子数占据情况所贡献的项数与 $|e_1\rangle$ 相同，空穴的贡献值为零，双占据的非零贡献项为

$$\frac{V}{2} (2 \times 1) \left( \frac{1}{1^3} \times 4 + \frac{1}{2^3} \times 2 + \frac{1}{3^3} \times 4 + \dots + \frac{1}{d^3} \times 4 \right) \quad (\text{A.7})$$

粒子数为1的格点的贡献项为

$$\frac{V}{2} (1 \times 1) \left( \frac{1}{1^3} \times 2(L-4) + \frac{1}{2^3} \times 2(L-3) + \frac{1}{3^3} \times 2(L-4) + \dots + \frac{1}{d^3} \times 2(L-4) \right) \quad (\text{A.8})$$

将(A.7)和(A.8)相加得到偶极相互作用项作用在态 $|210111\dots\rangle$ 上的值

$$VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) - \frac{V}{2^3} \quad (\text{A.9})$$

所以 $|e_2\rangle$ 态下偶极相互作用项的对角矩阵元为

$$\begin{aligned} & \langle e_2 | \frac{V}{2} \sum_{j \neq j'} \frac{1}{|j-j'|^3} n_j n_{j'} | e_2 \rangle \\ &= VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) - \frac{V}{2^3} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

因此，依次类推我们发现对于态 $|e_d\rangle$ 下的偶极相互作用项的对角矩阵元的形式为

$$VL \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{d^3} \right) - \frac{V}{d^3} \quad (\text{A.11})$$

## 参考文献

- [1] J. Hubbard, Electron Correlations in Narrow Energy Bands. II. The Degenerate Band Case[J], Proc. Roy. Soc. A. 1963, **277**, 237–259.
- [2] M. C. Cha, M. P. A. Fisher, S. M. Girvin, M. Wallin, and A. P. Young, Universal conductivity of two-dimensional films at the superconductor-insulator transition[J]. Phys. Rev. B. 1991, **44**: 6883.
- [3] M. P. A. Fisher, Quantum Phase Transitions in Disordered Two-Dimensional Superconductors[J], Phys. Rev. Lett. 1990, **65**: 923.
- [4] N. F. Mott, Metal-Insulator Transitions[M]. London, Taylor & Francis, 1990.
- [5] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms[J]. Nature. 2002, **415**: 39.
- [6] J. Q. Liang, J. L. Liu, W. D. Li, and Z. J. Li, Atom-pair tunneling and quantum phase transition in the strong-interaction regime[J]. Phys. Rev. A. 2009, **79**:033617.
- [7] Z. H. Xu, L. H. Li, G. X. L. and S. Chen, Wigner crystal versus fermionization for one-dimensional Hubbard models with and without long-range interactions[J]. New J.Phys. 2013, **25**:055601.
- [8] Z. H. Xu and S. Chen, Wigner crystal induced by dipole-dipole interaction in one dimensional optical lattices [J]. Phys Rev A. 2012, **85**: 033606
- [9] L. H. Wen, Q. Z. Zhu, T. F. Xu, X. L. Jing, and C. S. Liu, Stationary states and quantum quench dynamics of Bose-Einstein condensates in an Abelian-gauge double-well potential[J]. J. Phy B. 2016, **49**:015303.
- [10] S. Dutta, A. Barman, A. Siddharth, A. Khana, and S. Basu, Tunneling dynamics of correlated bosons in a double well Potential[J]. J. Phy B. 2015, **48**: 045301.
- [11] B. Vermersch and J. C. Garreau, Emergence of nonlinear behavior in the dynamics of ultracold bosons[J]. Phys Rev A. 2015, **91**: 043603.
- [12] E. Duchon, Y. L. Loh, and N. Trivedi, Optical Lattice Emulators: Bose and Fermi Hubbard Models[J]. arXiv. 2013, **1311**:0543.
- [13] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices[J]. Phys. Rev. Lett.1998, **81**: 3108.

- [14] D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof, Quantum phases in an optical lattice[J]. Phys Rev A. 2001, **63**:053601.
- [15] G. G. Batrouni, R. T. Scalettar, and G. T. Zimanyi, Quantum critical phenomena in one-dimensional Bose systems[J]. Phys. Rev. Lett. 1990, **65**: 1765.
- [16] V. A. Kashurnikov, A. V. Krasavin, B. V. Svistunov, Mott-insulator-superfluid-liquid transition in a one-dimensional bosonic Hubbard model: Quantum Monte Carlo method[J]. Phys. Rev. B. 1996, **53**:11776.
- [17] N. Elstner and H. Monien, Dynamics and thermodynamics of the Bose-Hubbard model[J]. Phys. Rev. B. 1999, **59**:12184.
- [18] T. D. Kühner and H. Monien, Phases of the one-dimensional Bose-Hubbard model[J]. Phys. Rev. B. 1998, **58**: R14741(R).
- [19] T. D. Kühner, S. R. White, and H. Monien, One-dimensional Bose-Hubbard model with nearest-neighbor interaction[J]. Phys. Rev. B. 2000, **61**:12474 .
- [20] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases[J]. Rev. Mod. Phys. 2008, **80**: 885.
- [21] K. W. Mahmud, L. Jiang, P. R. Johnson and E. Tiesinga, Collapse and revivals for systems of short-range phase coherence[J]. New J. Phys. 2014, **16**: 103009.
- [22] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac and M. Rigol, One dimensional bosons: From condensed matter systems to ultracold gases[J]. Rev. Mod. Phys. 2011, **83**:1405.
- [23] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch, Phase Coherence of an Atomic Mott Insulator[J]. Phys. Rev. Lett. 2005, **95**: 050404.
- [24] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch, Interference pattern and visibility of a Mott insulator[J]. Phys Rev A. 2005, **72**: 053606.
- [25] A. R. Kolovsky, Block oscillations in the Mott-insulator regime[J]. Phys Rev A. 2004, **70**: 015604.
- [26] M. Endres, M. Cheneau, T. Fukuhara, C. Weitenberg, P. Schauß, C. Gross, L. Mazza, M. C. Banuls, L. Pollet, I. Bloch, S. Kuhr, Observation of Correlated Particle-Hole Pairs and String Order in Low-Dimensional Mott Insulators[J]. Science. 2011, **334** : 200.
- [27] M. Cheneau, P. Barmettler, D. Poletti, M. Endres, P. Schauß, T. Fukuhara, C. Gross ,

- I. Bloch, C. Kollath, and S. Kuhr, Light-cone-like spreading of correlations in a quantum many-body system[J]. *Nature*. 2012, **481**: 484.
- [28] P. Barmettler, D. Poletti, M. Cheneau, and C. Kollath, Propagation front of correlations in an interacting Bose gas[J]. *Phys Rev A*. 2012, **85** : 053625.
- [29] M. L. Wall and L. D. Carr, Dipole-dipole interactions in optical lattices do not follow an inverse cube power law[J]. *New J. Phys.* 2013, **15**: 123005.
- [30] S. Giovanazzi, A. Görlitz, and T. Pfau, Tuning the Dipolar Interaction in Quantum Gases[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2002, **98**: 130401.
- [31] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Stable <sup>85</sup>Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2000, **85**: 1795.
- [32] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman, All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2001, **87**: 010404.
- [33] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1995, **75**: 3969.
- [34] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1995, **75**: 1687.
- [35] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, and T. Pfau, Bose-Einstein Condensation of Chromium[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2005, **94**: 160401.
- [36] S. Yi and L. You, Trapped condensates of atoms with dipole interactions[J]. *Phys. Rev. A*. 2001, **63**: 053607.
- [37] S. Yi and L. You, Trapped condensates of atoms with dipole interactions[J]. *Phys. Rev. A*. 2000, **61**: 041604(R).
- [38] S. Giovanazzi, D. O'Dell, and G. Kurizki, Self-binding transition in Bose condensates with laser-induced “gravitation”[J]. *Phys. Rev. A*. 2001, **63**: 031603.
- [39] K. Góral, L. Santos, and M. Lewenstein, Quantum Phases of Dipolar Bosons in Optical Lattices[J]. *Phys. Rev. Lett.* **88**: 170406.
- [40] S. Yi, T. Li, and C. P. Sun, Novel Quantum Phases of Dipolar Bose Gases in Optical Lattices [J]. *Phys. Rev. Lett.* 2007, **98**: 260405.

- [41] W. X. Zheng and W. M. Liu, Superfluid–Mott-insulator transition of dipolar bosons in an optical lattice[J]. Phys. Rev. A. 2004, **70**: 045602.
- [42] A. Chotia, B. Neyenhuis, S. A. Moses, B. Yan, J. P. Covey, M. F. Feig, A. M. Rey, D. S. Jin, and J. Ye, Long-Lived Dipolar Molecules and Feshbach Molecules in a 3D Optical Lattice[J]. Phys. Rev. Lett. 2012, **108**: 080405.
- [43] M. S. Heo, T. T. Wang, C. A. Christensen, T. M. Rvachov, D. A. Cotta, J. H. Choi, Y. R. Lee, and W. Ketterle, Formation of ultracold fermionic NaLi Feshbach molecules[J]. Phys. Rev. A. 2012, **86**: 021602.
- [44] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, and K. Bongs, Ultracold Heteronuclear Molecules in a 3D Optical Lattice[J]. Phys. Rev. Lett. 2006, **97**: 120402.
- [45] M. Repp, R. Pires, J. Ulmanis, R. Heck, E. D. Kuhnle, and M. Weidemüller, Observation of interspecies  ${}^6\text{Li}$ - ${}^{133}\text{Cs}$  Feshbach resonances[J]. Phys. Rev. A. 2013, **87**: 010701.
- [46] S. K. Tung, C. Parker, J. Johansen, and Cheng Chin, Ultracold mixtures of atomic  ${}^6\text{Li}$  and  ${}^{133}\text{Cs}$  with tunable interactions[J]. Phys. Rev. A. 2013, **87**: 010702.
- [47] R. Zhang, Y. T. Cheng, H. Zhai, and P. Zhang, Orbital Feshbach Resonance in Alkali-Earth Atoms [J]. Phys. Rev. Lett. 2015, **115**:135301.
- [48] T. Keilmann, S. Lanzmich, I. M. Culloch and M. Roncaglia, Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices[J]. Nature. 2010, **2**: 361.
- [49] K. W. Mahmud, L. Jiang, E. Tiesinga, and P. R. Johnson, Bloch oscillations and quench dynamics of interacting bosons in an optical lattice[J]. Phys. Rev. A. 2014, **89**: 023606.
- [50] A. R. Kolovsky, New Bloch Period for Interacting Cold Atoms in 1D Optical Lattices[J]. Phys. Rev. Lett. 2003, **90**:213002.
- [51] S. Will, T. Best, U. Schneider, L. Hackermüller, D. S. Lühmann and I. Bloch, Time-resolved observation of coherent multi-body interactions in quantum phase revivals[J]. Nature. 2010, **465**: 197.
- [52] A. M. Läuchli and Corinna Kollath, Spreading of correlations and entanglement after a quench in the Bose-Hubbard model[J]. J. Stat. Mech. P05018.
- [53] V. G. Rousseau, D. P. Arovas, M. Rigol, F. Hébert, G. G. Batrouni, and R. T.

- Scalettar, Exact study of the one-dimensional boson Hubbard model with a superlattice potential[J]. Phys. Rev. B. 2006, **73**: 174516.
- [54] M. Rigol, A. Muramatsu, and M. Olshanii, Hard-core bosons on optical superlattices: Dynamics and relaxation in the superfluid and insulating regimes[J]. Phys. Rev. A. 2006, **74**: 053616.



## 攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目

王乐, 徐志浩, 郭利平, 张云波, 莫特绝缘态中偶极玻色子的动力学演化, 山西大学学报(自然科学版), 第39卷, 第3期.



## 致 谢

三年的研究生生活转瞬即逝，在这三年里无论在生活还是学习上都离不开学校、老师、同学、以及家人的帮助，在这里我要由衷的道一声感谢！

历时两个月的时间终于完成了硕士期间的毕业论文，在论文的写作过程中遇到了很多的困难和障碍，最终都在同学和老师的帮助下度过了。尤其要感谢郭利平和张云波老师，他们对我进行了无私的指导和帮助，不厌其烦地进行论文的修改和改进。

郭利平老师平易近人，对我积极耐心的指导，不仅帮助我掌握了许多研究方法，而且在学习和生活上都给了我很大的帮助，另外也使我明白了许多处理问题的方法。

作为冷原子小组中的一员，我们小组在张云波老师的带领下每周一次的组会和讨论会给我们提供了学习和讨论物理前言知识的机会，同时还让我们形成严谨的学习和工作态度，为将来从业打下了坚实的基础。张老师严谨治学以及兢兢业业的工作精神是我们学习的楷模。

然后还要感谢我们这个小组的每一个成员，在学习中给过我帮助指导的徐志浩老师，王利老师，以及小组里的师兄师姐师弟师妹们：陈冠军，梁成功，毛丽君，李甜甜，刘彦霞，陈立，王丽敏，刘敬鹄，李旗，刘娜，冯志强，刘聪明，胡蕊，张瑞江，王凤梅和田康康。同时还要感谢在校期间所有教过我的老师：梁九卿老师，李志坚老师，闫维贤老师，姜晓庶老师和韩国瑞老师。及 2013 级的所有同学们。最后要感谢参加阅读和答辩的各位评审专家和教授。

王 乐

2016 年 3 月于山西大学理论物理研究所



## 个人简况及联系方式

姓名：王乐

性别：女

籍贯：吉林省梨树县

学习经历：2013年9月至2016年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

联系方式：18835110879

电子邮箱：980120916@qq.com.



## 承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日



## 学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日

