



山西大學
Shanxi University

2016 届硕士学位论文

一维量子气体TBA方程迭代解
及量子临界

作者姓名	李 旗
指导教师	张云波 教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子气体理论
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2013 年 9 月至 2016 年 6 月

二〇一六年六月

山西大学

2016 届硕士学位论文

一维量子气体TBA方程迭代解 及量子临界

作者姓名	李 旗
指导教师	张云波 教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子气体理论
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2013 年 9 月至 2016 年 6 月

二〇一六年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2016

The Iterative Solutions of TBA Equations Quantum
Criticality for One-Dimensional Quantum Gas

Student Name	Qi Li
Supervisor	Prof. Yunbo Zhang
Major	Condensed Matter Physics
Specialty	Ultracold Atomic Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2013.09-2016.06

June, 2016

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 一维量子气体实验新进展.....	1
1.1.1 一维量子气体系统的制备.....	1
1.1.2 一维量子气体实验新进展.....	1
1.2 一维量子气体理论.....	5
1.2.1 Gaudin-Yang 模型.....	6
1.2.2 弦解.....	7
1.3 本文内容.....	8
第二章 一维相互作用费米气体 TBA 方程.....	9
2.1 排斥相互作用费米气体 TBA 方程.....	9
2.1.1 排斥相互作用费米气体考虑弦解后的 BA 方程.....	9
2.1.2 推导排斥相互作用费米气体 TBA 方程.....	13
2.2 吸引相互作用费米气体 TBA 方程.....	19
2.2.1 吸引相互作用费米气体考虑弦解后的 BA 方程.....	19
2.2.2 推导吸引相互作用费米气体 TBA 方程.....	22
第三章 一维相互作用费米气体 TBA 方程迭代解.....	29
第四章 一维相互作用费米气体量子临界及相图.....	35
4.1 一维排斥相互作用费米气体量子临界及相图.....	35
4.2 一维吸引相互作用费米气体量子临界及相图.....	37
第五章 总结与展望.....	43
参考文献.....	45
攻读学位期间取得的研究成果.....	49
致 谢.....	51
个人简况及联系方式.....	53
承 诺 书.....	55
学位论文使用授权声明.....	57

Contents

Chinese Abstract	I
ABSTRACT	III
Chaprer 1 Introduction	1
1.1 Experimental introduction of one-dimensional quantum gas.....	1
1.1.1 Experimental synthesis of one-dimensional quantum gas.....	1
1.1.2 New development of experiments in one-dimensional quantum gas.....	1
1.2 Theory of one-dimensional quantum gas.....	5
1.2.1 Gaudin-Yang Model.....	6
1.2.1 String states.....	7
1.3 Research Content.....	8
Chapter 2 TBA Equations and its' iterative solutions in one-dimensional interactional Fermi gas	9
2.1 TBA Equations in one-dimensional repulsive Fermi gas.....	9
2.1.1 BA Equations with complex solutions.....	9
2.1.2 Exactly derivation for TBA Equations.....	13
2.2 TBA Equations in one-dimensional attractive Fermi gas.....	19
2.2.1 BA Equations with complex solutions.....	19
2.2.2 Exactly derivation for TBA Equations.....	22
Chapter 3 Iterative solutions of TBA Equations in one-dimensional interactional Fermi gas	29
Chapter 4 Quantum criticality of one-dimensional quantum gas	35
4.1 Quantum criticality and phase diagram of one-dimensional repulsive Fermi gas.	35
4.2 Quantum criticality and phase diagram of one-dimensional attractive Fermi gas.	37
Chapter 5 Summary and Outlook	43
References	45
Research Achievements	49
Acknowledgment	51
Personal Profiles	53

Letter of Commitment	55
Authorization Statement	57

中文摘要

一维相互作用量子气体模型是冷原子气体研究领域中最为基础也最具有研究价值的理论模型之一。根据系统成分不同，一维量子气体可以分为玻色气体、费米气体和玻色费米混合气体，与之相对应的理论模型在 20 世纪 60 年代已经相继被提出，并且在之后几十年的理论和实验研究上得到了推广。深入了解和学习这些理论是本文的首要任务，同时也为研究更为复杂的一维量子气体性质夯实了基础。

与玻色气体相比，费米气体由于其独特的内禀属性具有更多新奇有趣的物理现象。尤其在吸引相互作用下，由于库珀对的产生使得系统出现了配对费米子和未配对费米子两种成分，而且这两种费米子的能量之间存在间隙。这一微观量子效应也使得表征系统热力学涨落的 TBA 方程较排斥情况下变成了两个，它们分别表示这两种费米子的能量并且反映两种费米子的量子行为。与此同时，通过迭代的方法解析求解 TBA 方程，可以精确表示关于相互作用强度的高阶能量和两种费米子化学势。

量子临界现象与零温时随系统参数改变的量子相变息息相关。一维量子可积模型的量子临界行为可以通过精确求解系统 Bethe-Ansatz 方程的方法来研究。所以本文致力于通过系统 TBA 方程求解吸引相互作用两分量费米气体的量子相变解析边界来研究其临界相变行为，并尝试作出零温时系统的量子相变图。

关键词：一维量子气体；费米气体；迭代解；量子临界

ABSTRACT

One of the fundamental and meaningful theoretical models in cold atom research area is the one-dimensional interacting quantum gas. The system may be composed of bosonic atoms, fermionic atoms gas or the mixture of them. The typical theoretical models have been established in the 1960s and widely generalized in later decades. These fundamental theories, such as Lieb-Liniger Model, Gaudin-Yang Model and Lai-Yang Model, have contributed in exploring the features of more experimentally realistic one-dimensional quantum gas. Therefore taking an insight into these theories becomes the primary task in our paper.

Compared to the Bose gas model, the Fermi gas model will exhibit more fancy and interesting physical phenomenon due to its characteristic intrinsic properties. Especially for the attractive Fermi gas, the emergence of Cooper pairs allows us to classify the atoms in the system into two species, namely the bound paired fermions and unpaired fermions. The energies of these two species fermions will separate and form a gap. Corresponding to this quantum effect, the TBA equations of this model which reflects the quantum thermodynamic fluctuation will become two formulas, in which one stands for quantum behavior of the paired fermion and the other stands for the quantum behavior of the unpaired fermion. Meanwhile, the high order solutions of the TBA equations can be obtained by the iterative method. In addition, the high order relations between these two species fermi chemical potentials and the interaction strength also can be acquired in this iterative progress.

The quantum critical phenomena is closely related to the quantum phase transition which will be accompanied with the changing parameters of the system. The quantum critical behavior of one-dimensional integrable model can be determined by exactly solving the BA equations. Therefore in this paper we study the quantum phase transitions of attractive Fermi gas by

analytically solving the TBA equations, which can be obtained from the BA equations in Yang-Yang thermodynamic method.

Key words: One-dimensional interactional quantum gas; Fermi Gas; Iterative solutions ; Quantum criticality

第一章 绪论

1.1 一维量子气体实验新进展

近年来在材料合成和超冷原子的可调操作上取得的卓越进步，使得人们在实验上观测到了许多明显的一维量子现象，并在理论上得到了验证。这些成果也使得人们更进一步地了解了低维量子多体系统的量子统计特性和强关联效应。

1.1.1 一维量子气体系统的制备

实验上，由于真正的严格的一维量子气体在实验上并不存在，要采取一些物理手段来制备一维量子气体系统。常见的方法是将粒子紧束缚在一个光场中，这个光场的横向是由两束相互正交的驻波所形成的光晶格，轴向则是一个相对较弱的光束束缚势。这样原子在横向的激发可以完全被抑制，从而使得受束缚的原子具有准一维量子气体系统的性质。如图1.1，两组分的 ${}^6\text{Li}$ 原子被束缚在一系列雪茄状的管道中，每一个管道可以近似看作一个准一维量子系统，而且系统之间相互独立。

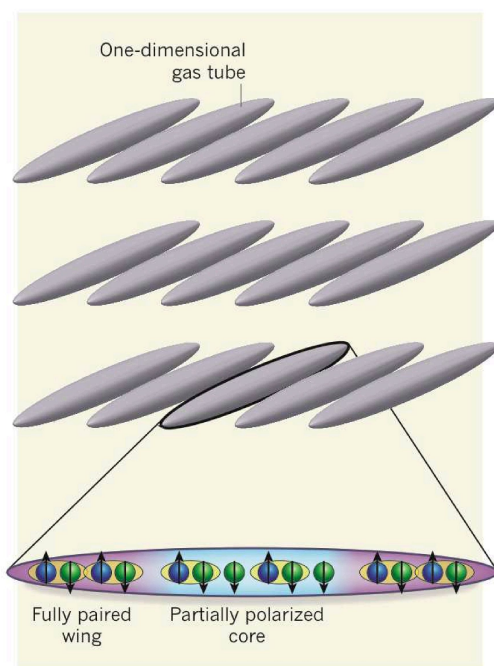


图 1.1 一维量子气体系统^[1]

1.1.2 一维量子气体实验新进展

1) 利用一维超冷费米气体观测吸引相互作用下的配对现象

“一维吸引两分量费米气体中存在的束缚态”这一观点在 C. Mora 的文章中以

“二聚物”的概念第一次被提出^[2]，早期关于其中的配对机制有两种理论模型——Fulde and Ferrell 模型^[3]和 Larkin and Ovchinnikov 模型^[4]。由于振荡序参数可以被视为质心动量相反的两凝聚体干涉现象，两种模型之间密切相关。Yean-an Liao^[1]等人对囚禁势中一维两种自旋混合的费米⁶Li 原子气体(如图 1.1)在有限温度下的密度分布观测，为直接观测和描述 FFLO 配对现象坚实的基础。同时，这一工作对研究一维费米气体的量子相变也有很大帮助。

实验^[5,6]利用二维光晶格^[2]构造了一维管状量子系统，并且在⁶Li 原子基态中选取两个最低超精细能态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ ，其中绝大部分粒子占据 $|1\rangle$ ，少部分占据 $|2\rangle$ 。光势阱 $V = V_0 \cos^2(kx) + V_0 \cos^2(ky)$ ， $k = 2\pi/\lambda$ 。其中 $V_0 = 12\varepsilon_r$ 为光势阱深度， x, y 为两束相互正交的激光形成的坐标， λ 为形成光阱的激光波长(实验中 $\lambda = 1064nm$)， $\varepsilon_r = \hbar^2 c^2 / 2m$ 为恢复能量， m 为⁶Li 原子质量。为了满足一维量子系统的要求，取 $\omega_\perp / \omega_z = 1000$ 满足远大于 $N_1 \approx 100$ ，取 $t/k_B \approx 17nK$ 满足远小于 $\varepsilon_F / k_B \approx 1.2\mu K$ 和 $T \approx 175nK$ 。其中， ω_\perp 和 ω_z 分别为光势阱的轴向和横向频率， N_1 每一个一维管道中占据能态 $|1\rangle$ 的粒子数， t 为单粒子隧穿比， ε_F 为一维费米能。另外，将外磁场强度调至 $890G$ ^[7,8]时，系统为强吸引相互作用体系^[9,10]。在这些条件构造的环境中，通过两个探测激光束快速成像、选择恰当的强度和频率使密度差信噪比最大化测量某点处两种自旋的密度分布。

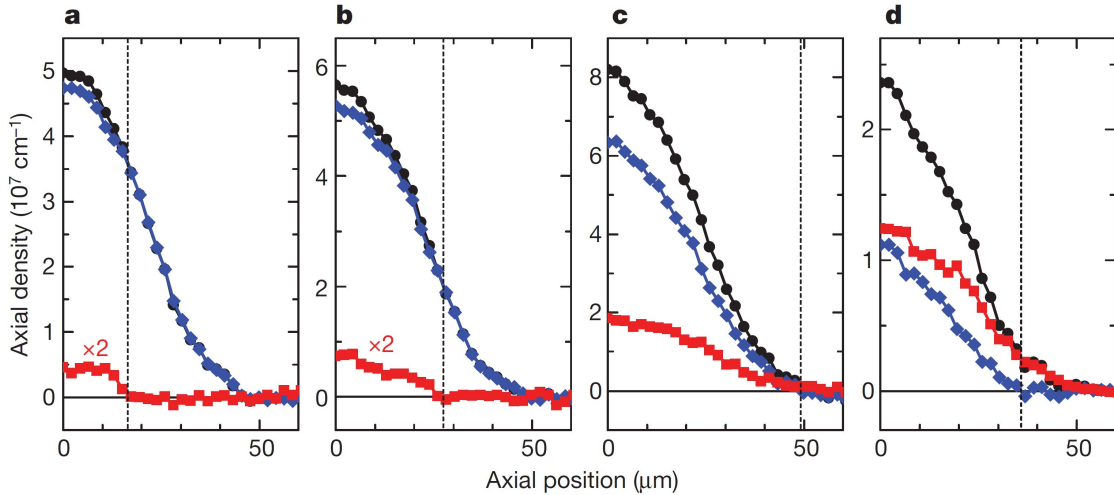


图 1.2 自旋占据不平衡时一维管状量子系统轴向密度分布^[1]

图中黑点表示占据 $|1\rangle$ 的密度分布；蓝方块表示表示占据 $|2\rangle$ 的密度分布；红方块表示为两者之差；图 (a) 中弱极化强度 $P = 0.015$ ；图 (b) 中极化强度 $P = 0.055$ ；图 (c) 中极化强度在临界 P_c 附近， $P = 0.10$ ；图 (d) 中，极化强度大于临界 P_c ， $P = 0.33$ 。

图 1.2 展示了态 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ 以及两者之差在轴向的密度分布，它与系统极化强度的

取值范围有关。这些图像代表了在所有一维管状量子系统中线密度的总和。图 (a) 表明在极化强度很小时，部分极化的相边缘位于势阱中间；图 (b) 则告诉我们随着极化强度的增大，部分极化相的范围逐渐变大；图 (c) 体现了在临界 P_c 附近，部分极化相的边缘逐渐向原子云边缘靠近；图 (d) 则展示了当极化强度逐渐增大直至高于临界 P_c 时，原子云的边缘处于完全极化相。

另外，利用逆阿贝尔变换可以得到系统粒子数分布与极化强度的关系^[11]。如图 1.3 所示，相半径是关于一维管状量子系统中心处极化强度的函数。

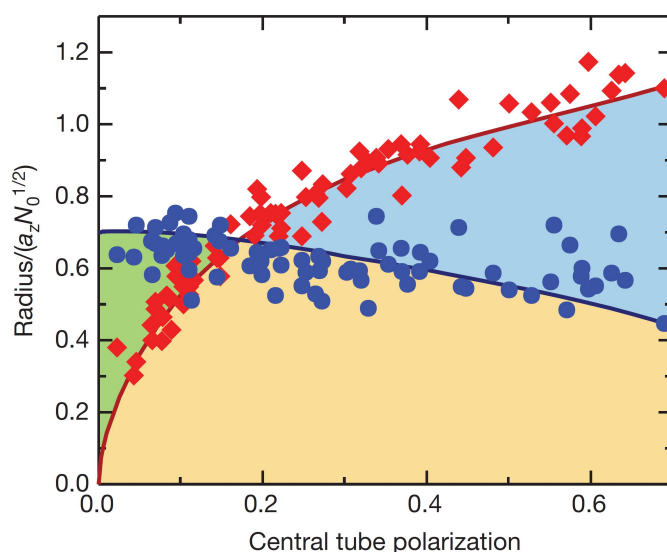


图 1.3 一维吸引费米气体实验相图^[1]

图中红色方块代表轴向密度差分布；蓝色原点代表占据 $|2\rangle$ 的密度分布；图中紫色实线和蓝色实线是利用 Bethe ansatz 方法计算得到的真空态-完全极化相、部分极化相-完全极化和完全配对-真空态的相边界；图中白色区域表示真空态，绿色区域表示完全配对相，蓝色区域为完全极化相，黄色区域则表示部分极化相。

2) 一维玻色气体在动量空间中的二阶关联

关联函数由于其能够表征系统所呈现的不同相而成为描述系统物理性质^[12]的一个重要工具。对于一维系统，这一点尤为突出。如利用实空间的两体关联函数来区分理想玻色体系 (IBG)、准玻色-爱因斯坦凝聚体系 (QBEC) 和费米化体系。理想玻色气体的显著特征为聚簇现象，准玻色-爱因斯坦凝聚体系无聚簇现象产生，费米化体系则会出现反聚簇现象^[13]。对于描述非平衡的动力学问题，关联函数也同样重要，如对系统施加一个瞬时微扰后研究其关联函数随时间的动力学演化，可以发现系统产生了光锥效应^[14,15]；研究系统两体关联函数还可以观测到 Casimir 效应^[16]。

正因为关联函数有如此不可小觑的作用,实验上也涌现出来越来越多关于它的研究和成果。其中,研究处于热力学平衡时的一维玻色气体在动量空间完整的二阶关联函数^[17]较为突出。在这一实验中,数据遍历了一维玻色气体相图^[18]中从 QBEC 体系到 IBG 体系中的相互作用区间。

实验运用原子芯片实验,实现了准一维超冷⁸⁷Rb 原子云的制备^[19]。利用汽化冷却技术将这些原子制备在谐振子势阱中处于热力学平衡的基态 $|F=2, m_F=2\rangle$, 谐振子势阱的横向和纵向频率分别为 $\omega_{\perp}/2\pi=1.9\text{kHz}$, $\omega_z/2\pi=7\text{Hz}$ 。通过在平均格点处装备测量其线密度 $\rho(z)$ 和密度涨落^[20]来研究其计温学。

在 IBG 体系中,由于单粒子本征态已经很好地定义了动量,不同动量间的关联会消失,同时动量 p 的占据数 N_p 的涨落为 $\langle\delta N_p^2\rangle=\langle N_p\rangle+\langle N_p\rangle^2$,第二项即为著名的聚簇项。当 $\langle\Psi^+(z)\Psi(z')\rangle$ 远远小于原子云的长度 L 时,可以通过局域密度近似(LDA)的方法处理被囚禁的原子云。动量空间的密度关联可以表示为

$$\begin{aligned}\langle\delta n_p\delta n_{p'}\rangle &= \delta(p-p')\langle n_p\rangle + B(p,p') \\ B(p,p') &= \left|\int dz \langle v_{\rho(z),T}^{(h)}[(p+p')/2] e^{i(p-p')z/\hbar} \right|^2\end{aligned}\quad (1.1)$$

其中 $v_{\rho(z),T}^{(h)}$ 表示温度为 T 时各向同性气体的动量分布, ρ 为线密度且满足归一性 $\rho = \int dp v_{\rho(z),T}^{(h)}(p)$ 。只有当 $|p-p'|$ 与 \hbar/L 同阶时 $B(p,p')$ 为非零值。由于 $\hbar/L \ll \delta$,可以取近似 $B(p,p') = B(p)\delta(p-p')$,其中

$$B(p) = 2\pi\hbar \int dz \langle v_{\rho(z),T}^{(h)}(p) \rangle^2 \quad (1.2)$$

对于退化的原子云, p 的宽度为 $n(p)$,由于 $\langle v_{\rho(z),T}^{(h)}(p) \rangle \gg 1$,聚簇项将远远大于短噪声项。所以动量关联图像为

$$\langle\delta N_{\alpha}N_{\beta}\rangle = \iint dp dp' A(\alpha,p)A(\beta,p') \langle\delta n_p\delta n_{p'}\rangle \quad (1.3)$$

对于高退化的 IBG 气体,(1.2)可以取近似值 $\langle v_{\rho(z),T}^{h(0)}(p) \rangle$ 。关联中唯一相关的信息为 $\langle\delta N_{\alpha}^2\rangle$ 。

而在 QBEC 中,第一次观察到了动量空间的强聚簇现象并且证实了负关联的存在:对 $\langle\delta N_{\alpha}^2\rangle$ 的观测可以发现它位于短噪声的上部,这与实空间的斯坦克收缩行为一致,且在实空间中 QBEC 的特征为被抑制的玻色聚簇现象;对 $\langle\delta N_{\alpha}N_{\beta}\rangle$ 的观测中可以发现在区域 $\alpha = \beta$ ($p' = -p$)周围的反聚簇效应。上述两个现象均是 QBEC 在巨正则系综中的显著特征。

在 QBEC-IBG 的过渡中,在区域 $\alpha = \beta$ 处的聚簇现象仍然很显著,而在区域

$\alpha = -\beta$ 处的反聚簇现象与 QBEc 中相比则并不明显。

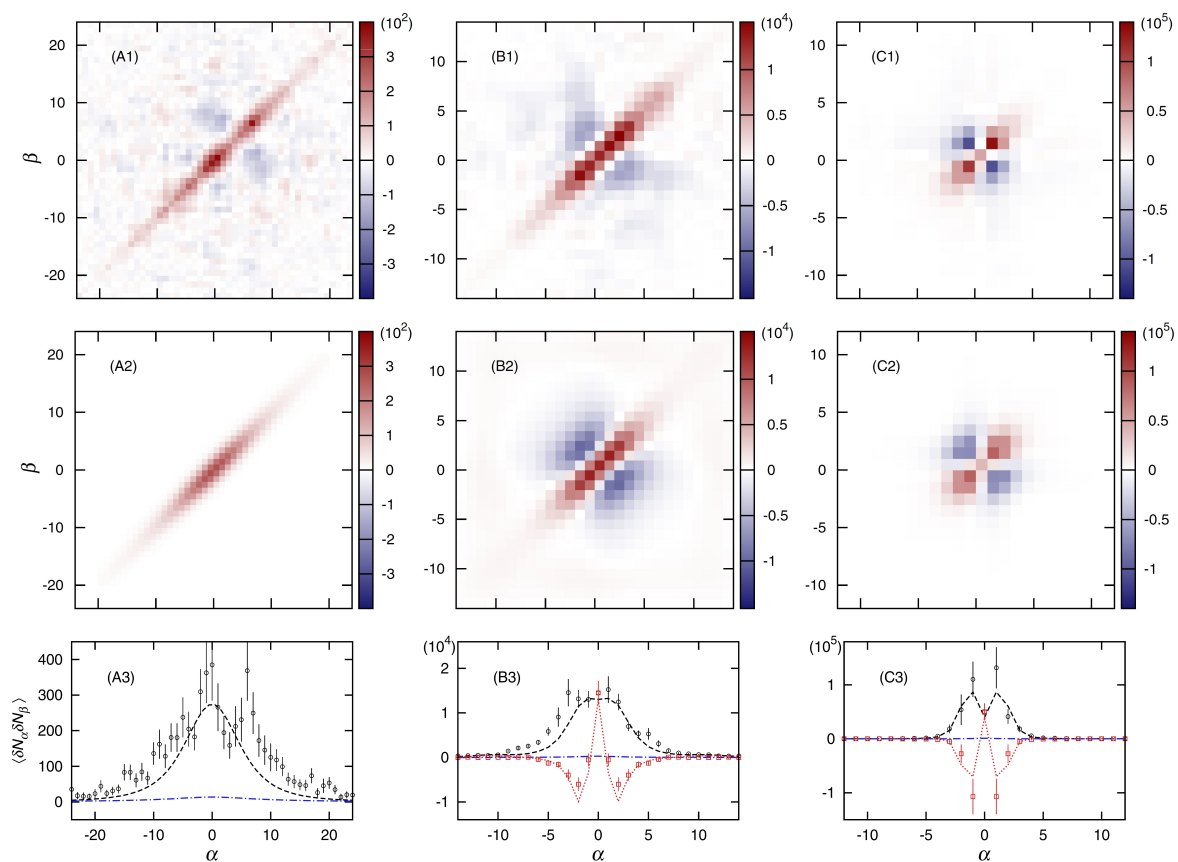


图 1.4 IBG、QBEc-IBG 过渡以及 QBEc 体系中的动量关联^[17]

A、B、C 分别表示图 IBG、QBEc-IBG 过渡以及 QBEc 体系；第一行为实验数据 $\langle \delta N_\alpha \delta N_\beta \rangle$ ，第二行为数值计算的动量关联 $\langle \delta N_\alpha \delta N_\beta \rangle$ ，彩色条具有统计性；第三行为动量关联对角元 $\langle \delta N_\alpha^2 \rangle$ ，其中点化线为短噪声极限。

1.2 一维量子气体理论

自然界中的微观粒子根据表征其内禀属性的物理量——自旋可以分为玻色子和费米子两类。如光子、 π 介子等自旋为零或 \hbar 整数倍的粒子称为玻色子，这些粒子服从玻色-爱因斯坦统计；如电子、 μ 子、质子、中子等自旋为 $\hbar/2$ 的奇数倍的粒子称为费米子，这些粒子服从费米-狄拉克统计。这两种基本粒子可以构成理论物理和实验物理的研究对象——量子气体系统，而根据其组成成分，又可以具体分为玻色系统、费米系统以及玻色费米混合系统。

对于玻色系统，粒子的全同性导致其具有交换对称性；并且在绝对零温条件下所有粒子均会凝聚在系统基态，这一量子宏观效应被称为玻色-爱因斯坦凝聚（简称 BEC）。其名源于纪念预言这一现象的两位伟大的物理学家。

对于费米系统，自旋这一内禀自由度的存在使得系统与玻色系统的性质有很大差别。首先，就其波函数而言，交换反对称性是其重要特征之一；其次，由于服从费米狄拉克统计，一个量子态上最多只能占据一个粒子，所以粒子能级的填充行为也受到限制；另外，随着理论计算的飞速扩展以及实验手段的逐步先进，这一系统中越来越多的新奇特性被物理学家预言并且在实验上精确地观测到，如两相互吸引且自旋反向的费米子形成库珀对^[21]（也称BCS）、费米极化^[22-27]、类FFLO对（Fulde-Ferrel-Larkin-Ovchinnikov-like）的形成、自旋电荷分离现象、量子临界及其空间散射、Tomonaga-Luttinger^[28,29]液体等。

量子多体理论的另一基础理论——玻色费米混合气体理论，则是构建在上述两个基本量子气体理论的基础上并加以研究和扩展。实验上，由玻色费米混合物到多种玻色子和费米子组合的成功退化为探究量子多体现象开辟了一种新的方法——通过调节同种粒子间或异种粒子间的相互作用来实现。

1.2.1 Gaudin-Yang 模型

长度为 L 的一维 δ 相互作用费米气体^[30,31] 处于强度为 H 的外磁场中，系统由 N 个质量均为 m 的费米子组成，其中包含 $S = \pm 1/2$ （自旋向上、向下）两种费米子，且自旋向下的费米子粒子数为 M 。系统哈密顿量的二次量子化形式为

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \phi_{\sigma}^{\dagger}(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \mu_{\sigma} + V(x) \right) \phi_{\sigma}(x) dx \\ & + g_{1D} \int \phi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \phi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \phi_{\uparrow}(x) \phi_{\downarrow}(x) dx - \frac{H}{2} \int (\phi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \phi_{\uparrow}(x) - \phi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \phi_{\downarrow}(x)) dx \end{aligned} \quad (1.4)$$

式中 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 代表粒子的自旋态为 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ ， $\phi_{\sigma}^{\dagger}(x)$ ($\phi_{\sigma}(x)$) 代表在位置 x 处粒子的湮灭产生（湮灭）算符。对于均匀系统，外势 $V(x) = 0$ 。（1.1）中第二项表示两粒子间强度为 $g_{1D} = \hbar^2 c / 2m$ ($c = -2/a_{1D}$) 的相互作用， a_{1D} 为一维散射长度。在实验上可以通过 Feshbach 共振^[32,33] 来调节这一相互作用强度。两粒子间为排斥 δ 相互作用时 $c > 0$ ，相反 $c < 0$ 则表示粒子间为吸引相互作用；（1.1）中第三项则表示在外磁场作用下不同自旋态间 δ 相互作用所导致的塞曼（Zeeman）能，它是一个守恒量。

研究系统的本征问题，需要从系统哈密顿量的一次量化形式出发，若取谐振子单位 $\hbar = 2m = 1$ ，则其形式为

$$H = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \quad (1.5)$$

式中第一项代表总动能，而第二项则代表粒子间的相互作用能（只考虑两粒子间 δ 相

相互作用)，常数 c 表示相互作用强度。若系统的本征波函数为 ψ ，则系统的薛定谔本征方程为

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi + 2c \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j) \psi = E \psi \quad (1.6)$$

E 代表与系统哈密顿量对应的本征能量。

根据费米系统自身具有的性质——波函数反对称性、两相邻粒子间 δ 相互作用所导致的系统波函数连续性及间跃条件、周期性边界条件，可以利用量子逆散射方法得到系统本征动量 k 和快度 Λ 所满足的一系列本征方程，即 BA 方程，其形式如下：

$$e^{ik_j L} = \prod_{\alpha=1}^M \frac{k_j - \Lambda_{\alpha} + ic/2}{k_j - \Lambda_{\alpha} - ic/2} \quad (1.7)$$

$$-\prod_{j=1}^N \frac{k_j - \Lambda_{\alpha} - ic/2}{k_j - \Lambda_{\alpha} + ic/2} = \prod_{\beta=1}^M \frac{\Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\beta} + ic}{\Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\beta} - ic} \quad (1.8)$$

其中 $j=1,2,\dots,N; \alpha=1,2,\dots,M$ 。求解这一本征方程组可以得到系统本征能量

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2 \quad (1.9)$$

事实上，粒子间相互作用方式（排斥或吸引）不同、系统所处环境不同（零温或者有限温度条件），都会导致系统的 BA 方程有所差别。本文第二章将重点讨论这一问题。

1.2.2 弦解

对于周期系统， N -弦解假设可以表示为

$$k_j = \alpha + i(N+1-2j)c/2, j=1,\dots,N \quad (1.10)$$

式中， α 为动量解的实部，其虚部则是因式 ic 的整数或半整数倍。 N 表示系统总粒子数， c 为粒子间相互作用强度，这一假设被公认为是对于粒子间存在吸引相互作用 $c < 0$ 且系统限度无限大 $L \rightarrow \infty$ 时其 Bethe- Ansatz 方程的解的形式。

图 1.2 是数值求解一维吸引相互作用玻色气体 BA 方程的结果，横轴表示动量解的实部，而纵轴表示动量解的虚部。其中粒子总数 $N=10$ ，相互作用强度 c 从左向右依次取值 $-10, -4.0, -3.0, -2.0, -1.8, -1.6, -1.4, -1.2, -1.1, -1.0, -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5$ 。图 (a) 中 $c=-0.8$ ，图 (b) 中 c 从左向右依次取值 $-0.4, -0.3, -0.2, -0.1$ 。从图中可以看出，当相互作用强度 $-1.42 < c < 0$ 时，其解会形成五对二聚体。而当 $c \leq -3.02$ 时，其基态解的分布为 10-弦解的形式，体现在图 (b) 中及在 $c=-3.02$ 处，

十个动量解竖直排成一行，即这十个动量解的实部均相同，而虚部则对称地分布在横轴两侧。

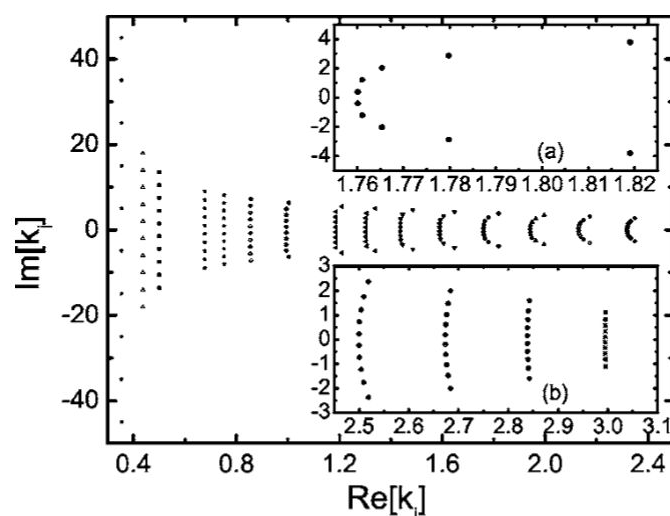


图 1.5 一维吸引玻色气体 Bethe Ansatz 方程的解的分布^[34]

另外，从 (1.1) 式动量解的表达式也可以知道，若 N 为奇数，则仅有一个解的虚部为零，其余虚数解对称分布在横轴两侧；而当 N 为偶数时，所有的虚数解均对称分布在实数轴两侧。

本文对于这一概念的具体应用将在第二章中探讨吸引相互作用费米气体在零温和有限温度下 BA 方程解的形式中给予呈现。

1.3 本文内容

本文主要探究了一维相互作用费米气体的 TBA 方程及其迭代解，并在此基础上研究系统的量子临界相变。文章整体结构如下：

第一章：简要叙述了关于一维量子气体系统的实验室制备和新兴的实验成果，介绍了与本文相关的一维量子气体理论中两个重要的基本理论；

第二章：利用 Yang-Yang 热力学方法严格推导了两分量费米气体的 TBA 方程；

第三章：利用迭代的方法解析计算了吸引相互作用费米气体 TBA 方程的高阶迭代解；

第四章：对排斥相互作用费米气体在外磁场作用下的相变情况给予简单介绍；借助热力学 Bethe- Ansatz 方法解析计算出吸引相互作用下两分量费米气体在外磁场作用下的量子相边界，且根据这一边界解析解绘制出相变图；

第五章：对前文结果和结论进行总结，预期了相关内容在未来的发展方向。

第二章 一维相互作用费米气体 TBA 方程

在排斥和吸引 δ 相互作用下，一维两分量费米气体，即绪论中提到的Gaudin-Yang模型，其BA方程中动量和快度的解的形式不同。为了直观了解其形式，表2.1给出了系统在零温和有限温度情况下BA方程解的情况。

表 2.1 自旋 1/2 相互作用费米气体 BA 方程解的情况

	基态（零温）	有限温度
S=1/2 费米系统 (排斥)	N 个实数 k M 个实数 Λ	N 个实数 k M_n 个 n -弦解 $\Lambda_\alpha^{n,l}$ 且满足 $M = \prod_{n=1}^{\infty} nM_n$
S=1/2 费米系统 (吸引)	$2M$ 个共轭复数 $k_\alpha^{1,2}$ $N-2M$ 个实数 k M 个实数 Λ	$2M'$ 个共轭复数 $k_\alpha^{1,2}$, $N-2M'$ 个实数 k M_n 个 n -弦解 $\Lambda_\alpha^{n,l}$, M' 个实数 Λ 且满足 $M = M' + \prod_{n=1}^{\infty} nM_n$

正是由于弦解的出现，使得我们在利用BA方程时要从系统是否处于基态和粒子间 δ 相互作用是排斥还是吸引两个方面来考虑。在此基础上，本章严格推导了系统在有限温度下的TBA方程。

2.1 排斥相互作用费米气体 TBA 方程

在绪论中，Gaudin-Yang 模型已经给出了反映系统本征能量、且由一系列方程组构成的 BA 方程 (1.7) 和 (1.8)，基于这一结论，我们将借助 Yang-Yang 热动力学方法严格推导一维两分量费米气体的 TBA 方程。

2.1.1 排斥相互作用费米气体考虑弦解后的 BA 方程

对于为排斥相互作用的情形，有限温度情况下 BA 方程的动量解均为实数，而快度解为 n -弦解^[35]。所谓 n -弦解，即快度可以表示为 $\Lambda_\alpha^{n,l} = \Lambda_\alpha^n + i(n+1-2l)c'$ ，其中 $c' = c/2$ ， $l = 1, \dots, n$ ， $\alpha = 1, \dots, M_n$ 。这一形式直观地告诉我们，长度为 n 的弦解的实部为 Λ_α^n ，虚部是因式 ic' 的整数倍，其个数满足关系 $M = \sum_n nM_n$ 。当两粒子间相互作用强度 $c \rightarrow \infty$

(强相互作用)时,则会出现 1-弦解的结果,这也是一种特殊的极限情况。而对于更为一般的有限相互作用强度 c 的情形,其存在 n -弦解时系统的 BA 方程则会在(1.7)和(1.8)的基础上有所变化。

首先,对于方程(1.7),将其中的快度变为 n -弦解形式后变为

$$e^{ik_j L} = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{l=1}^n \prod_{\alpha=1}^{M_n} \frac{k_j - (\Lambda_{\alpha}^n + i(n+1-2l)c') + ic'}{k_j - (\Lambda_{\alpha}^n + i(n+1-2l)c') - ic'} \quad (2.1)$$

对于右式中的连乘号 $\prod_{l=1}^n$ 将其分别作用在分式的分子分母上,对于分子中 l 取值从 1 开始至 n ,而分母中 l 取值从 0 开始至 $n-1$ 。这样最终分式的分子会留下 $l=n$ 的项 $k_j - \Lambda_{\alpha}^n + inc'$,同时分母会留下 $l=0$ 的项 $k_j - \Lambda_{\alpha}^n - inc'$ 。(2.1)也相应变为

$$e^{ik_j L} = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^{M_n} \frac{k_j - \Lambda_{\alpha}^n + inc'}{k_j - \Lambda_{\alpha}^n - inc'} \quad (2.2)$$

在定义函数

$$e(x) = \frac{x+i}{x-i} \quad (2.3)$$

后,上式可以重新表示为

$$e^{ik_j L} = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^{M_n} e\left(\frac{k_j - \Lambda_{\alpha}^n}{nc'}\right) \quad (2.4)$$

其次,对于方程(1.8),等式左边中的快度变为指标为 α, n, l 的弦解形式,而等式右边为了避免重复引入一组指标 β, m, k ,两个快度分别为 $\Lambda_{\alpha}^{n,l}$ 和 $\Lambda_{\beta}^{m,k}$,方程(1.5)变为

$$-\prod_{l=1}^n \prod_{j=1}^N \frac{k_j - \Lambda_{\alpha}^{n,l} - ic'}{k_j - \Lambda_{\alpha}^{n,l} + ic'} = \prod_{l=1}^n \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_{\alpha}^{n,l} - \Lambda_{\beta}^{m,k} + ic}{\Lambda_{\alpha}^{n,l} - \Lambda_{\beta}^{m,k} - ic} \quad (2.5)$$

等式左边可以按照(2.1)式中的方法,将弦解 $\Lambda_{\alpha}^{n,l}$ 的具体形式代入其中,并将连乘号 $\prod_{l=1}^n$ 分别作用在分式的分子分母上后,最终分式的分子会留下 $l=0$ 的项 $k_j - \Lambda_{\alpha}^n - inc'$,同时分母会留下 $l=n$ 的项 $k_j - \Lambda_{\alpha}^n + inc'$,即左式会变为

$$-\prod_{j=1}^N \frac{k_j - \Lambda_{\alpha}^n - inc'}{k_j - \Lambda_{\alpha}^n + inc'} \quad (2.6)$$

将其表示为含有函数 $e(x)$ 的形式,即

$$-\prod_{j=1}^N e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - k_j}{nc'}\right) \quad (2.7)$$

而对于(2.5)的右式,将弦解 $\Lambda_{\alpha}^{n,l}$ 和 $\Lambda_{\beta}^{m,k}$ 的具体形式代入其中

$$\prod_{l=1}^n \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m+2k-2l+2)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m+2k-2l-2)c'} \quad (2.8)$$

对于其中的两个连乘号 $\prod_{l=1}^n$ 和 $\prod_{m=1}^k$ ，首先将 $\prod_{m=1}^k$ 分别作用于分式的分子分母，且分子中 k 取值从 3 开始至 $m+2$ ，而分母中 k 取值从 1 开始至 m 。这样最终分式的分子会留下 $k=m+1$ 和 $k=m+2$ 两项相乘，即 $[\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l)c'] [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l+2)c']$ ，同时分母会留下 $k=1$ 和 $k=2$ 两项相乘，即 $[\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c'] [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l+2)c']$ 。故 (2.6) 可以变为

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} \prod_{l=1}^n \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c'} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l+2)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l+2)c'} \quad (2.9)$$

然后将 $\prod_{l=1}^n$ 分配到两个相乘因式中，且第一个分式中 l 取值从 1 开始至 n ，而第二个分式中即 l 取值从 0 开始至 $n-1$ ，即

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} \prod_{l=1}^n \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c'} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c'} \quad (2.10)$$

提出含 $\prod_{l=1}^n$ 与含 $\prod_{l=0}^{n-1}$ 两分式中的公共部分，即含 $\prod_{l=1}^{n-1}$ 的项，则第一个分式中留下 $l=n$ 的项，而第二个分式中留下 $l=0$ 的项，即

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n+m)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m)c'} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m)c'} \\ & \times \left(\prod_{l=1}^{n-1} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2l)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c'} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

由于 $\prod_{l=1}^{n-1} [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c']$ 可以表示为 $l=1, 2, \dots, n-1$ 时各式的乘积，即

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2)c'] [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-4)c'] \times \dots \\ & \times [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m+4)c'] [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m+2)c'] \end{aligned} \quad (2.12)$$

而 $\prod_{l=1}^{n-1} [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m+2l)c']$ 也可以表示为

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m+2)c'] [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m+4)c'] \times \dots \\ & \times [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-4)c'] [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n+m-2)c'] \end{aligned} \quad (2.13)$$

观察上述两式，可以发现它与 (2.12) 相等，即

$$\prod_{l=1}^{n-1} [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(n-m-2l)c'] = \prod_{l=1}^{n-1} [\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(-n-m+2l)c'] \quad (2.14)$$

因此 (2.11) 可以变为

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(m-n)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m - i(m-n)c'} \frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(m+n)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m - i(m+n)c'} \times \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m + i(m+n-2l)c'}{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m - i(m+n-2l)c'} \right)^2 \quad (2.15)$$

若将其换为含有函数 $e(x)$ 的形式，则表示为

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(m-n)c'}\right) \prod_{l=1}^{n-1} e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(m+n-2l)c'}\right) e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(m+n)c'}\right) \quad (2.16)$$

在此考虑 m 与 n 的相对大小，若 $m < n$ ，将第二项连乘表示为 $l = n-1, \dots, m+1, m-1, \dots, 1$ 时的项的乘积，即

$$e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{-|n-m|c'}\right) e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(-|n-m|+2)c'}\right) \cdots e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(|n-m|-2)c'}\right) e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(|n-m|)c'}\right) \times e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(|n-m|+2)c'}\right) \cdots e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(n-m-2)c'}\right) e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(n+m)c'}\right) \quad (2.17)$$

若 $|n-m|$ 为奇数，第一行共有 $|n-m|+1$ （偶数）项，即 $-|n-m|, -|n-m|+2, \dots, -1, 1, \dots, |n-m|-2, |n-m|$ 各自所对应的项。由于关系 $e(x/nc)e(-x/nc)=1$ ，所以两两抵消之后，留下 $e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{|n-m|c'}\right)$ 这一项；若 $|n-m|$ 为偶数，第一行则共有 $|n-m|+1$ （奇数）项，即 $-|n-m|, -|n-m|+2, \dots, -2, 0, 2, \dots, |n-m|-2, |n-m|$ 分别对应的项。对于中间项 0，会有 $e(x)=1$ ，剩余的项两两抵消，最终结果中仍只留下 $e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{|n-m|c'}\right)$ 这一项。同时， $|n-m|$ 意味这一结果对于 $m > n$ 时同样成立。所以，无论 m 与 n 的相对大小如何，(2.17) 式都可以等效化简为

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{|n-m|c'}\right) e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(|n-m|+2)c'}\right) \times \cdots \times e^2\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(n+m-2)c'}\right) e\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{(n+m)c'}\right) \quad (2.18)$$

若引入关于函数 $e(x)$ 的复合函数 $E_{nm}(x)$

$$E_{nm}(x) = \begin{cases} e\left(\frac{x}{|n-m|}\right) e^2\left(\frac{x}{|n-m|+2}\right) \cdots e^2\left(\frac{x}{n+m-2}\right) e\left(\frac{x}{n+m}\right), & n \neq m \\ e^2\left(\frac{x}{2}\right) e^2\left(\frac{x}{4}\right) \cdots e^2\left(\frac{x}{2n-2}\right) e\left(\frac{x}{2n}\right), & n = m \end{cases} \quad (2.19)$$

则 (2.18) 可以进一步变形为 $\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} E_{nm}\left(\frac{\Lambda_{\alpha}^n - \Lambda_{\beta}^m}{c'}\right)$ ，结合 (2.5) 式中左式的结果 (2.7)，(2.5) 可以重新表示为

$$-\prod_{j=1}^N e\left(\frac{\Lambda_\alpha^n - k_j}{nc'}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} E_{nm}\left(\frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m}{c'}\right) \quad (2.20)$$

此式与 (2.4) ^[35] 共同构成了严格推导有限温度下排斥相互作用费米气体 TBA 方程的出发点。

2.1.2 推导排斥相互作用费米气体 TBA 方程

在对 (2.4) 和 (2.20) 取对数之前，我们先简单讨论一下函数 $e(x)$ 的对数形式。首先定义一组三角函数

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2.21)$$

进而可以得到

$$\phi = \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad (2.22)$$

根据 (2.3)，可以将函数 $e(x)$ 重新表示为

$$e(x) = \frac{\cos \phi + i \sin \phi}{\cos \phi - i \sin \phi} = e^{2i\phi} \quad (2.23)$$

对其等式两边同取对数，并结合 (2.22)，则可以得到

$$\ln e(x) = i\pi - i\theta(x) \quad (2.24)$$

其中 $\theta(x) = 2 \arctan x$ 。由于 (2.4) 和 (2.20) 均包含函数 $e(x)$ ，对其取对数时需要借助 (2.26)。对于 (2.4) 取等式两边对数后同时消去因子 i ，会有

$$k_j L = 2\pi I_j - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{M_n} \theta\left(\frac{k_j - \Lambda_\alpha^n}{nc'}\right) \quad (2.25)$$

其中动量量子数 I_j ，当 $M = \sum_n nM_n$ 为奇数时 I_j 为半整数，当 $M = \sum_n nM_n$ 为偶数时 I_j 为整数。而对于 (2.20)，取完对数之后结果为

$$\sum_{j=1}^N \ln e\left(\frac{\Lambda_\alpha^n - k_j}{nc'}\right) = i\pi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \ln E_{nm}\left(\frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m}{c'}\right) \quad (2.26)$$

借鉴 (2.19) 以及 (2.24)，当 $n \neq m$ 时

$$\begin{aligned} \ln E_{nm}(x) = & i\pi 2 \min(n, m) - i \left[\theta\left(\frac{x}{|n-m|}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{|n-m|+2}\right) + \dots \right. \\ & \left. + 2\theta\left(\frac{x}{n+m-2}\right) + \theta\left(\frac{x}{n+m}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

其中每一个对数贡献一个因式 $i\pi$ ，所以共有 $2 \min(n, m)$ 个因式 $i\pi$ 。而当 $n = m$ 时

$\ln E_{nm}(x)$ 变为

$$\ln E_{nm}(x) = i\pi(2n-1) - i \left[2\theta\left(\frac{x}{2}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots + 2\theta\left(\frac{x}{2n-2}\right) + \theta\left(\frac{x}{2n}\right) \right] \quad (2.28)$$

因式 $i\pi$ 的总个数为 $(2n-1)$ 。定义 $t_{nm} = 2\min(n, m) - \delta_{nm}$ 以及函数

$$\Theta_{nm}(x) = \begin{cases} \theta\left(\frac{x}{|n-m|}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{|n-m|+2}\right) + \cdots + 2\theta\left(\frac{x}{n+m-2}\right) + \theta\left(\frac{x}{n+m}\right), & n \neq m \\ 2\theta\left(\frac{x}{2}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots + 2\theta\left(\frac{x}{2n-2}\right) + \theta\left(\frac{x}{2n}\right), & n = m \end{cases} \quad (2.29)$$

会有

$$\ln E_{nm}(x) = i\pi t_{nm} - i\Theta_{nm}(x) \quad (2.30)$$

同时, (2.26) 式可以变为

$$\sum_{j=1}^N \theta\left(\frac{\Lambda_\alpha^n - k_j}{nc'}\right) = 2\pi J_\alpha^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \Theta_{nm}\left(\frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m}{c'}\right) \quad (2.31)$$

其中快度量子数 $J_\alpha^n = (N-1 - \sum_{m=1}^{M_m} t_{nm} M_m)$, 其取值由 $(N-1 - M_n)/2$ 决定, 当 $N - M_n$ 为奇数时 J_α^n 为整数, 而当 $N - M_n$ 为偶数时 J_α^n 为半整数。

当考虑热力学极限, 即系统总粒子数 N 、自旋朝下的粒子数 M (系统中占少数的粒子) 和一维系统的线度 L 满足 $N, M, L \rightarrow \infty$ 但 $N/L, M/L$ 是有限值, (2.31) 中的求和符号可以化为积分符号, 这一过程体现的物理意义是在无限大系统中, 动量、快度可以被视为连续变量。因此, 引入满足关系 $Lh(k) = 2\pi I$ 和 $Lj_n(\Lambda^n) = 2\pi J_n$ 的单调递增连续函数 $h(k)$ 和 $j_n(\Lambda^n)$ 之后, (2.25) 和 (2.31) 可以变为

$$k = h(k) - \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{M_m} \theta\left(\frac{k - \Lambda_\alpha^n}{nc'}\right) \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \theta\left(\frac{\Lambda^n - k_j}{nc'}\right) = j_n(\Lambda^n) + \frac{1}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \Theta_{nm}\left(\frac{\Lambda^n - \Lambda_\beta^m}{nc'}\right)$$

在无限大系统中, 假设粒子动量和快度的密度函数为 $\rho(k)$ 、 $\sigma_n(\Lambda^n)$, 与之相应的空穴密度函数为 $\rho^h(k)$ 和 $\sigma_n^h(\Lambda^n)$, 它们满足

$$\frac{dh(k)}{dk} = 2\pi(\rho(k) + \rho^h(k)) \quad (2.33)$$

$$\frac{dj_n(\Lambda^n)}{d\Lambda^n} = 2\pi(\sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n))$$

如此 (2.32) 可以变为

$$\begin{aligned} h(k) &= k + \sum_{n=1}^{\infty} \int \theta \left(\frac{k - \Lambda^n}{nc'} \right) \sigma_n(\Lambda^n) d\Lambda^n \\ j_n(\Lambda^n) &= \int \theta \left(\frac{\Lambda^n - k}{nc'} \right) \rho(k) dk - \sum_{m=1}^{\infty} \int \Theta_{nm} \left(\frac{\Lambda^n - \Lambda^m}{c'} \right) \sigma_m(\Lambda^m) d\Lambda^m \end{aligned} \quad (2.34)$$

对上式分别求 k 和 Λ^n 的导数并结合 (2.33), 会有

$$\begin{aligned} \rho(k) + \rho^h(k) &= \frac{1}{2\pi} \left(k + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{\partial}{\partial k} \theta \left(\frac{k - \Lambda^n}{nc'} \right) \sigma_n(\Lambda^n) d\Lambda^n \right) \\ \sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int \frac{\partial}{\partial \Lambda^n} \theta \left(\frac{\Lambda^n - k}{nc'} \right) \rho(k) dk \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \int \frac{\partial}{\partial \Lambda^n} \Theta_{nm} \left(\frac{\Lambda^n - \Lambda^m}{c'} \right) \sigma_m(\Lambda^m) d\Lambda^m \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

由于 $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$, 故

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \Lambda^n} \theta \left(\frac{\Lambda^n - k}{nc'} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{n|c'|}{(nc')^2 + (\Lambda^n - k)^2} \quad (2.36)$$

若定义函数

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{nc'}{(nc')^2 + x^2} \quad (2.37)$$

则会有

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \Lambda^n} \theta \left(\frac{\Lambda^n - k}{nc'} \right) = a_n(\Lambda^n - k) \quad (2.38)$$

同时 $\partial \Theta_{nm}((\Lambda^n - \Lambda^m)/c') / \partial \Lambda^n = T_{nm}(\Lambda^n - \Lambda^m)$, 其中

$$T_{nm}(x) = \begin{cases} a_{|n-m|}(x) + 2a_{|n-m|+2}(x) + \cdots + 2a_{n+m-2}(x) + a_{n+m}(x), & n \neq m \\ 2a_2(x) + 2a_4(x) + \cdots + 2a_{2n-2}(x) + a_{2n}(x), & n = m \end{cases} \quad (2.39)$$

式 (2.35) 因此也可以表示为

$$\begin{aligned} \rho(k) + \rho^h(k) &= \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n(k - \Lambda^n) \sigma_n(\Lambda^n) d\Lambda^n \\ \sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n) &= \int a_n(\Lambda^n - k) \rho(k) dk \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \int T_{nm}(\Lambda^n - \Lambda^m) \sigma_m(\Lambda^m) d\Lambda^m \end{aligned} \quad (2.40)$$

为了是这一结果更为简洁, 我们需要借用高等数学上卷积的定义^[36]: 若已知函数 $f_1(t), f_2(t)$, 则积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ 称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积, 记为 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

根据其定义，可以证明对于所有 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都存在积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ ，且随着 x 的不同取值，由这一积分可以定义一个新函数 $h(x) = (f * g)(x)$ ，它仍为一个可积函数且满足对易性 $(g * f)(x) = (f * g)(x)$ ，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \quad (2.41)$$

因此 (2.40) 可以重新表示为

$$\begin{aligned} \rho(k) + \rho^h(k) &= \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sigma_n(k) \\ \sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n) &= a_n * \rho(\Lambda^n) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \sigma_m(\Lambda^n) \end{aligned} \quad (2.42)$$

系统单位长度的能量 E 、粒子数 N 、磁化强度 M 以及熵 S 可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{E}{L} &= \int k^2 \rho(k) dk & \frac{N}{L} &= \int \rho(k) dk & \frac{M}{L} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \int \sigma_n(k) dk \\ \frac{S}{L} &= \int \left[(\rho + \rho^h) \ln(\rho + \rho^h) - \rho \ln \rho - \rho^h \ln \rho^h \right] dk \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int \left[(\sigma_n + \sigma_n^h) \ln(\sigma_n + \sigma_n^h) - \sigma_n \ln \sigma_n - \sigma_n^h \ln \sigma_n^h \right] dk \end{aligned} \quad (2.43)$$

其中系统的熵 S 可以从统计学角度出发进行化简，微元 $[k, k + dk]$ 内系统微观状态数为

$$dW = C_{L(\rho+\rho^h)dk}^{L\rho dk} \prod_{n=1}^{\infty} C_{L(\sigma_n+\sigma_n^h)dk}^{L\sigma_n dk} = \frac{[L(\rho + \rho^h)dk]! [L(\sigma_n + \sigma_n^h)dk]!}{[L\rho dk]! [L\rho^h dk]! [L\sigma_n dk]! [L\sigma_n^h dk]!} \quad (2.44)$$

利用玻尔兹曼关系 $dS = \ln dW$ ，可以得到

$$\begin{aligned} dS &= \ln [L(\rho + \rho^h)dk]! - \ln(L\rho dk)! - \ln(L\rho^h dk)! \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln [L(\sigma_n + \sigma_n^h)dk]! - \ln(L\sigma_n dk)! - \ln(L\sigma_n^h dk)! \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

利用近似 $\ln(n!) = n \ln n - n$ ，以上式第一行为例，提出共同因子 L 后可以化为

$$[(\rho + \rho^h)dk] \ln [L(\rho + \rho^h)dk] - (\rho dk) \ln(L\rho dk) - (\rho^h dk) \ln(L\rho^h dk) \quad (2.46)$$

将其中加入一项 $(\rho dk) \ln(L\rho^h dk)$ 并减去一项 $(\rho dk) \ln(L\rho^h dk)$ ，这样可以在得到

$$[(\rho + \rho^h)dk] \ln [L(\rho + \rho^h)dk] - (\rho dk) \ln \frac{\rho}{\rho^h} - [(\rho^h + \rho)dk] \ln(L\rho^h dk) \quad (2.47)$$

合并同类项之后可得

$$dk \left[(\rho + \rho^h) \ln(\rho + \rho^h) - \rho \ln \rho - \rho^h \ln \rho^h \right] \quad (2.48)$$

类似地，(2.47) 中第二行也可以作上述变形。根据这一结果，单位长度的熵即可表示出来，正如 (2.43) 中第四个表达式所示。

对于处于外磁场 H 、且费米化学势为 μ 的费米系统，其单位长度的吉布斯自由能为

$$G = \frac{E}{L} - \mu \frac{N}{L} - T \frac{S}{L} - H \frac{M^z}{L} \quad (2.49)$$

其中 M^z 为系统在外磁场中的磁化强度，其与自旋向上、向下费米子数目的关系为 $M^z = (N_\uparrow - N_\downarrow)/2 = (N - 2M)/2$ 。当系统处于平衡态时，系统自由能取最小值，即 $\delta G = 0$ ，即

$$0 = \frac{\delta E}{L} - \left(\mu + \frac{H}{2} \right) \frac{\delta N}{L} + H \frac{\delta M}{L} - T \frac{\delta S}{L} \quad (2.50)$$

利用这一条件时需要分别求出 (2.50) 中各物理量的变分形式 $\delta E(\delta N, \delta S, \delta M)$ ，即

$$\frac{\delta E}{L} = \int k^2 \delta \rho(k) dk \quad \frac{\delta N}{L} = \int \delta \rho(k) dk \quad \frac{\delta M}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} n \int \delta \sigma_n(k) dk \quad (2.51)$$

熵的变分 δS 则要复杂一点，根据 (2.43) 中单位长度熵的表达式，依据变分公式

$$\frac{\delta S}{L} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial S}{\partial \rho^h} \delta \rho^h + \frac{\partial S}{\partial \sigma_n} \delta \sigma_n + \frac{\partial S}{\partial \sigma_n^h} \delta \sigma_n^h \right) \quad (2.52)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{L} = & \int \left(\left(\ln \frac{\rho + \rho^h}{\rho} \right) \delta \rho + \ln \left(\frac{\rho + \rho^h}{\rho^h} \right) \delta \rho^h \right) dk \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\left(\ln \frac{\sigma_n + \sigma_n^h}{\sigma_n} \right) \delta \sigma_n + \left(\ln \frac{\sigma_n + \sigma_n^h}{\sigma_n^h} \right) \delta \sigma_n^h \right) dk \end{aligned} \quad (2.53)$$

将 (2.51) 和 (2.53) 代入自由能最小化条件 (2.50)，可以得到

$$\begin{aligned} 0 = & \int \left(k^2 - \mu - \frac{H}{2} \right) \delta \rho dk - T \int \left(\ln \left(1 + \frac{\rho^h}{\rho} \right) \delta \rho + \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) \delta \rho^h \right) dk \\ & - T \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\ln \left(1 + \frac{\sigma_n^h}{\sigma_n} \right) \delta \sigma_n + \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \delta \sigma_n^h \right) dk + \sum_{n=1}^{\infty} n H \int \delta \sigma_n dk \end{aligned} \quad (2.54)$$

再结合 (2.42) 的变分形式

$$\begin{aligned}\delta\rho^h(k) &= -\delta\rho(k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \delta\sigma_n(k) \\ \delta\sigma_n^h(\Lambda^n) &= -\delta\sigma_n(\Lambda^n) + a_n * \delta\rho(\Lambda^n) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta\sigma_m(\Lambda^n)\end{aligned}\quad (2.55)$$

将这一关系代入 (2.54)，可以得到

$$\begin{aligned}0 &= \int \left(k^2 - \mu - \frac{H}{2} \right) \delta\rho dk + \sum_{n=1}^{\infty} nH \int \delta\sigma_n dk \\ &- T \int \left(\ln \left(1 + \frac{\rho^h}{\rho} \right) \delta\rho + \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) \left(-\delta\rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \delta\sigma_n \right) \right) dk \\ &- T \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\ln \left(1 + \frac{\sigma_n^h}{\sigma_n} \right) \delta\sigma_n + \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \left(-\delta\sigma_n + a_n * \delta\rho - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta\sigma_m \right) \right) dk\end{aligned}\quad (2.56)$$

首先计算其中的积分 $\int \ln(1 + \rho/\rho^h) a_n * \delta\sigma_n dk$ ，利用卷积的对易性 (2.41)，可以将其转化为积分 $\int a_n * \ln(1 + \rho/\rho^h) \delta\sigma_n dk$ 。类似地，还会有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) a_n * \delta\rho dk &= \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \delta\rho dk \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta\sigma_m dk &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int T_{nm} * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \delta\sigma_m dk\end{aligned}\quad (2.57)$$

对其中第二个表达式互换指标 n 和 m ，会变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int T_{nm} * \ln \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_m^h} \right) \delta\sigma_n dk\quad (2.58)$$

将上述两式代入 (2.56)，由关于 $\delta\rho$ 和 $\delta\sigma_n$ 的系数分别为零可以得到

$$\begin{aligned}k^2 - \mu - \frac{H}{2} - T \ln \frac{\rho^h}{\rho} - T \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) &= 0 \\ nH - T \ln \frac{\sigma_n^h}{\sigma_n} - T a_n * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) + T \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_m^h} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2.59)$$

若分别定义动量、快度的空穴密度函数与粒子密度函数的比值为

$$\begin{aligned}\rho^h(k) / \rho(k) &= \exp(\varepsilon(k)/T) \\ \sigma_n^h(\Lambda^n) / \sigma_n(\Lambda^n) &= \exp(\phi_n(\Lambda^n)/T)\end{aligned}\quad (2.60)$$

那么上述两个方程即可化为热力学 BA 方程，也称 TBA 方程^[37,38]，即

$$\begin{aligned}\varepsilon(k) &= k^2 - \mu - \frac{H}{2} - T \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln(1 + \exp(-\phi_n(k)/T)) \\ \phi_n(\Lambda^n) &= nH - T a_n * \ln(1 + \exp(-\varepsilon(\Lambda^n)/T)) + T \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln(1 + \exp(-\phi_m(\Lambda^n)/T))\end{aligned}\quad (2.61)$$

其中第一个方程描述了费米海能量，第二个方程则反映了与系统内禀自由度——自旋相关的信息。根据这一方程我们可以判断在所谓能量“费米海”中占据自旋向下态的粒子数量。

与此同时，系统压强也是讨论热力学性质时一个不可或缺的物理量。由热力学公式可知，一维系统中，其压强可以表示为单位长度的吉布斯自由能，即 $p = -G/L$ 。借助 (2.43 和 (2.49) 可以得到

$$p = \frac{T}{2\pi} \int \ln(1 + \exp(-\varepsilon(k)/T)) dk \quad (2.62)$$

这一结果与玻色系统的压强公式极为相似。在研究费米系统的热力学问题时，经常同时用到 (2.61) 和 (2.62)，尤其在迭代法讨论 TBA 方程的解时，二者间的交叉使用更为频繁。

2.2 吸引相互作用费米气体 TBA 方程

从 BA 方程 (1.7) 和 (1.8) 到 TBA 方程^[39,40]方法，与排斥相互作用下的情形基本类似。首先也要考虑在这一条件下系统考虑复数解后的 BA 方程形式。

2.2.1 吸引相互作用费米气体考虑弦解后的 BA 方程

由表 2.1 可知，在吸引相互作用下，对于系统基态，每一个快度均会伴随一对共轭的复数动量 $k_\alpha^{1,2} = \Lambda_\alpha \pm i|c'|$ ，其微观效应即一个自旋向上费米子与一个自旋向下费米子配对形成束缚对。因此 $\{\Lambda_\alpha\}$ 构成复数动量的实部，而剩余实数动量 k 的个数为 $N - 2M$ 。

而对于有限温度下的系统，将会出现不同时伴随一对共轭复数动量解 k 的快度 Λ ，这些快度与排斥相互作用下快度的行为类似，会形成弦解，即

$$\begin{aligned} k_\alpha^{1,2} &= \Lambda_\alpha \pm i|c'|, (\alpha = 1, 2, \dots, M') \\ \Lambda_\alpha^{n,l} &= \Lambda_\alpha^n + i(n+1-2l)|c'|, (l = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, M_n) \end{aligned} \quad (2.63)$$

同时， M 、 M' 和 M_n 三者之间满足关系 $M = M' + \sum_{n=1}^{\infty} nM_n$ 。这一关系表明快度可以分为两部分，其中一部分是实数，作为复数动量的实部出现；而另一部分则以快度的弦解形式出现。

由于考虑 $c < 0$ ，在 BA 方程 (1.7) 和 (1.8) 中，要将其中的 c 变换为 $-|c|$ (c' 也变换为 $-|c'|$)，所以 (1.7) 和 (1.8) 会变为

$$\exp(ik_j L) = \prod_{\beta=1}^M \frac{k_j - \Lambda_\beta - i|c'|}{k_j - \Lambda_\beta + i|c'|} \quad (2.64)$$

$$-\prod_{j=1}^N \frac{k_j - \Lambda_\alpha + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha - i|c'|} = \prod_{\beta=1}^M \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta + i|c'|} \quad (2.65)$$

式中连乘符号 $\prod_{j=1}^N, \prod_{\beta=1}^M$ 提醒我们要将其所有实数和复数解的形式都考虑进来，所以下面将从四种情形来讨论。

1) 首先考虑 (2.63) 动量 k 为复数，这意味着

$$\exp(ik_\alpha^1 L) = \prod_{\beta=1}^M \frac{k_\alpha^1 - \Lambda_\beta - i|c'|}{k_\alpha^1 - \Lambda_\beta + i|c'|}, \quad \exp(ik_\alpha^2 L) = \prod_{\beta=1}^M \frac{k_\alpha^2 - \Lambda_\beta - i|c'|}{k_\alpha^2 - \Lambda_\beta + i|c'|}$$

两式等号左右分别相乘，并将 $k_\alpha^{1,2}$ 的具体形式 (2.65) 代入其中可以得到

$$\exp(i(k_\alpha^1 + k_\alpha^2)L) = \prod_{\beta=1}^M \left(\frac{\Lambda_\alpha + i|c'| - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha + i|c'| - \Lambda_\beta + i|c'|} \frac{\Lambda_\alpha - i|c'| - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha - i|c'| - \Lambda_\beta + i|c'|} \right) \quad (2.66)$$

其中 $\prod_{\beta=1}^M$ 中包含实数解 Λ_β 和复数解 $\Lambda_\beta^{m,k}$ ，即

$$\begin{aligned} & \prod_{\beta=1}^{M'} \left(\frac{\Lambda_\alpha + i|c'| - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha + i|c'| - \Lambda_\beta + i|c'|} \frac{\Lambda_\alpha - i|c'| - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha - i|c'| - \Lambda_\beta + i|c'|} \right) \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \left(\frac{\Lambda_\alpha + i|c'| - \Lambda_\beta^{m,k} - i|c'|}{\Lambda_\alpha + i|c'| - \Lambda_\beta^{m,k} + i|c'|} \frac{\Lambda_\alpha - i|c'| - \Lambda_\beta^{m,k} - i|c'|}{\Lambda_\alpha - i|c'| - \Lambda_\beta^{m,k} + i|c'|} \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

故 (2.66) 式可以变形为

$$\exp(i2\Lambda_\alpha L) = \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta - i2|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta + i2|c'|} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta^{m,k} - i2|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta^{m,k} + i2|c'|} \quad (2.68)$$

2) 其次考虑 (2.65) 中 Λ_α 为实数。由于等式两边同时含有连乘符号，所以要考虑两种动量、两种快度，即

$$\begin{aligned} & -\prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - \Lambda_\alpha + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha - i|c'|} \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{\Lambda_\beta + i|c'| - \Lambda_\alpha + i|c'|}{\Lambda_\beta + i|c'| - \Lambda_\alpha - i|c'|} \frac{\Lambda_\beta - i|c'| - \Lambda_\alpha + i|c'|}{\Lambda_\beta - i|c'| - \Lambda_\alpha - i|c'|} \\ & = \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta + i|c'|} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta^{m,k} - i2|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta^{m,k} + i2|c'|} \end{aligned} \quad (2.69)$$

左式中第二项化简后与右式第一项相同，将其消去之后 (2.69) 变为

$$-\prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - \Lambda_\alpha + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha - i|c'|} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta^{m,k} - i2|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta^{m,k} + i2|c'|} \quad (2.70)$$

将这一结果代入 (2.68) 可以成功消除含有有弦解的项，得到

$$\exp(i2\Lambda_\alpha L) = -\prod_{\beta=1}^{M'} \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta - i2|c'|}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta + i2|c'|} \prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - \Lambda_\alpha + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha - i|c'|} \quad (2.71)$$

这一结果相比 (2.69) 更为简洁明了。其另一种表示为

$$\exp(i2\Lambda_\alpha L) = -\prod_{\beta=1}^{M'} e\left(\frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta}{-|c'|}\right) \prod_{j=1}^{N-2M'} e\left(\frac{k_j - \Lambda_\alpha}{|c'|}\right) \quad (2.72)$$

3) 再次考虑 (2.64) 中动量 k 为实数, 即

$$\exp(ik_j L) = \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{k_j - \Lambda_\beta - i|c'|}{k_j - \Lambda_\beta + i|c'|} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{k_j - \Lambda_\beta^{m,k} - i|c'|}{k_j - \Lambda_\beta^{m,k} + i|c'|} \quad (2.73)$$

对于右式第二项, 将 $\Lambda_\beta^{m,k}$ 的形式代入其中会有

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{k_j - (\Lambda_\beta^m + i(m+1-2k)|c'|) - i|c'|}{k_j - (\Lambda_\beta^m + i(m+1-2k)|c'|) + i|c'|} \quad (2.74)$$

将 $\prod_{k=1}^m$ 分别作用在分式的分子分母, 且分子中 k 取值从 0 开始至 $m-1$, 而分母中 k 取值从 1 开始至 m 。这样最终分式的分子会留下 $k=0$ 的项 $k_j - \Lambda_\beta^m - imc'$, 同时分母会留下 $k=m$ 的项 $k_j - \Lambda_\beta^m + imc'$ 。(2.73) 会变为

$$\exp(ik_j L) = \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{k_j - \Lambda_\beta - i|c'|}{k_j - \Lambda_\beta + i|c'|} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{k_j - \Lambda_\beta^m - im|c'|}{k_j - \Lambda_\beta^m + im|c'|} \quad (2.75)$$

其另一种表示为

$$\exp(ik_j L) = \prod_{\beta=1}^{M'} e\left(\frac{k_j - \Lambda_\beta}{-|c'|}\right) \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} e\left(\frac{k_j - \Lambda_\beta^m}{-m|c'|}\right) \quad (2.76)$$

4) 最后考虑 (2.65) 中 Λ_α 为弦解, 即等号左边的连乘号要包含两种动量, 同时等式右边的连乘号中也要包含两种快度, 故可以变为

$$\begin{aligned} & -\prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - \Lambda_\alpha^{n,l} + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha^{n,l} - i|c'|} \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{\Lambda_\beta + i|c'| - \Lambda_\alpha^{n,l} + i|c'|}{\Lambda_\beta + i|c'| - \Lambda_\alpha^{n,l} - i|c'|} \frac{\Lambda_\beta - i|c'| - \Lambda_\alpha^{n,l} + i|c'|}{\Lambda_\beta - i|c'| - \Lambda_\alpha^{n,l} - i|c'|} \\ & = \prod_{\beta=1}^{M'} \frac{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta - i|c'|}{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta + i|c'|} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta^{m,k} - i|c'|}{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta^{m,k} + i|c'|} \end{aligned} \quad (2.77)$$

对等号左边的第二项整理化简后可与右式中的第一项抵消, (2.77) 也相应地变为

$$-\prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - \Lambda_\alpha^{n,l} + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha^{n,l} - i|c'|} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta^{m,k} - i|c'|}{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta^{m,k} + i|c'|} \quad (2.78)$$

将方程的分子分母上下置换位置, 并且等号左右连边都添加对指标 l 的连乘号, 则可以

得到

$$-\prod_{l=1}^n \prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - \Lambda_\alpha^{n,l} + i|c'|}{k_j - \Lambda_\alpha^{n,l} - i|c'|} = \prod_{l=1}^n \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{k=1}^m \prod_{\beta=1}^{M_m} \frac{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta^{m,k} - i|c'|}{\Lambda_\alpha^{n,l} - \Lambda_\beta^{m,k} + i|c'|} \quad (2.79)$$

对于其左式，将弦解形式的快度 (2.65) 代入其中并进行化简可以变为

$$-\prod_{l=1}^n \prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{k_j - (\Lambda_\alpha^{n,l} + i(n+1-2l)|c'|) - i|c'|}{k_j - (\Lambda_\alpha^{n,l} + i(n+1-2l)|c'|) + i|c'|} \quad (2.80)$$

将连乘号 $\prod_{l=1}^{\infty}$ 分别作用在分式的分子分母上后， l 取值从 0 开始至 $n-1$ ，而分母中 l 取值从 1 开始至 n 。这样最终分式的分子会留下 $l=0$ 的项 $k_j - \Lambda_\alpha^n - inc'$ ，同时分母会留下 $l=n$ 的项 $k_j - \Lambda_\alpha^n + inc'$ 。若对其分子分母同时乘以因数 -1 ，则会变为

$$-\prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{\Lambda_\alpha^n - k_j + in|c'|}{\Lambda_\alpha^n - k_j - in|c'|} \quad (2.81)$$

而对于 (2.77) 的右式，将相应的弦解形式代入其中，会有

$$\prod_{l=1}^n \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} \prod_{k=1}^m \frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m + i(n-m+2k-2l+2)|c'|}{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m + i(n-m+2k-2l-2)|c'|} \quad (2.82)$$

其化简方式同 (2.8) 完全相同，其结果为 $\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} E_{nm} \left((\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m) / |c'| \right)$ 。(2.78) 式可以等效变为

$$-\prod_{j=1}^{N-2M'} \frac{\Lambda_\alpha^n - k_j + in|c'|}{\Lambda_\alpha^n - k_j - in|c'|} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} E_{nm} \left(\frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m}{|c'|} \right) \quad (2.83)$$

换种表示，即为

$$-\prod_{j=1}^{N-2M'} e \left(\frac{\Lambda_\alpha^n - k_j}{n|c'|} \right) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\beta=1}^{M_m} E_{nm} \left(\frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m}{|c'|} \right) \quad (2.84)$$

综上，它与 (2.72) 和 (2.76) 共同构成了吸引相互作用下费米气体考虑弦解后的 BA 方程。后文中对这一情形下 TBA 方程的严格推导也将从这一组方程出发。

2.2.2 推导吸引相互作用费米气体 TBA 方程

按照前文中推导 TBA 方程的方法，首先分别对 BA 方程 (2.72) (2.76) 和 (2.84) 取对数，借鉴排斥情形下的 (2.24) 式，(2.76) 取对数之后会有

$$k_j L = 2\pi I_j + \sum_{\beta=1}^{M'} \theta \left(\frac{k_j - \Lambda_\beta}{|c'|} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \theta \left(\frac{k_j - \Lambda_\beta^m}{m|c'|} \right) \quad (2.85)$$

其中对于 I_j ，当 $M = M' + \sum_m m M_m$ 为奇数时 I_j 为半整数，当 $M = M' + \sum_m m M_m$ 为偶数时 I_j 为整数。而 (2.74) 式取对数之后的结果为

$$2\Lambda_\alpha L = 2\pi J_\alpha + \sum_{\beta=1}^{M'} \theta \left(\frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta}{|c|} \right) + \sum_{j=1}^{N-2M'} \theta \left(\frac{\Lambda_\alpha - k_j}{|c|} \right) \quad (2.86)$$

对于 $J_\alpha = (N - M' + 1)/2$ ，当 $N - M'$ 为奇数时 J_α 为整数，而当 $N - M'$ 为偶数时 J_α 为半整数。与此同时，对 (2.84) 也取对数之后，会有

$$- \sum_{j=1}^{N-2M'} \theta \left(\frac{\Lambda_\alpha^n - k_j}{n|c|} \right) = 2\pi J_\alpha^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \Theta_{nm} \left(\frac{\Lambda_\alpha^n - \Lambda_\beta^m}{|c|} \right) \quad (2.87)$$

式中 $J_\alpha^n = (N - 2M' - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} M_m)/2$ ，当 $N - M_n$ 为奇数时 J_α^n 为整数，而当 $N - M_n$ 为偶数时 J_α^n 为半整数。函数 $\Theta_{nm}(x)$ 以及 t_{nm} 在 (2.29) 式中已经给出。

然后定义关于动量和快度的单调递增函数

$$h(k) = \frac{2\pi I}{L} \quad j(\Lambda) = \frac{2\pi J}{L} \quad j_n(\Lambda^n) = \frac{2\pi J^n}{L} \quad (2.88)$$

则将 (2.85) (2.86) (2.87) 均乘以因式 $1/L$ 后结合 (2.88)，会有

$$h(k) = k - \frac{1}{L} \left\{ \sum_{\beta=1}^{M'} \theta \left(\frac{k - \Lambda_\beta}{|c|} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \theta \left(\frac{k - \Lambda_\beta^m}{m|c|} \right) \right\} \quad (2.89)$$

$$j(\Lambda) = 2\Lambda - \frac{1}{L} \left\{ \sum_{\beta=1}^{M'} \theta \left(\frac{\Lambda - \Lambda_\beta}{|c|} \right) + \sum_{j=1}^{N-2M'} \theta \left(\frac{\Lambda - k_j}{|c|} \right) \right\} \quad (2.90)$$

$$j_n(\Lambda^n) = \frac{1}{L} \left\{ \sum_{j=1}^{N-2M'} \theta \left(\frac{\Lambda^n - k_j}{n|c|} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \Theta_{nm} \left(\frac{\Lambda^n - \Lambda_\beta^m}{|c|} \right) \right\} \quad (2.91)$$

当系统无限大时，动量 k 、快度 Λ 和 Λ^n 可以被视为连续变量。引入粒子-空穴假设，即设动量 k 、快度 Λ 和快度 Λ^n 的密度函数分别为 $\rho(k)$ 、 $\sigma(\Lambda)$ 、 $\sigma_n(\Lambda^n)$ ，与之相应的空穴密度函数为 $\rho^h(k)$ 、 $\sigma^h(\Lambda)$ 、 $\sigma_n^h(\Lambda^n)$ ，且它们与函数 $h(k)$ 、 $j(\Lambda)$ 、 $j_n(\Lambda^n)$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} \frac{dh(k)}{dk} &= 2\pi(\rho(k) + \rho^h(k)) \\ \frac{dj(\Lambda)}{d\Lambda} &= 2\pi(\sigma(\Lambda) + \sigma^h(\Lambda)) \\ \frac{dj_n(\Lambda^n)}{d\Lambda^n} &= 2\pi(\sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n)) \end{aligned} \quad (2.92)$$

将其代入 (2.89) (2.90) (2.91) 三式中, 会有

$$\rho(k) + \rho^h(k) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi L} \left\{ \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{\partial}{\partial k} \theta \left(\frac{k - \Lambda_\beta}{|c|} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \frac{\partial}{\partial k} \theta \left(\frac{k - \Lambda_\beta^m}{m|c|} \right) \right\} \quad (2.93)$$

$$\sigma(\Lambda) + \sigma^h(\Lambda) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi L} \left\{ \sum_{\beta=1}^{M'} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \theta \left(\frac{\Lambda - \Lambda_\beta}{|c|} \right) + \sum_{j=1}^{N-2M'} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \theta \left(\frac{\Lambda - k_j}{|c|} \right) \right\} \quad (2.94)$$

$$\sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n) = \frac{1}{2\pi L} \left\{ \sum_{j=1}^{N-2M'} \frac{\partial}{\partial \Lambda^n} \theta \left(\frac{\Lambda^n - k_j}{n|c|} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{M_m} \frac{\partial}{\partial \Lambda^n} \Theta_{nm} \left(\frac{\Lambda^n - \Lambda_\beta^m}{|c|} \right) \right\} \quad (2.95)$$

对于无限大系统, 式中求和符号经过变量连续化后可以化为积分形式。结合排斥情形下的结论 (2.38) 和 (2.39), 同时借助卷积的定义及函数 $a_n(x)$ 和 $T_{nm}(x)$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \rho(k) + \rho^h(k) &= \frac{1}{2\pi} - a_1 * \sigma(k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sigma_n(k) \\ \sigma(\Lambda) + \sigma^h(\Lambda) &= \frac{1}{\pi} - a_2 * \sigma(\Lambda) - a_1 * \rho(\Lambda) \\ \sigma_n(\Lambda^n) + \sigma_n^h(\Lambda^n) &= a_n * \rho(\Lambda^n) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \sigma_m(\Lambda^n) \end{aligned} \quad (2.96)$$

系统单位长度的能量 E 、粒子数 N 、磁化强度 M 以及熵 S 可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{N}{L} &= \int (\rho(k) + 2\sigma(k)) dk \\ \frac{M}{L} &= \int \left(\sigma(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(k) \right) dk \\ \frac{E}{L} &= \int \left(k^2 \rho(k) + 2(k^2 - |c|^2/4) \sigma(k) \right) dk \\ \frac{S}{L} &= \int \left((\rho + \rho^h) \ln(\rho + \rho^h) - \rho \ln \rho - \rho^h \ln \rho^h \right) dk \\ &\quad + \int \left((\sigma + \sigma^h) \ln(\sigma + \sigma^h) - \sigma \ln \sigma - \sigma^h \ln \sigma^h \right) dk \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int \left((\sigma_n + \sigma_n^h) \ln(\sigma_n + \sigma_n^h) - \sigma_n \ln \sigma_n - \sigma_n^h \ln \sigma_n^h \right) dk \end{aligned} \quad (2.97)$$

对于处于外磁场 H 、且费米化学势为 μ 的费米系统, 其单位长度吉布斯自由能为 (2.49) 当系统处于平衡态时, 系统自由能取最小值, 即为 (2.50)。利用这一条件时需要 (2.97) 的变分形式

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{L} &= \int (\delta \rho(k) + 2\delta \sigma(k)) dk & \frac{\delta M}{L} &= \int \left(\delta \sigma(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta \sigma_n(k) \right) dk \\ \frac{\delta E}{L} &= \int \left(k^2 \delta \rho(k) + 2(k^2 - |c|^2/4) \delta \sigma(k) \right) dk \end{aligned} \quad (2.98)$$

较为复杂的是单位长度熵的变分，依据 (2.52) 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{L} = & \int \left(\left(\ln \frac{\rho + \rho^h}{\rho} \right) \delta \rho + \ln \left(\frac{\rho + \rho^h}{\rho^h} \right) \delta \rho^h \right) dk \\ & + \int \left(\left(\ln \frac{\sigma + \sigma^h}{\sigma} \right) \delta \sigma + \left(\ln \frac{\sigma + \sigma^h}{\sigma^h} \right) \delta \sigma^h \right) dk \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\left(\ln \frac{\sigma_n + \sigma_n^h}{\sigma_n} \right) \delta \sigma_n + \left(\ln \frac{\sigma_n + \sigma_n^h}{\sigma_n^h} \right) \delta \sigma_n^h \right) dk \end{aligned} \quad (2.99)$$

结合 (2.96) 的变分形式

$$\begin{aligned} \delta \rho^h(k) = & -\delta \rho(k) + \frac{1}{2\pi} - a_1 * \delta \sigma(k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \delta \sigma_n(k) \\ \delta \sigma^h(\Lambda) = & -\delta \sigma(\Lambda) + \frac{1}{\pi} - a_2 * \delta \sigma(\Lambda) - a_1 * \delta \rho(\Lambda) \\ \delta \sigma_n^h(\Lambda^n) = & -\delta \sigma_n(\Lambda^n) + a_n * \delta \rho(\Lambda^n) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta \sigma_m(\Lambda^n) \end{aligned} \quad (2.100)$$

则 (2.99) 会变为

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{L} = & \int dk \left(\left(\ln \frac{\rho^h}{\rho} - a_1 * \ln \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma^h} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \right) \delta \rho \right. \\ & + \left(\ln \frac{\sigma^h}{\sigma} - a_1 * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) - a_2 * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \right) \delta \sigma \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{\sigma_n^h}{\sigma_n} - a_n * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_m^h} \right) \right) \delta \sigma_n \right) \end{aligned} \quad (2.101)$$

其中利用了卷积的对易性 (2.41)。将 (2.98) 和 (2.101) 代入自由能最小化条件 (2.50)，可以得到

$$\begin{aligned} 0 = & \int dk \left(\left(k^2 - \mu - \frac{H}{2} - T \left(\ln \frac{\rho^h}{\rho} - a_1 * \ln \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma^h} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \right) \right) \delta \rho \right. \\ & \left(2 \left(k^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) - T \left(\ln \frac{\sigma^h}{\sigma} - a_1 * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) - a_2 * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) \right) \right) \delta \sigma \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(nH - T \left(\ln \frac{\sigma_n^h}{\sigma_n} - a_n * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_m^h} \right) \right) \right) \delta \sigma_n \right) \end{aligned} \quad (2.102)$$

根据这一方程可以得到关于 $\delta \rho$ 、 $\delta \sigma$ 和 $\delta \sigma_n$ 的三个方程，即

$$\begin{aligned}
 & \left(k^2 - \mu - \frac{H}{2} \right) / T - \ln \frac{\rho^h}{\rho} + a_1 * \ln \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma^h} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) = 0 \\
 & 2 \left(k^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) / T - \ln \frac{\sigma^h}{\sigma} + a_1 * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) + a_2 * \ln \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_n^h} \right) = 0 \quad (2.103) \\
 & nH / T - \ln \frac{\sigma_n^h}{\sigma_n} + a_n * \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_m^h} \right) = 0
 \end{aligned}$$

若分别定义动量、快度的空穴密度函数与粒子密度函数的比值为

$$\begin{aligned}
 \rho^h(k) / \rho(k) &= \exp(\varepsilon^u(k) / T) \\
 \sigma^h(\Lambda) / \sigma(\Lambda) &= \exp(\varepsilon^b(\Lambda) / T) \\
 \sigma_n^h(\Lambda^n) / \sigma_n(\Lambda^n) &= \exp(\phi_n(\Lambda^n) / T)
 \end{aligned} \quad (2.104)$$

那么 (2.107) 即可化为热力学 BA 方程, 也称 TBA 方程^[27,28], 即

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^u(k) &= k^2 - \mu - \frac{H}{2} + Ta_1 * \ln(1 + \exp(-\varepsilon^b(k) / T)) - T \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln(1 + \exp(-\phi_n(k) / T)) \\
 \varepsilon^b(\Lambda) &= 2(\Lambda^2 - \mu - |c|^2) + Ta_1 * \ln(1 + \exp(-\varepsilon^u(\Lambda) / T)) + Ta_2 * \ln(1 + \exp(-\varepsilon^b(\Lambda) / T)) \\
 \phi_n(\Lambda^n) &= nH + Ta_n * \ln(1 + \exp(-\varepsilon^u(\Lambda^n) / T)) + T \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln(1 + \exp(-\phi_m(\Lambda^n) / T))
 \end{aligned} \quad (2.105)$$

这就是大家熟知的在有限温度下吸引相互作用费米气体的热力学 Bethe- Ansatz 方程, 简称 TBA 方程。其中 $\varepsilon^{b,u}$ 分别代表配对形成束缚态的费米子能量和没有配对的费米子能量。与此同时, 还可以得到压强 $p = p^u + p^b$, 且

$$\begin{aligned}
 p^u &= \frac{T}{\pi} \int \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon^u(k)}{T} \right) \right) dk \\
 p^b &= \frac{T}{2\pi} \int \ln \left(1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon^b(\Lambda)}{T} \right) \right) d\Lambda
 \end{aligned} \quad (2.106)$$

$p^{b,u}$ 分别代表配对费米子压强和未配对费米子压强。由此可以发现, 与能量 $\varepsilon^{b,u}$ 相对应, 系统压强也可以被视为两部分, 一部分是配对费米子产生的压强 p^b , 而另一部分则是没有配对费米子产生的压强 p^u 。

当温度 $T \rightarrow 0$ 时, 对一维无限长的动量空间和快度空间作截断, 即在区间 $k \in [-Q, Q]$ 和 $\Lambda \in [-B, B]$, 能量 $\varepsilon^{b(u)} \leq 0$, 表示粒子占据动量为 k 、快度为 Λ 的量子配对束缚 (未配对) 态。相反, 若粒子在动量和快度的费米截断区间内能量满足 $\varepsilon^{b(u)} > 0$, 则表示与这

一能量对应的量子态不是粒子的占据态。所以在低温且 $\varepsilon^{b(u)} \leq 0$ 下，其 TBA 方程可以化简为如下形式

$$\begin{aligned}\varepsilon^u(k) &= k^2 - \mu - \frac{H}{2} - a_1 * \varepsilon^b(k) \\ \varepsilon^b(\Lambda) &= 2 \left(\Lambda^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) - a_1 * \varepsilon^u(\Lambda) - a_2 * \varepsilon^b(\Lambda)\end{aligned}\tag{2.107}$$

这两个方程被称为缀饰能 (dressed energy) 方程^[41]。即在吸引相互作用下，两自旋反向的费米子会配对形成束缚态，使得整个费米系统出现两种组分，且这两种组分的能量存在间隙。同时，压强则也相应地变为

$$p^u = -\frac{1}{\pi} \int_{-Q}^Q \varepsilon^u(k) dk \quad p^b = -\frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B \varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda\tag{2.108}$$

第三章 一维相互作用费米气体 TBA 方程迭代解

前面两章我们依次对一维相互作用费米气体的理论模型、系统 BA 方程以及 TBA 方程进行了深入探讨,初步掌握了利用 Yang-Yang 热动力学方法来导出表征系统热力学性质的 TBA 方程的解析计算方法。本章将以一维吸引相互作用费米气体为例,详细介绍 TBA 方程在解析计算方面的具体运用之一,即计算零温时系统基态 TBA 方程在迭代方法下的高阶解析解^[42]。

本章分两种情况来讨论,第一是考虑系统中所有粒子均配对,在外磁场中系统极化强度为零;第二则是考虑系统中既存在配对费米子,也存在未配对费米子,即在外磁场中极化强度不为零。为此首先将缀饰能方程 (2.107) 中的卷积换为积分形式

$$\begin{aligned}\varepsilon^u(k) &= k^2 - \mu - \frac{H}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-B}^B \frac{|c'| \varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{|c'|^2 + (k - \Lambda)^2} \\ \varepsilon^b(\Lambda) &= 2 \left(\Lambda^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{|c'| \varepsilon^u(k) dk}{|c'|^2 + (\Lambda - k)^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-B}^B \frac{|c| \varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{|c|^2 + (\Lambda - \Lambda')^2}\end{aligned}\quad (3.1)$$

对于 $P=0$ 的情况,由于 $\rho(k)=0$, 缀饰能方程可以化简为

$$\varepsilon^b(\Lambda) = 2 \left(\Lambda^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-B}^B \frac{|c| \varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{|c|^2 + (\Lambda - \Lambda')^2} \quad (3.2)$$

相应地压强则为

$$p = -\frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B \varepsilon^b(k) dk \quad (3.3)$$

标记 $\eta = \mu + |c|^2/4$, 并且将缀饰能方程中的积分取近似后积分可以得到

$$\varepsilon^b(\Lambda) = 2(\Lambda^2 - \eta) + \frac{p}{|c|} + \frac{1}{\pi|c|^3} \int_{-B}^B \Lambda^2 \varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda' + \frac{1}{\pi|c|^3} \int_{-B}^B \Lambda'^2 \varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda' \quad (3.4)$$

这一过程中,结果只保留至关于 $|c|^{-1}$ 的三阶项。对于后两项积分,由于存在因式 $|c|^{-3}$, 缀饰能只取零阶项 $\varepsilon^b(\Lambda') = 2(\Lambda'^2 - \eta)$, 积分后得到

$$\varepsilon^b(\Lambda) = 2(\Lambda^2 - \eta) + \frac{p}{|c|} + \frac{4\Lambda^2}{\pi|c|^3} \left(\frac{B^3}{3} - \eta B \right) + \frac{4}{\pi|c|^3} \left(\frac{B^5}{5} - \eta \frac{B^3}{3} \right) \quad (3.5)$$

将其可以代入压强 (3.3)

$$p = -\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} - \frac{2pB}{\pi|c|} - \frac{112B^6}{45\pi^2|c|^3} + \frac{16\eta B^4}{3\pi^2|c|^3} \quad (3.6)$$

对于其中第三项,在保证结果中只保留小于或等于 $|c|^{-1}$ 的三阶项的前提下,多次迭代直

至结果中不再包含 p ，即

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2B}{\pi|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} - \frac{2pB}{\pi|c|} \right) \\
 &= -\frac{2B}{\pi|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} - \frac{2B}{\pi|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} - \frac{2pB}{\pi|c|} \right) \right) \\
 &= -\frac{2B}{\pi|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} - \frac{2B}{\pi|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} - \frac{2B}{\pi|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} \right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

将这一结果化简后代入 (3.6) 会得到

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} + \frac{8B^4}{3\pi^2|c|} - \frac{8\eta B^2}{\pi^2|c|} - \frac{16B^5}{3\pi^3|c|^2} + \frac{16\eta B^3}{\pi^3|c|^2} \\
 & + \frac{32B^6}{3\pi^4|c|^3} - \frac{32\eta B^4}{3\pi^4|c|^3} - \frac{112B^6}{45\pi^2|c|^3} + \frac{16\eta B^4}{3\pi^2|c|^3}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

将其代入 (3.5) 中的第二项，为了使结果中只保留小于或等于 $|c|^{-1}$ 的三阶项，则代入时只需要 (3.8) 中小于或等于 $|c|^{-1}$ 的二阶项，所以 (3.5) 中的第二项为

$$\frac{1}{|c|} \left(-\frac{4B^3}{3\pi} + \frac{4\eta B}{\pi} + \frac{8B^4}{3\pi^2|c|} - \frac{8\eta B^2}{\pi^2|c|} - \frac{16B^5}{3\pi^3|c|^2} + \frac{16\eta B^3}{\pi^3|c|^2} \right) \tag{3.9}$$

整理化简后，(3.5) 可以变为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^b(\Lambda) = & 2(\Lambda^2 - \eta) + \frac{4B^3}{3\pi|c|} + \frac{4\eta B}{\pi|c|} + \frac{8B^4}{3\pi^2|c|^2} - \frac{8\eta B}{\pi^2|c|^2} \\
 & - \frac{16B^5}{3\pi^3|c|^3} + \frac{16\eta B^3}{\pi^3|c|^3} + \frac{4\Lambda^2 B^3}{3\pi|c|^3} - \frac{4\eta B\Lambda^2}{\pi|c|^3} + \frac{4B^5}{5\pi|c|^3} - \frac{4\eta B^3}{3\pi|c|^3}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

由于缀饰能在费米海截断点处满足 $\varepsilon^b(\pm B) = 0$ ，会有

$$\begin{aligned}
 0 = & 2(B^2 - \eta) + \frac{4B^3}{3\pi|c|} + \frac{4\eta B}{\pi|c|} + \frac{8B^4}{3\pi^2|c|^2} - \frac{8\eta B}{\pi^2|c|^2} \\
 & - \frac{16B^5}{3\pi^3|c|^3} + \frac{16\eta B^3}{\pi^3|c|^3} + \frac{32B^5}{15\pi|c|^3} - \frac{16\eta B^3}{3\pi|c|^3}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

若将截断边界 B 表示为关于 $|c|^{-1}$ 的级数形式，即

$$B(\eta) = B_0 + \frac{B_1}{|c|} + \frac{B_2}{|c|^2} + \frac{B_3}{|c|^3} + O(|c|^{-4}) \tag{3.12}$$

$B_i (i=0,1,2,3)$ 为各阶的系数。根据这一形式，我们可以得到其 n 次幂 $B^n (n=2,3,4,5)$ 保留至三阶的表达式。由于这些关于 B 的幂将用于 (3.8) 和 (3.11) 中，所以为了使结果中只保留小于或等于 $|c|^{-1}$ 的三阶项，所以对我们有用的幂如下：

$$B^2 = B_0^2 + \frac{2B_0B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2}(2B_0B_2 + B_1^2) + \frac{1}{|c|^3}(2B_0B_3 + 2B_1B_2) + O(|c|^{-4}) \quad (3.13)$$

$$B^3 = B_0^3 + \frac{3B_0^2B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2}(3B_0^2B_2 + 3B_0B_1^2) + \frac{1}{|c|^3}(6B_0B_1B_2 + 3B_0^2B_3 + B_1^3) + O(|c|^{-4})$$

$$B^4 = B_0^4 + \frac{4B_0^3B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2}(4B_0^3B_2 + 6B_0^2B_1^2) + O(|c|^{-3})$$

$$B^5 = B_0^5 + \frac{5B_0^4B_1}{|c|} + O(|c|^{-2})$$

$$B^6 = B_0^5 + O(|c|^{-1})$$

若将其依次代入 (3.11) 中，此处依然遵循保留至关于 $|c|^{-1}$ 的三阶的惯例，则在其右式中，零阶项 $2(B^2 - \eta)$ 变为

$$2\left(B_0^2 + \frac{2B_0B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2}(2B_0B_2 + B_1^2) + \frac{1}{|c|^3}(2B_0B_3 + 2B_1B_2)\right) - 2\eta \quad (3.14)$$

一阶项 $(4B^3/3 + 4\eta B)/\pi|c|$ 变为

$$\frac{4}{3\pi|c|}\left(B_0^3 + \frac{3B_0^2B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2}(3B_0^2B_2 + 3B_0B_1^2)\right) + \frac{4\eta}{\pi|c|}\left(B_0 + \frac{B_1}{|c|} + \frac{B_2}{|c|^2}\right) \quad (3.15)$$

二阶项 $(8B^4/3 - 8\eta B)/\pi^2|c|^2$ 会变为

$$\frac{8}{3\pi^2|c|^2}\left(B_0^4 + \frac{4B_0^3B_1}{|c|}\right) - \frac{8\eta}{\pi^2|c|^2}\left(B_0 + \frac{B_1}{|c|}\right) \quad (3.16)$$

三阶项 $(-16B^5/3\pi^3 + 16\eta B^3/\pi^3 + 32B^5/15\pi - 16\eta B^3/3\pi)/|c|^3$ 变为

$$-\frac{16B_0^5}{3\pi^3|c|^3} + \frac{16\eta B_0^3}{\pi^3|c|^3} + \frac{32B_0^5}{15\pi|c|^3} - \frac{16\eta B_0^3}{3\pi|c|^3} \quad (3.17)$$

根据这四个结果，分别整理出其中关于 $|c|^{-1}$ 的零阶、一阶、二阶以及三阶的表达式。进而由其整体等于零可以得到关于 $B_i (i=0,1,2,3)$ 的四个方程，即

$$\begin{aligned}
 0 &= 2B_0^2 - 2\eta \\
 0 &= 4B_0B_1 - \frac{4B_0^3}{3\pi} + \frac{4\eta B_0}{\pi} \\
 0 &= 4B_0B_2 + 2B_1^2 - \frac{4B_0^2B_1}{\pi} + \frac{4\eta B_1}{\pi} + \frac{8B_0^4}{3\pi^2} - \frac{8\eta B_0^2}{\pi^2} \\
 0 &= 4B_0B_3 + 4B_1B_2 - \frac{4B_0B_1^2}{\pi} - \frac{4B_0^2B_2}{\pi} + \frac{4\eta B_2}{\pi} + \frac{32B_0^3B_1}{3\pi^2} \\
 &\quad - \frac{16\eta B_0B_1}{\pi^2} - \frac{16B_0^5}{3\pi^3} + \frac{16\eta B_0^3}{\pi^3} + \frac{32B_0^5}{15\pi} - \frac{16\eta B_0^3}{3\pi}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

求解这四个方程即可得到其关于等效化学势 η 的表达式，即

$$B_0 = \eta^{1/2} \quad B_1 = -\frac{2\eta}{3\pi} \quad B_2 = \frac{10\eta^{3/2}}{9\pi^2} \quad B_3 = \frac{4\eta^2}{5\pi} - \frac{64\eta^2}{27\pi^3} \tag{3.19}$$

与此同时，将 (3.13) 依次代入压强 (3.8) 中，依然遵循保留至关于 $|c|^{-1}$ 的三阶的惯例，则其零阶项 $-4B^3/3\pi + 4\eta B/\pi$ 变为

$$\begin{aligned}
 &-\frac{4}{3\pi} \left(B_0^3 + \frac{3B_0^2B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2} (3B_0^2B_2 + 3B_0B_1^2) + \frac{1}{|c|^3} (6B_0B_1B_2 + 3B_0^2B_3 + B_1^3) \right) \\
 &+ \frac{4\eta}{\pi} \left(B_0 + \frac{B_1}{|c|} + \frac{B_2}{|c|^2} + \frac{B_3}{|c|^3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

一阶项 $(8B^4/3 - 8\eta B^2)/\pi^2|c|$ 可变为

$$\frac{8}{3\pi^2|c|} \left(B_0^4 + \frac{4B_0^3B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2} (4B_0^3B_2 + 6B_0^2B_1^2) \right) - \frac{8\eta}{\pi^2|c|} \left(B_0^2 + \frac{2B_0B_1}{|c|} + \frac{1}{|c|^2} (2B_0B_2 + B_1^2) \right) \tag{3.21}$$

二阶项 $(-16B^5/3 + 16\eta B^3)/\pi^3|c|^2$ 变为

$$-\frac{16}{3\pi^3|c|^2} \left(B_0^5 + \frac{5B_0^4B_1}{|c|} \right) + \frac{16\eta}{\pi^3|c|^2} \left(B_0^3 + \frac{3B_0^2B_1}{|c|} \right) \tag{3.22}$$

三阶项 $(32B^6/3\pi^4 - 32\eta B^4/3\pi^4 - 112B^6/45\pi^2 + 16\eta B^4/3\pi^2)/|c|^3$ 化为

$$\frac{32B_0^6}{3\pi^4|c|^3} - \frac{32\eta B_0^4}{3\pi^4|c|^3} - \frac{112B_0^6}{45\pi^2|c|^3} + \frac{16\eta B_0^4}{3\pi^2|c|^3} \tag{3.23}$$

整理这四项，化简为关于 $|c|^{-1}$ 的零阶、一阶、二阶以及三阶的表达式。根据其形式，可以将解得的各阶系数 (3.19) 代入其中，得到压强 p 关于等效化学势 η 的表达式，若将其结果同样表示为级数形式，且各阶系数为 $p_i (i=0,1,2,3)$ ，则会有

$$p = \frac{8\eta^{3/2}}{3\pi} + \frac{1}{|c|} \left(-\frac{16\eta^2}{3\pi^2} \right) + \frac{1}{|c|^2} \frac{112\eta^{5/2}}{9\pi^2} + \frac{1}{|c|^3} \left(\frac{128\eta^3}{45\pi^2} - \frac{2560\eta^3}{81\pi^4} \right) \quad (3.24)$$

由等效化学势 $\eta = \mu + |c|^2/4$ 和热力学公式 $n = \partial p / \partial \mu$ 可知 $n = \partial p / \partial \eta$ 。所以我们将对 (3.24) 求关于 η 的导数

$$n = \frac{4\eta^{1/2}}{\pi} + \frac{1}{|c|} \left(-\frac{32\eta}{3\pi^2} \right) + \frac{1}{|c|^2} \frac{280\eta^{3/2}}{9\pi^2} + \frac{1}{|c|^3} \left(\frac{128\eta^2}{15\pi^2} - \frac{2560\eta^2}{27\pi^4} \right) \quad (3.25)$$

再次将其中的 $\eta^{i/2}$ 表示为关于 $|c|^{-1}$ 的级数形式，且各阶系数为 $r_i (i=0,1,2,3)$ 。与前文对截断边界 B 的处理过程类似，我们可以得到其幂形式 $\eta^{i/2} (i=2,3,4,5)$ 并将其代入 (3.25) 后得到四个系数 $r_i (i=0,1,2,3)$ 关于粒子数密度 n 的表达式

$$r_0 = \frac{n\pi}{4} \quad r_1 = \frac{n^2\pi}{16} \quad r_2 = \frac{29n^3\pi}{288} \quad r_3 = \frac{25n^4\pi}{432} - \frac{n^4\pi^3}{120} \quad (3.26)$$

在此基础上还可以得到 $\eta^{i/2} (i=2,3,4,5)$ 保留至三阶的表达式。其中等效化学势 η 为

$$\eta = \frac{n^2\pi^2}{16} + \frac{1}{|c|} \frac{n^3\pi^2}{12} + \frac{1}{|c|^2} \left(\frac{29n^4\pi^4}{576} + \frac{n^4\pi^2}{36} \right) + \frac{1}{|c|^3} \left(\frac{n^5\pi^2}{16} - \frac{n^5\pi^4}{240} \right) \quad (3.27)$$

将它与其它 $\eta^{i/2} (i=3,4,5,6)$ 代入 (3.24) 中并结合 (3.26)，可以得到压强 p 关于粒子数密度 n 的表达式，即

$$p = \frac{n^3\pi^2}{24} \left(1 + \frac{1}{|\gamma|} \frac{3}{2} + \frac{1}{|\gamma|^2} \frac{3}{2} + \frac{1}{|\gamma|^3} \left(\frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) \right) \quad (3.28)$$

其中 $\gamma = c/n$ 。

另外，零温且极化强度 $P=0$ 时，对于系统吉布斯自由能 (2.47)， TS 和 HM^z 均没有贡献，即 $G = E/L - \eta N/L$ 。根据其于压强的关系会有 $E/L = -p + \eta N/L$ 。与此同时，由于系统中粒子完全配对，每形成一对束缚对将消耗能量 $\varepsilon_b = \hbar^2 c^2 / 4m$ ($\hbar = 2m = 1$)。所以对于系统能量则要考虑总束缚能 $N\varepsilon_b/2$ 。换言之，对于等效化学势为 η 的系统，其单位长度能量为 $E/L = -p + \eta n - n\varepsilon_b/2$ ，根据前文中的结果 (3.25) 和 (3.28)

$$\frac{E}{L} = -\frac{n^3|\gamma|^2}{4} + \frac{n^3\pi^2}{48} \left(1 + \frac{1}{|\gamma|} + \frac{1}{|\gamma|^2} \frac{3}{4} + \frac{1}{|\gamma|^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{30} \right) \right) \quad (3.29)$$

对于粒子数和限度确定的系统，这一结论体现了系统能量 E 与相互作用强度 $|\gamma|^{-1}$ 的高阶关系。

对于极化强度 $P \neq 0$ 的情况，其结果较上述情况会有很大不同。首先缀饰能方程形式如 (2.107)，标记 $\eta = \mu + |c|^2/4$ ， $\zeta = \mu + H/2$ ，那么坠饰能方程为

$$\begin{aligned}\varepsilon^u(k) &= k^2 - \zeta - \frac{1}{\pi} \int_{-B}^B \frac{|c'| \varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{|c'|^2 + (k - \Lambda)^2} \\ \varepsilon^b(\Lambda) &= 2(\Lambda^2 - \eta) - \frac{1}{\pi} \int_Q^Q \frac{|c'| \varepsilon^u(k) dk}{|c'|^2 + (\Lambda - k)^2} - \frac{1}{\pi} \int_B^B \frac{|c| \varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{|c|^2 + (\Lambda - \Lambda')^2}\end{aligned}\quad (3.30)$$

其中 $\mu^u = \zeta$, $\mu^b = \eta$ 分别被称为未配对费米子和配对费米子的等效化学势。与之相应的压强如 (2.108) 所述。

与 $P=0$ 时的情况相比, 由于增加了一组方程, 迭代过程变得更加繁琐, 但基本原理与步骤同前文中的方法类似。在此不再赘述这一过程。在此给出两个重要结果^[42], 即等效化学势关于极化强度、粒子数密度以及相互作用强度的表达式

$$\begin{aligned}\mu^u &= \pi^2 n^2 \left(P^2 + \frac{1-P}{12|\gamma|} (1-2P+49P^2) + \frac{(1-P)^2}{8|\gamma|^2} (1+2P+93P^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-P}{240|\gamma|^3} (144\pi^2 P^4 - 7950P^4 - 324\pi^2 P^3 + 15720P^3 - 7620P^2 \right. \\ &\quad \left. + 166\pi^2 P^2 - 102P - 4\pi^2 P - 30 + \pi^2) \right)\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\mu^b &= \pi^2 n^2 \left(\frac{(1-P)^2}{16} + \frac{1+3P}{12|\gamma|} (6P^2 - 3P + 1) + \frac{1-P}{64|\gamma|^2} (5+17P - P^2 + 491P^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{240|\gamma|^3} (15+30P^2 + 7470P^3 + 10\pi^2 P^2 - 180\pi^2 P^3 + 355\pi^2 P^4 \right. \\ &\quad \left. - 420\pi^2 P^5 - 15405P^4 - \pi^2 + 75P + 7815P^5) \right)\end{aligned}\quad (3.32)$$

和单位长度总能量关于粒子数密度、极化强度和相互作用强度的表达式

$$\begin{aligned}\frac{E}{L} &= n^3 \left(-\frac{(1-P)^3 |\gamma|^2}{4} + \frac{\pi^2}{48} (1-3P+3P^2+15P^3) + \frac{\pi^2 (1-P)}{48|\gamma|} (1+P-5P^2+67P^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2 (1-P)}{64|\gamma|^2} (1+5P+3P^2+247P^3) - \frac{\pi^2 (1-P)}{1440|\gamma|^3} (-15+31125P^4+1861\pi^2 P^5 \right. \\ &\quad \left. - 659\pi^2 P^4 + 346\pi^2 P^3 - 14\pi^2 P^2 + \pi^2 P + \pi^2 - 105P - 150P^2 - 15090P^3) \right)\end{aligned}\quad (3.33)$$

上式中若取 $P=0$, 则可以回归到结果 (3.29)。因此 $P=0$ 可以被视为其中的一种特殊情况。

这一迭代方法的意义在于能够得到关于基态能量和铁磁性质的高阶解, 并且较数值解更为精确。

第四章 一维相互作用费米气体量子临界及相图

临界现象与零温时随系统参数改变的量子相变息息相关。由于量子涨落与热力学涨落紧密联系，研究量子临界现象已经成为凝聚态物理中一个极具挑战性的课题。从这一角度而言，一维可积模型在零温时所呈现出来的量子相变及其在临界处的量子散射行为更具有研究价值。

量子临界可以通过精确求解系统 Bethe-Ansatz 方程来研究，其精确解也揭示了量子临界的微观起源，并为研究量子临界现象在量子临界处的空间散射提供了先进的研究手段。

另外，近年来物理学家们在冷原子实验上取得的显著进展，为一维量子气体理论研究提供了更高要求的实验环境。

4.1 一维排斥相互作用费米气体量子临界及相图

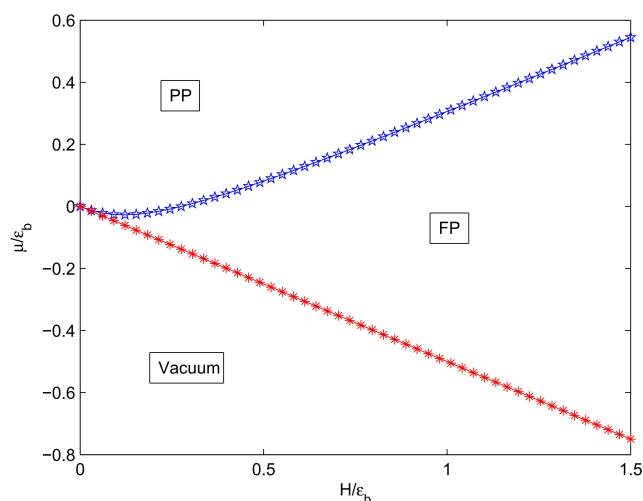
一维 δ 相互作用费米气体是量子多体物理中一个颇为重要的精确可解模型，结合其 BA 方程的解研究问题也是数学物理中一个重大突破。

在这一模型中，相互作用参数 c 根据其取值的不同将会产生不同的物理现象，如 $c > 0$ 时系统会出现自旋-电荷分离现象，而当 $c < 0$ 时系统则会出现费米子配对振荡的现象。所以本节将从这两种相互作用取值范围来探究其量子临界。

一维排斥相互作用费米气体，由其坠饰能方程可以发现，两自旋态相反的费米子之间自旋-自旋相互作用宏观表现为反铁磁性。当系统中自旋向上和自旋向下的粒子数相等时，系统能量最低，即处于基态。若调节粒子间这一相互作用强度，则会出现随着相互作用强度的变化，粒子的自旋与电荷以一定速率分离，这一现象就是低能物理中极为重要的自旋-电荷现象，它是排斥费米系统中独有的性质。当系统温度趋近于零温时，自旋波束缚态将不再占据系统基态。外磁场很小时，表征系统中反铁磁性的两个重要指征分别是与外磁场线性相关的磁化强度和相应的磁化率。

由于排斥相互作用下费米气体系统临界散射行为在数值上很难实现，解析法精确求解 Fredholm 方程成为理论物理学界研究其铁磁性质的主要方法，并且近年来涌现出了很多相关的重要理论结果。本节主要介绍在排斥费米气体系统中几个重要的量子相变图像及其反映的物理内涵。

首先，关于典型费米气体系统 Gaudin-Yang 模型在排斥互作用下零温时的量子相变图^[38]如图 4.1 所示。


 图 4.1 排斥相互作用 Gaudin-Yang 模型在 $\mu-H$ 平面量子相变图^[38]

低温时，自旋波束缚态具有反铁磁序，与 Fredholm 方程相关的自旋占据不平衡导致系统出现三个量子相，即磁化强度为零（外磁场为零）的自旋单态、有限磁场强度下的铁磁态（同时也是基态）以及磁化强度为二分之一的完全极化相。确定这一临界磁场则需要由自旋向下费米子粒子数密度为零来确定。

从图中可以发现，外磁场的逐渐增强将导致系统从真空态（Vacuum）逐渐过渡到部分极化相（PP），继而过渡到完全极化相（FP）。图中化学势和磁场均以束缚能 $\epsilon_b = \hbar^2 c^2 / 2m$ 为单位。

从另一角度而言，出发于反映系统在外磁场作用下在费米海中能带填充情况的 TBA 方程，在强相互作用条件 $\gamma \gg 1$ 下可以得到出在临界外磁场处 H_C^F 系统的相变情况。

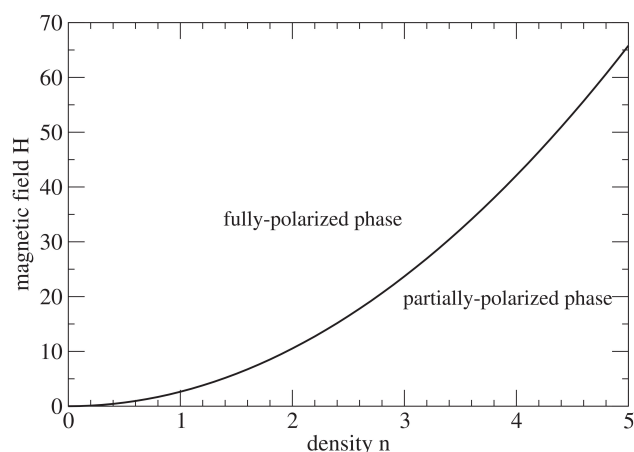

 图 4.2 排斥相互作用 Gaudin-Yang 模型在 $H-n$ 平面量子相变图^[42]

图 4.2 即为这种方法得到的零温时系统在平面 $H-n$ 内的量子相图^[42]。对于这一铁磁性质的解析结果也启发了大家，即在强耦合极限条件下，极化费米子系统中的自旋-自旋相互作用可以等效为存在弱反铁磁耦合作用 $J \approx -4E_F / \gamma$ 且各向同性的自旋 1/2 海

森堡链模型。

与图 4.1.1 不同，这一相变图中没有出现真空态，仅体现了当外磁场处于临界磁场时，系统在部分极化相和完全极化相间的过渡。

4.2 一维吸引相互作用费米气体量子临界及相图

零温时一维吸引相互作用费米气体量子相图已经由 Orso^[11]和其它物理学家们利用求解正则系综中描述系统基态 BA 方程得到，如图 4.1.1 所示。借助由 BA 方程在热力学极限条件下导出的、反映系统热力学性质 TBA 方程研究这一量子临界理论上也应该可行。事实上，由 TBA 方程在绝大部分的物理模型中只能数值精确求解，而能够解析求解的模型却为数不多，一维吸引相互作用费米气体模型却是这少数部分中的一个。

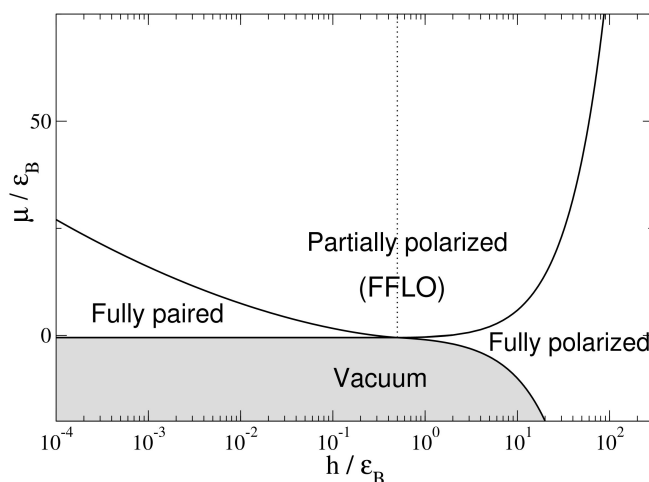


图 4.3 吸引相互作用费米气体 $\mu-H$ 平面量子相变图^[11]

吸引相互作用下的 Gaudin-Yang 模型在零温条件下会呈现三种量子相，即完全配对相 ($P=0$)、完全极化相 ($P=1$) 和部分极化 (类 FFLO) 相 ($0 < P < 1$)。利用巨配分和配分方法可以研究这一量子相变^[43,44]的相边界以及相变图。

本小节将利用吸引相互作用费米气体在巨正则系综中、零温极限条件下的 TBA 方程，解析求解在 $\mu-H$ 平面内的零温相变图。当温度趋近于零温时系统的缀饰能方程已经由 (3.1) 式给出。方程在区间 $k \in [-Q, Q]$ 和 $\Lambda \in [-B, B]$ ，能量 $\varepsilon^{b,u} \leq 0$ ，表示粒子占据动量为 k ，快度为 Λ 的量子配对束缚 (未配对) 态。相反，若粒子在动量和快度的费米截断区间内能量满足 $\varepsilon^{b,u} > 0$ ，则表示与这一能量对应的量子态不是粒子的占据态。积分边界 B 和 Q 分别标志了配对费米子和未配对费米子的费米面。鉴于吸引相互作用下系统存在四个量子相，临界边界条件的确立则可以分为四个相边界：真空态—铁磁态 (完全极化) ($V-F$)、真空态—完全配对相 ($V-P$)、铁磁态—部分配对相 ($F-PP$) 和完全配

对一部分配对相 (P - PP)。相边界可以根据配对费米子和未配对费米子的费米能与费米面的位置关系来确定。具体过程如下：

1) 真空态—铁磁态 (完全极化) (V - F) 的量子相边界 $\varepsilon^u(0) \leq 0, \varepsilon^b(0) > 0$

此时坠饰能方程 (3.1) 中所有积分均消失, 根据边界条件可以得到 $\mu < -|c|^2/4$ 且 $\mu \geq -H/2$ 。所以当满足 $-|c|^2/4 > -H/2$ 时, 体系的量子相边界为 $\mu_{c1} = -H/2$ 。

2) 真空态—完全配对相 (V - P) 的量子相边界 $\varepsilon^u(0) > 0, \varepsilon^b(0) \leq 0$

这一条件下的坠饰能方程中依然不包含积分式, 且 $\mu \geq -|c|^2/4$, $\mu < -H/2$ 。满足 $-|c|^2/4 < -H/2$ 时体系量子相边界条件为 $\mu_{c2} = -|c|^2/4$ 。

3) 铁磁态—一部分配对相 (F - PP) 的量子相边界 $\varepsilon^u(\pm Q) = 0$, $\varepsilon^b(0) \leq 0$

根据临界条件 $\varepsilon^b(0) = 0$, 坠饰能方程则可以变形为

$$\varepsilon^b(\Lambda) = 2 \left(\Lambda^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) - \frac{|c|}{2\pi} \int_{-Q}^Q \frac{\varepsilon^u(k) dk}{(|c|/2)^2 + (\Lambda - k)^2} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon^u(k) = k^2 - \mu - \frac{H}{2}$$

联合求解这一方程组, 将坠饰 $\varepsilon^u(k)$ 能代入 $\varepsilon^b(\Lambda)$ 中积分后的结果代入条件 $\varepsilon^u(\pm Q) = 0$, 可以得到

$$\mu = -\frac{|c|^2}{4} - \frac{Q|c|}{2\pi} + \left(\frac{|c|^2}{4\pi} + \left(\mu + \frac{H}{2} \right) \frac{1}{\pi} \right) \arctan \frac{2Q}{|c|} \quad (4.2)$$

与此同时还可以得到

$$Q^2 = \mu + \frac{H}{2} \quad (4.3)$$

为了简化计算, 对上述结果进行无量纲化, 即长度单位和能量单位分别为 c^{-1} 和 ε^b 且定义 $\bar{\mu} = \mu / \varepsilon^b$, $h = H / \varepsilon^b$ 。那么, 无量纲化后

$$\bar{\mu} = -\frac{1}{2} - \frac{\bar{Q}}{2\pi} + \frac{1+2\bar{\mu}+h}{2\pi} \arctan \bar{Q}, \left(\bar{Q} = \frac{2Q}{|c|} = \sqrt{2\bar{\mu}+h} \right) \quad (4.4)$$

取化学势关于积分边界 Q 的零阶项代入 $\bar{Q} = \sqrt{2\bar{\mu}+h}$, ($\bar{\mu} > -h/2$) 则可以得到 $\bar{Q} = (h-1)^{1/2}$ 。并将其代入 (3.5), 借助正切函数的级数展开可以得到化学势关于因式 $(h-1)^{1/2}$ 的级数形式。若假设其具有如下的形式,

$$\bar{\mu} = a_0 + a_1 (h-1)^{1/2} + a_2 (h-1) + a_3 (h-1)^{3/2} + a_4 (h-1)^2 + a_5 (h-1)^{5/2} \quad (4.5)$$

则各阶系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= -1/2 & a_1 &= 0 & a_2 &= 0 \\ a_3 &= 1/3\pi & a_4 &= 1/3\pi^2 & a_5 &= 1/3\pi^3 - 1/6\pi \end{aligned} \quad (4.6)$$

相应地，量子临界边界为

$$\bar{\mu}_{c3} = -\frac{1}{2} + \frac{(h-1)^{3/2}}{3\pi} + \frac{(h-1)^2}{3\pi^2} + \left(\frac{1}{3\pi^3} - \frac{1}{6\pi} \right) (h-1)^{5/2}, (\bar{\mu} > -h/2, h > 1) \quad (4.7)$$

4) 完全配对一部分配对相 (P - PP) 的量子相边界 $\varepsilon^u(0) \leq 0$, $\varepsilon^b(\pm B) = 0$ 依据相边界条件 $\varepsilon^u(0) = 0$, 坠饰能方程可以化为

$$\begin{aligned} \varepsilon^b(\Lambda) &= 2 \left(\Lambda^2 - \mu - \frac{|c|^2}{4} \right) - \frac{|c|}{\pi} \int_{-B}^B \frac{\varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{|c|^2 + (\Lambda - \Lambda')^2} \\ \varepsilon^u(k) &= k^2 - \mu - \frac{H}{2} - \frac{|c|}{2\pi} \int_{-Q}^Q \frac{\varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{(|c|/2)^2 + (k - \Lambda)^2} \\ \mu &= -\frac{H}{2} - \frac{|c|}{2\pi} \int_{-Q}^Q \frac{\varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{(|c|/2)^2 + \Lambda^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

为了简化计算，先将上式进行无量纲化，单位长度与单位能量的选取同 3) 中一致，即

$$\begin{aligned} \varepsilon^b(\Lambda) &= 2\Lambda^2 - \bar{\mu} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\bar{B}}^{\bar{B}} \frac{\varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{1 + (\Lambda - \Lambda')^2} \\ \varepsilon^u(k) &= k^2 - \bar{\mu} - \frac{h}{2} - \frac{4}{\pi} \int_{-\bar{Q}}^{\bar{Q}} \frac{\varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{1 + 4(k - \Lambda)^2} \\ \bar{\mu} &= -\frac{h}{2} - \frac{4}{\pi} \int_{-\bar{Q}}^{\bar{Q}} \frac{\varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{1 + 4\Lambda^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

根据条件 $\varepsilon^b(\pm B) = 0$, 则可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= -\frac{h}{2} - \frac{4}{\pi} \int_{-\bar{Q}}^{\bar{Q}} \frac{\varepsilon^b(\Lambda) d\Lambda}{1 + 4\Lambda^2} \\ \bar{B}^2 &= \frac{1}{2} \left(\bar{\mu} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{B}}^{\bar{B}} \frac{\varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{1 + (\Lambda - \Lambda')^2} \\ \varepsilon^b(\Lambda) &= 2\Lambda^2 - \bar{\mu} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\bar{B}}^{\bar{B}} \frac{\varepsilon^b(\Lambda') d\Lambda'}{1 + (\Lambda - \Lambda')^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

联合这三个方程，首先将缀饰能 $\varepsilon^b(\Lambda)$ 代入 $\varepsilon^u(k)$ 中进行积分后可得

$$\bar{\mu} = -\frac{h}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\bar{B} - (\bar{\mu} + 1) \arctan 2\bar{B} \right) \quad (4.11)$$

同时可得 \bar{B}^2 关于化学势的零阶项可以表 $\bar{B}^2 = 1/2(\bar{\mu} + 1/2)$, 即

$$2\bar{B} = (2\bar{\mu} + 1)^{1/2} \quad (\bar{\mu} > -1/2) \quad (4.12)$$

结合化学势关于边界 \bar{B} 的零阶项 $\bar{\mu} = -h/2$ ，可以得到化学势关于边界 $\bar{B} = (1-h)^{1/2}$ ($h < 1$) 的级形式，若设其表达式为

$$\bar{\mu} = b_0 + b_1(1-h)^{1/2} + b_2(1-h) + b_3(1-h)^{3/2} + b_4(1-h)^2 + b_5(1-h)^{5/2} \quad (4.13)$$

则各阶系数为

$$\begin{aligned} b_0 &= -1/2 & b_1 &= 0 & b_2 &= 1/2 \\ b_3 &= 4/3\pi & b_4 &= 16/3\pi^2 & b_5 &= 64/3\pi^3 - 2/3\pi \end{aligned} \quad (4.14)$$

同时，也可以得到量子相变边界

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{c4} &= -\frac{h}{2} + \frac{4}{3\pi}(1-h)^{3/2} + \frac{16}{3\pi^2}(1-h)^2 + \left(\frac{64}{3\pi^3} - \frac{2}{3\pi}\right)(1-h)^{5/2}, \\ &(\bar{\mu} > -1/2, h < 1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

最后将 (V-P) 和 (V-F) 的结果进行无量纲化，我们可以得到四个量子相边界，即

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{c1} &= -h/2, (h > 1) \\ \bar{\mu}_{c2} &= -1/2, (h < 1) \\ \bar{\mu}_{c3} &= -\frac{1}{2} + \frac{(h-1)^{3/2}}{3\pi} + \frac{(h-1)^2}{3\pi^2} + \left(\frac{1}{3\pi^3} - \frac{1}{6\pi}\right)(h-1)^{5/2}, (\bar{\mu}_{c3} > -h/2, h > 1) \\ \bar{\mu}_{c4} &= -\frac{h}{2} + \frac{4(1-h)^{3/2}}{3\pi} + \frac{16(1-h)^2}{3\pi^2} + \left(\frac{64}{3\pi^3} - \frac{2}{3\pi}\right)(1-h)^{5/2}, (\bar{\mu}_{c4} > -1/2, h < 1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

根据这四个解析临界条件，可以绘制出 $\mu-H$ 平面内的该系统的量子相变图^[44]，如图 4.4 所示。

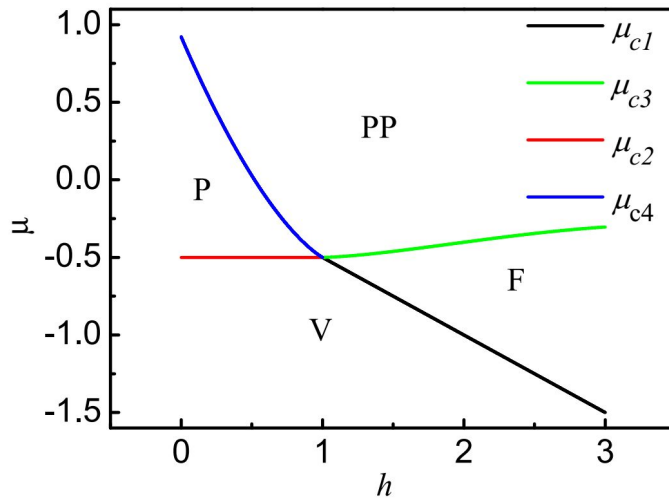


图 4.4 吸引相互作用费米气体量子相变图

在此强调 $\bar{\mu}_{c1}$ 和 $\bar{\mu}_{c2}$ 适用于所有相互作用强度，而 $\bar{\mu}_{c3}$ 和 $\bar{\mu}_{c4}$ 仅适用强耦合条件

$\gamma \gg 1$, 即 $\sqrt{\bar{\mu} + h/2} \ll 1$, $\sqrt{\bar{\mu} + 1/2} \ll 1$ 。从上图可以发现, $h = 1, \bar{\mu} = -0.5$ 是系统相变的一个临界值, 随着外磁场的逐渐增强, 系统逐渐由真空态过渡到铁磁相, 继而过渡到部分配对相以及完全配对相。这一解析结果与数值结果 (图4.3) 基本吻合, 也表明用上述方法求解相变边界是较为正确的。

第五章 总结与展望

本文基于一维量子气体理论中的三个基础方程——由量子逆散射方法得到的一维量子气体的 BA 方程，将其通过 Yang-Yang 热动力学方法得到的一维量子气体热力学 BA 方程，以及其在零温时的缀饰能方程，对于不同的量子气体系统，讨论其不同的物理性质。

本文着重对一维 δ 相互作用两分量费米气体的系统能量、化学势与系统中粒子间相互作用强度、系统在外磁场中的极化强度以及粒子数密度间的关系作了探究，并得出了关于相互作用强度的高阶表达式。

其结果表明，随着粒子间相互作用强度的增强，系统能量总体呈现递减趋势；且在相互作用强度较弱时下降速率较快，而在相互作用强度较强时下降逐渐缓慢。由于在吸引相互作用的费米系统中自旋相反的两粒子会形成库珀对，并且随着相互作用的增强，库珀对趋于稳定并形成束缚对，形成大家所熟知的 FFLO 态。所以若将系统置于外磁场中，自旋占据不平衡时会发生极化现象；而且随着磁场强度的增加，会出现两种费米子（一种是配对费米子，另一种是未配对费米子）。这两种费米子能量之间存在间隙。这一有趣的现象使得研究吸引费米气体的量子临界变得更有意义。所以在本文第三章中解析求解了两分量费米气体在吸引相互作用下量子相边界并绘制出了量子相图。从图中可以看出，系统存在四个量子相，即真空态、铁磁态、完全配对相和部分配对相。

对于一维相互作用量子气体的探究，仅仅止步于纯玻色和纯费米气体是远远不够的，一维混合物气体同样具有很高的研究价值。由于吸引相互作用下玻色-费米混合物的系统 BA 方程没有被严格给出，有关这一课题的成果为数不多。相反，有关排斥相互作用混合气体系统基态以及量子临界现象的科学成果却层出不穷。这一现状很大程度上归因于其 BA 和 TBA 方程已经在早年间被严格给出，并且关于其基态也有了初步的了解。

鉴于上述一维玻色费米混合物的研究现状，之后的探究方向主要有两方面：第一方面即继续探究排斥相互作用玻色-费米混合气体的其它物理特性，具体而言，我们可以基于这两个基本方程，沿用之前两分量纯费米气体零温时相边界的方法尝试探究其量子临界行为；另一方面即对吸引相互作用混合气体系统的 BA 及 TBA 方程形式继续探究，为进一步讨论系统的量子临界奠定基础。

参考文献

- [1] Liao, Y. A., A. S. C. Rittner, T. Paprotta, *et al*, Spin-imbalance in a one-dimensional Fermi gas[J], 2010, Nature (London) **467**: 567.
- [2] Henning Moritz, Thilo Stöferle, Kenneth Guönter, *et al*, Confinement Induced Molecules in a 1D Fermi Gas[J], 2005, **94**: 210401.
- [3] Fulde, P. And Ferrell, R. A. Superconductivity in a strong spin-exchange field[J], Phys. Rev. A, 1964, **135**: 550 .
- [4] Larkin, A. I. & Ovchinnikov, Y. N. Inhomogeneous state of superconductors[J], Sov. Phys. JETP,1965, **20**:762–769.
- [5] Partridge, G. B., Li, W, Kamar, R. I, Liao, Y.-a, *et al*, Pairing and phase separation in a polarized Fermi gas[J], Science,2006, **311**: 503–505.
- [6] Partridge, G. B. et al. Deformation of a trapped Fermi gas with unequal spin Populations[J], Phys. Rev. Lett, 2006, **97**: 190407.
- [7] Houbiers. M, Stoof. H. T. C, McAlexander. W. I, *et al*, Elastic and inelastic collisions of ${}^6\text{Li}$ atoms in magnetic and optical traps[J], Phys. Rev. A, 1998, **57**: R1497–R1500.
- [8] Bartenstein, M. *et al*. Precise determination of ${}^6\text{Li}$ cold collision parameters by radio-frequency spectroscopy on weakly bound molecules[J], Phys. Rev. Lett, 2005,**94**:103201.
- [9] Tokatly and I. V. Dilute , Fermi gas in quasi-one-dimensional traps: from weakly interacting fermions via hard core bosons to a weakly interacting Bose gas[J], Phys. Rev. Lett, 2004, **93**: 090405.
- [10] Fuchs, J. N., Recati, A. & Zwerger, W. Exactly solvable model of the BCS-BEC Crossover[J], Phys. Rev. Lett, 2004, **93**: 090408.
- [11] Orso, G. Attractive Fermi gases with unequal spin populations in highly elongated Traps[J], Phys. Rev. Lett, 2007, **98**: 070402 (2007).
- [12] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations[J], Phys. Rev. A, 2004, **70**: 013603.
- [13] T.Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, Local Pair Correlations in One-Dimensional Bose Gases[J], Phys. Rev. Lett, 2005, **95**: 190406.

- [14] M. Cheneau, P. Barmettler, D. Poletti, *et al*, Light-cone-like spreading of correlations in a quantum many-body system[J], Nature (London), 2012, **481**: 484.
- [15] T. Langen, R. Geiger, M. Kuhnert, *et al*, Local emergence of thermal correlations in an isolated quantum many-body system[J], Nat. Phys, 2013, **9**: 640.
- [16] J.C. Jaskula, G. B. Partridge, M. Bonneau, *et al*, Acoustic Analog to the Dynamical Casimir Effect in a Bose-Einstein Condensate[J], Phys. Rev. Lett, 2012, **109**: 220401.
- [17] Bess Fang, Aisling Johnson, Tommaso Roscilde, *et al*, Momentum-Space Correlations of a One-Dimensional Bose Gas[J], Phys. Rev. Lett, 2016, **116**: 050402.
- [18] I. Bouchoule, K. V. Kheruntsyan, and G. V. Shlyapnikov, Interaction-induced crossover versus finite-size condensation in a weakly interacting trapped one-dimensional Bose gas[J], Phys. Rev. A, 2007, **75**: 031606.
- [19] T. Jacqmin, B. Fang, T. Berrada, *et al*, Momentum distribution of one-dimensional Bose gases at the quasicondensation crossover: Theoretical and experimental investigation[J], Phys. Rev. A, 2012, **86**: 043626.
- [20] J. Armijo, T. Jacqmin, K. Kheruntsyan, *et al*, Mapping out the Quasicondensate transition through the dimensional crossover from one to three dimensions[J], Phys. Rev. A, 2011, **83**: 021605.
- [21] M. T. Batchelor, M. Bortz, Guan Xiwen, and N. Oelkers, Exact results for the 1D interacting Fermi gas with arbitrary polarization[J]. J. Phys, 2006a, Conf. Ser. **42**: 5.
- [22] R. Combescot and S. Giraud, Normal State of Highly Polarized Fermi Gases: Full Many-Body Treatment [J]. Phys. Rev. Lett, 2008, **101**: 050404.
- [23] R. Combescot, A. Recati, C. Lobo, and F. Chevy, Normal State of Highly Polarized Fermi Gases: Simple Many-Body Approaches[J]. Phys.Rev. Lett, 2007, **98**: 180402.
- [24] G. M. Bruun and P. Massignan, Decay of Polarons and Molecules in a Strongly Polarized Fermi Gas[J]. Phys. Rev. Lett, 2010, **105**: 020403.
- [25] M. Klawunn, and A. Recati, Fermi polaron in two dimensions: Importance of the two-body bound state[J].Phys. Rev. A, 2011, **84**: 033607.
- [26] C.J.M. Mathy, M. M. Parish, and D. A. Huse, Trimers, Molecules, and Polarons in Mass-Imbalanced Atomic Fermi Gases[J]. Phys.Rev. Lett, 2011, **106**: 166404.
- [27] R.Schmidt, and T. Enss, Excitation Spectra and rf Response near the Polaron-to-molecule Transition from the Functional Renormalization Group[J]. Phys. Rev. A,

- 2011, **83**: 063620.
- [28] J. M. Luttinger , An Exactly Soluble Model of a Many Fermion System[J]. J. Math. Phys. 1963, **4**: 1154
- [29] S.Tomonaga, Y. orii, Y. Suzuki, M. Kozuma, T. Sugiur, Remarks on Bloch's Method of Sound Waves applied to Many-Fermion Problems[J]. Prog. Theor. Phys. 1950, **5**: 544.
- [30] M. Gaudin, Un systeme a une dimension de fermions en interaction[J]. Phys. Lett., 1967a, **24A**: 55.
- [31] C. N. Yang, Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction[J]. Phys. Rev. Lett, 1967, **19**: 1312.
- [32] M. Olshanii, Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons[J]. Phys. Rev. Lett, 1998, **81**: 938.
- [33] T. Bergeman, M. G. Moore, and M. Olshanii, Atom-Atom Scattering under Cylindrical Harmonic Confinement: Numerical and Analytic Studies of the Confinement Induced Resonance[J]. Phys. Rev. Lett, 2003, **91**: 163201
- [34] Yajiang Hao, Yunbo Zhang, J. Q. Liang, and Shu Chen , Ground-state properties of one-dimensional ultracold Bose gases in a hard-wall trap, Phys. Rev. A, 2006, **73**: 063617.
- [35] Takahashi, Thermodynamic of One-Dimensional Solvable Models, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [36] Rang-qi Lin, Rui-biao Xu, The Algebra Proof of the Properties of the Convolution, Journal of Huzhou Teachers College[J], 2010, **32**.
- [37] M. Takahashi, Thermodynamic of One-Dimensional Solvable Models, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [38] Guan XiWen, T. Murray Batchelor, and Lee Chaohong, Fermi gases in one dimension : From Bethe ansatz to experiments[J]. Rev. Mod. Phys, 2013, **85**: 1633.
- [39] C. K. Lai, Thermodynamics of Fermions in One Dimension with a δ -Function Interaction[J]. Phys. Rev. Lett, 1971, **26**: 1472.
- [40] M. Takahashi, One-Dimensional Electron Gas with Delta-Function Interaction at Finite Temperature[J]. Prog. Theor. Phys, 1971b, **46**: 1388.
- [41] Guan X. W, M. T. Batchelor, C. Lee and M. Bortz, Phase transitions and pairing

- signature in strongly attractive Fermi atomic gases[J]. Phys. Rev. B, 2007, **76**: 085120.
- [42] J.S He, A. Foerster, Guan X W and M. T. Batchelor, Magnetism and quantum phase transitions in spin-1/2 attractive fermions with polarization, New Journal of Physics, 2009, **11**: 073009.
- [43] Guan, X.-W., M. T. Batchelor, and J. Y. Lee, Magnetic ordering and quantum statistical effects in strongly repulsive Fermi-Fermi and Bose-Fermi mixtures[J]. Phys. Rev. A, 2008b, **78**: 023621.
- [44] Guan. X. W, and Ho. T. H, Quantum criticality of a one-dimensional attractive Fermi gas[J]. Phys. Rev. A 2011, **84**: 023616.

攻读学位期间取得的研究成果

李旗, 王丽敏, 王利, 张云波, 最大纠缠两玻色子在一维光晶格中的量子行走, 山西大学学报(自然科学版)

致 谢

毕业论文的撰写即将结束，意味着我的三年研究生生活也即将画上一个句点。这三年犹如一个胀满的气球，里面装载着科研的艰难辛苦、同事的热情互助、导师的细心指导以及家人的默默支持。离别这个满是回忆的自习室，离别这个满是关怀的科研小组，离别这个满是热情的校园，心里默念：感谢，感谢！

要感谢自己，在大学毕业之际选择了繁琐枯燥焦灼的的研究生生活，在经历了科研任务的科学磨炼之后能有一种积极乐观、严谨治学的心态，能有一种平和又不乏斗志的生活态度。

要感谢导师，我的研究生导师张云波教授。初识张老师，温文尔雅，一种知识分子的儒雅特质让我对他的教学理念充满好奇和期待。每周两次的小组讨论以及不定时的课题探索让我的好奇和期待迅速转化为一种莫名的压力。虽然如此，张老师严谨的治学态度和不辞辛苦的钻研精神，不断感化着小组的每一位学生，同样也让我对研究生生活有了新的理解。三年的时间，虽不足以水滴石穿，但也足以让我养成一种良好的学习习惯，足以督促自己以身作则去践行老师的为人准则。张老师，不仅仅是一位传道授业解惑的教师。

要感谢科研小组的每一位成员，那些既关心我生活又辅导我学习的师兄师姐、学弟学妹们。这个小组，安安静静的气氛里总是不时地透着点点滴滴的温馨。他们总是细心地询问我的研究进展，耐心地引导我发现自己的不足之处，默默地帮助我掌握新的技能。

要感谢理论所的每一位老师，你们引领我推开了物理这扇门，让我看到了一个新奇的世界，感悟到了站在知识云端的你们所具有的独特魅力，也体验了这个科学世界里独有的乐趣。

要感谢每天朝夕相处、热情帮助的自习室同事们！

要感谢那一群可爱又可亲、默契如家人的舍友们！

要感谢远在家乡却依然惦念、默默守护我的父亲、母亲和兄长！

要感谢——

此致，致所有给予我关心、帮助、指导以及建议和批评的人们，谢谢你们！

最后感谢参加阅读和答辩的各位评审专家与教授。

个人简历及联系方式

姓名：李旗

性别：女

籍贯：山西省沁县

学习经历：2013年9月至2016年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

联系方式：18835126393

电子邮箱：dq72fighting@163.com.

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日