

山西大学

2015 届硕士学位论文

一维光晶格中两任意子 关联性质的研究

作者姓名	王丽敏
指导教师	张云波 教授
学科专业	理论物理
研究方向	一维量子气体
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2012 年 9 月至 2015 年 6 月

二〇一五年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2015

Research on correlation of two anyons in
one-dimensional optical lattices

Student Name	Limin Wang
Supervisor	Prof. Yunbo Zhang
Major	Theoretical physics
Field of Research	One-Dimensional quantum gas
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2012.09-2015.06

June, 2015

目录

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 晶格模型.....	1
1.1.1 BEC 简介.....	1
1.1.2 光晶格的实验实现.....	2
1.1.3 玻色-哈伯德模型.....	3
1.2 量子行走.....	5
1.2.1 离散时间量子行走.....	6
1.2.2 连续时间量子行走.....	7
1.3 任意子模型.....	8
1.3.1 Haldane 统计.....	8
1.3.2 Kundu 任意子.....	9
1.3.3 Girardeau 任意子.....	10
1.4 本文内容.....	11
第二章 两全同粒子在一维光晶格中的量子行走.....	13
2.1 相互作用系统的量子行走.....	13
2.1.1 独立系统的量子行走.....	13
2.1.2 同一格点相互作用的玻色系统的量子行走.....	17
2.1.3 近邻格点相互作用的玻色、费米、硬核玻色系统的量子行走.....	18
2.2 量子行走的布洛赫振荡.....	28
2.3 量子行走的安德森局域.....	35
2.4 小结.....	36
第三章 一维光晶格中两相互作用任意子的量子行走.....	37
3.1 两相互作用任意子的关联.....	37
3.2 两相互作用硬核任意子的关联.....	42
3.3 小结.....	45

第四章 总结与展望.....	47
4.1 总结.....	47
4.2 展望.....	48
附录 A.....	51
附录 B.....	53
参考文献.....	55
攻读学位期间取得的研究成果.....	63
致 谢.....	64
个人简况及联系方式.....	65
承 诺 书.....	66
学位论文使用授权声明.....	67

Contents

Chinese Abstract	I
ABSTRACT	III
Chapter 1 Preface	1
1.1 Lattice Model.....	1
1.1.1 A brief introduction to Bose-Einstein Condensate.....	1
1.1.2 Experimental realization of optical lattices.....	2
1.1.3 Bose-Hubbard model.....	3
1.2 Quantum walks.....	5
1.2.1 Discrete-time quantum walks.....	6
1.2.2 Continuous-time quantum walks.....	7
1.3 Anyon Model.....	8
1.3.1 Haldane statistics.....	8
1.3.2 Kundu anyon.....	9
1.3.3 Girardeau anyon.....	10
1.4 The content of this paper.....	11
Chapter 2 Quantum walks of two identical particle in one-dimensional optical lattices	13
2.1 Quantum walks of an interacting system.....	13
2.1.1 Quantum walks of an independent system.....	13
2.1.2 Quantum walks of a bosonic system with on-site interaction.....	17
2.1.3 Quantum walks of a bosonic/fermionic/hard-core bosonic system with neighbor site interaction.....	18
2.2 Bloch oscillations in quantum walks.....	28
2.3 Anderson localization in quantum walks.....	35
2.4 Conclusions.....	36
Chapter 3 Quantum walks of two interacting anyons in one-dimensional optical lattices	37
3.1 Correlation of two interacting anyons.....	37
3.2 Correlation of two interacting hard-core anyons.....	42
3.3 Conclusions.....	45

Chapter 4 Summary and Outlook	47
4.1 Summary.....	47
4.2 Outlook.....	48
Appendix A	51
Appendix B	53
References	55
Research achievements	63
Acknowledgement	64
Personal profiles	65
Letter of commitment	66
Authorization statement	67

中文摘要

近年来在凝聚态物理的冷原子领域中，一维多体系统的量子关联受到广泛的关注。其中，考虑到光晶格对固体晶格环境形象、逼真的模拟，基于玻色-哈伯德模型，人们构造各种承载玻色子、费米子的一维光晶格模型，通过研究多粒子的量子行走实现了对量子关联动力学的操控，极大程度上促进了以量子行走为理论基础的量子算法、量子计算的发展。

本文从连续时间量子行走理论出发，通过数值求解，首先讨论了基于满足周期性边界条件的一维光晶格中两全同粒子的量子行走，关注了量子统计性质，初始量子态，相互作用强度以及相互作用模式对两粒子量子行走关联效应的影响。其次分析了由线性势导致的纠缠态的布洛赫振荡，间接展示了量子行走的周期性动力学演化行为，以及非线性项对振荡周期的破坏。接着，就无序晶格系统中量子关联的安德森局域现象做了简单阐述。

在上述工作的基础上，本文主要借助 Anyon-Boson 和 Anyon-Fermion 两种映射理论分别研究了分数统计因子对两相互作用的任意子（Kundu 任意子）和硬核任意子（Girardeau 任意子）量子行走二阶关联性质的影响。结果表明，Kundu 任意子坐标空间的两体关联函数在玻色、费米两极限下关于粒子的初始位置对称。然而，在动量空间，这种对称现象仅存在于玻色极限。一旦统计参数偏离玻色、费米两极限，有趣的非对称现象就会出现在关联矩阵中。这种非对称现象正是来源于任意子服从的分数统计。另外，Girardeau 定义下的任意子（硬核任意子）在坐标空间的两体关联矩阵不受统计参数的影响，且随着近邻相互作用的增大，由聚束行为过渡到绑定行为。在强相互作用（近邻）下，随着统计参数的变化，动量空间的两体关联图像清晰地呈现了由两条条纹合并为单一条纹的缓慢变化过程，实现了费米系统到硬核玻色系统的演化。最终，两种映射理论都没有完美实现玻色系统和费米系统的过渡，任意一种映射都只能退回到一种极限，所以不能简单地认为任意子就是一种介于玻色子、费米子之间的粒子。

关键词：光晶格；量子行走；量子关联；映射理论；分数统计参数

ABSTRACT

In recent years in the field of condensed matter physics of cold atoms, quantum correlation in one-dimensional many-body quantum systems receives widespread attention. So, considering a vivid simulation of the solid lattice environment by optical lattice, people construct various one-dimensional optical lattice models formed by bosons and fermions based on the Boson-Hubbard model. The implementation of the quantum correlation dynamics manipulation through the study of multiparticle quantum walks, to a great extent, promotes the developments of quantum algorithms and quantum computations, which are based on the theory of quantum walks.

Beginning with continuous-time quantum walks theories, via the numerical method, this paper firstly discusses the quantum walks of two identical particles in one-dimensional lattices with periodic boundary conditions, and focuses on the effects of quantum statistics, initial quantum state, interaction strength and interaction pattern on the correlation of two quantum walkers. Secondly, we analyse the Bloch oscillations of entangled state induced by linear potential, which indirectly show the periodic evolution of the dynamics of quantum walks, and the nonlinear terms break the oscillation periods. And then, a brief discussion about Anderson Localization of quantum correlation in a disordered lattice is given.

On the base of the above works, we mainly investigate the impact of the fractional statistical parameter on second-order correlations of two interacting anyonic quantum walkers as well as hard-core anyonic quantum walkers based on the Anyon-Boson mapping and Anyon-Fermion mapping, respectively. The results show that the two-body correlations in position space are symmetric about the initial sites of two quantum walkers in the Bose limit and Fermi limit, while in momentum space this happens only in the Bose limit. An interesting asymmetry arises in the correlation once the statistical parameter deviates from the two limits. It turns out that the origin of this asymmetry comes from the fractional statistics that anyons obey. On the other hand, the two-body correlations of the anyons defined by Girardeau, i.e. the hard-core anyons, show uniform behaviors from antibunching to cowalking regardless of the statistical parameter with increasing nearest-neighbor interaction. The momentum correlations in the case of strong interaction

undergo a smooth process of two stripes smoothly merging into a single one with increasing fractional statistical parameter, which is representative of the evolution of fermions into hard-core bosons. Eventually, two mappings do not realize a perfect transition between bosons and fermions, any one only converges to one limit. Thus anyons are not simply intermediate particles between bosons and fermions.

Key words : Optical lattice; Quantum walk; Quantum correlation; Mapping theories; Fractional statistical parameter

第一章 绪论

在量子力学诞生的前半世纪，根据量子统计性质，人们普遍认为自然界中只存在玻色、费米两种粒子。全同玻色子系统服从玻色—爱因斯坦统计，其允许多个粒子处在同一单量子态，系统的波函数具有交换对称性；而全同费米子系统服从费米—狄拉克统计，由于泡利不相容原理，一个单量子态上最多允许存在一个粒子，系统的波函数具有交换反对称。30多年前，人们提出在二维系统中存在一种更为一般化的粒子—任意子^[1-5]，其满足分数统计，两个任意子位置的交换将引进一个统计相因子 $e^{-i\chi\pi}$ ($0 < \chi < 1$)。从此，任意子成为凝聚态物理中非常重要的一个概念，引起人们广泛关注。下面我们介绍本文相关的几个物理概念。

1.1 晶格模型

1.1.1 BEC 简介

关于玻色-爱因斯坦凝聚的理论预言可追溯到 80 多年前，也就是上世纪 20 年代。1924 年，印度物理学家玻色就一篇关于光子统计力学的文章手稿征求爱因斯坦的意见，爱因斯坦认识到该工作的重要性。很快，他将玻色对光子的统计方法推广到原子数量较大的系统。爱因斯坦认为对于没有相互作用，且由大量玻色子组成的气体，当其低于某一温度时，将会有可观数量的原子聚集在最低能量量子态上。这种独特的凝聚现象被称为玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein Condensate, 简称为 BEC)。该凝聚状态下，系统中原子的物理特性完全一致，单个粒子的量子特性通过宏观量子现象实现。90 年代左右，快速发展的低温激光冷却、囚禁技术和不断成熟的实验技术，极大程度上推动了冷原子领域的科研热度。1995 年，两位美国科学家魏曼 (Wieman)、康奈尔 (Cornell) 和他们的研究小组使用激光冷却和磁阱中的蒸发冷却将稀薄的气态 ^{87}Rb 原子的温度降低到 170 nK，首次观察到玻色—爱因斯坦凝聚现象，紧随其后，MIT 研究小组在 ^{23}Na 原子蒸汽中实现了 BEC。三个小组实验上 BEC 的实现，在物理界引起强烈的反响，三位科学家也因他们的研究成果共享了 2001 年诺贝尔物理奖。此后，BEC 理论和实验的迅速发展为科研人员在冷原子领域的研究提供了依据。同时，鉴于原子气体 BEC 在实验上具有很强的可操控性，其成为研究各种量子多体现象的载体。

1.1.2 光晶格的实验实现

光晶格中的超冷原子系统与凝聚态固体物理紧密相连。而光晶格势是实现晶格气体的基本工具。在量子光学中，一个处在随时间变化的振荡电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 中的原子将获取一个偶极矩 \mathbf{d} 。当电场频率远不及原子共振频率时，电子没有明显的跃迁现象，相应的感应偶极矩表示为

$$\mathbf{d}_i^{(\pm)}(t) = \sum_{j=x,y,z} \alpha_{ij}(\omega_L) E_j^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

其中 $d_i^{(\pm)}$ ($i = x, y, z$) 是偶极矩在不同方向上的投影分量，上标正、负号代表频率的正负取值， ω_L 是激光频率， $\alpha_{ij}(\omega_L)$ 是极化张量的矩阵元。极化张量用以表征原子对其作用电场的反应。极化率一般依赖于激光频率和原子非共振激发态的能量。当其中一个激发能为 $E_1 = \hbar\omega_1$ 的激发态，相比其他态更接近共振态时，相应的极化率与激光失谐 Δ ($\Delta = \omega_L - \omega_1$) 成反比。在这种情形下，电子的能量将发生变化，变化量为 $\Delta E = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ ，这一原理称为交流斯塔克效应。能量变化量具体表示为

$$\Delta E(\mathbf{r}, t) = -2 \sum_{i,j=x,y,z} \text{Re}(\alpha_{ij}(\omega_L) E_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)) \quad (1.2)$$

当极化率是标量时，感应偶极矩与电场平行，即 $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ ，由交流斯塔克效应引起的能量平移量为

$$\Delta E(\mathbf{r}, t) = -2 \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r}, t) \propto \frac{I(\mathbf{r}, t)}{\Delta} \quad (1.3)$$

其中 $I(\mathbf{r}, t)$ 是激光光束的强度，一般不随时间变化。原子感受到一种与激光场强空间分布相关的周期性光势，且考虑激光场强与时间无关，光势可表示为

$$V_{opt}(\mathbf{r}) = \Delta E(\mathbf{r}) \propto \frac{I(\mathbf{r})}{\Delta} \quad (1.4)$$

式 (1.4) 是对原子实现光学操控和俘获的基础。如果相对于原子共振频率，激光频率是红失谐(即 $\Delta < 0$)，原子将被吸附到势能最小的最大场强处，反之，蓝失谐(即 $\Delta > 0$) 激光则会将原子推出该区域，因为这时的势能最小处在场强最小的位置。依据这一光学偶极囚禁原理，冷原子的一维、二维、三维光学囚禁可通过将冷原子装载于相互干涉的多束激光形成的周期性网状势阱来实现，这种空间上的周期性排列类似于固体物理学中的“晶体结构”，为此人们称之为“光学晶格”，简称“光晶格”(Optical Lattice)。

用驻波囚禁原子的思想可追溯到 1968 年 Letokhov 的工作^[6]，而实验上第一次实现光晶格是在 1987 年^[7]，随后，Dalibard 和 Cohen-Tannoudji^[8,9]在理论上提出一维

光晶格是由相向传播的正交线偏振激光形成的呈现周期排列的点阵，可以囚禁原子。高维光晶格通过不同方向传播的驻波叠加来实现，图 1.1 给出的是二维和三维光晶格示意图。

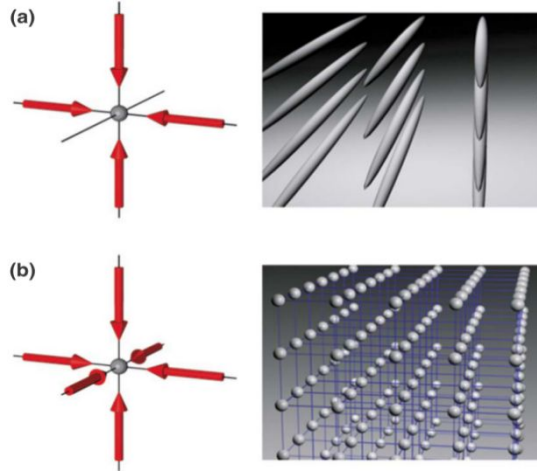


图 1.1 二维与三维光晶格示意图^[10]

由于光晶格有较好的操控性，通过改变激光的偏振、强度、布局 and 频率等，不仅可以构造任意几何形式的晶格，也可以改变光晶格的晶格常数、势阱深度、对称性等性质，比如通过 Feshbach 共振精确控制原子间的相互作用。此外，由于在光晶格模型中可以设定原子的位置和状态，这将为量子计算及量子信息处理等方面提供重要的指导。

1.1.3 玻色-哈伯德模型

哈伯德模型最初被提出是作为一种理想模型来研究过渡金属中电子的磁特性。而最初的玻色-哈伯德 (Bose-Hubbard) 模型则被用来研究具有强电荷效应的超导薄膜中的库伯(Cooper)对^[11,12]和纳米管中惰性气体的吸收^[13]等物理现象，如今它已成为凝聚态物理中的一个经典模型。在近几年的研究中，鉴于光晶格的可操控性，各种变体的玻色-哈伯德模型相继产生，为研究晶格模型中粒子的量子行为提供了良好的平台。

在光晶格束缚势场中，相互作用的超冷玻色子的哈密顿量为：

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\mathbf{x}) + V_T(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

式中第一项是动能项，最后一项描述的是原子间的相互作用项，且为短程势。其中， $\psi(\mathbf{x})$ 表示玻色子场算符， $V_0(\mathbf{x})$ 表示周期性光晶格势， $V_T(\mathbf{x})$ 描述一个外加的缓变束缚势（比如磁场），如图 1.2 所示， a_s 表示 s 波散射长度， m 是单个原子的质量。

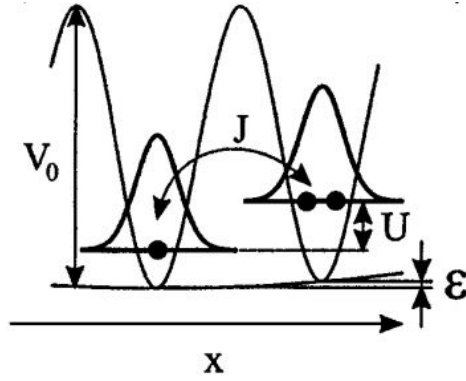


图 1.2 光晶格中的 Bose-Hubbard 模型示意图^[14]，势阱底部的能级由束缚势 V_T 产生

在固体理论中，布洛赫（Bloch）函数是理想晶格中单原子系统的能量本征函数。它是倒格矢空间的周期函数，可在正格矢空间作傅里叶级数展开，相应的系数被称为瓦尼尔（Wannier）函数。瓦尼尔函数具有正交性，在不同格点之间彼此正交，因此瓦尼尔函数具有很好的定域特性，常用来描述单格点上的原子状态。同样，瓦尼尔函数也具有完备性，由它做基矢构造的希尔伯特空间称为瓦尼尔表象。为了讨论光晶格周期势中格点之间的原子相互作用，在瓦尼尔表象中，将玻色场算符用瓦尼尔基矢作展开：

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_i b_i w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1.6)$$

其中 b_i 是第 i 个格点上的玻色湮灭算符， $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ 是原子坐标。利用式 (1.6) 玻色场算符的展开式，哈密顿量 (1.5) 式可约化为玻色-哈伯德模型

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} a_i^\dagger a_j + \sum_i \varepsilon_i n_i + \frac{1}{2} U \sum_i n_i (n_i - 1) \quad (1.7)$$

其中， J 为近邻跃迁（hopping）项，描述玻色子在相邻格点间的隧穿能量，相应的隧穿耦合强度由隧穿矩阵元

$$J = \int d^3x w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\mathbf{x}) \right) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (1.8)$$

表征， a_j (a_j^\dagger) 是玻色子湮灭（产生）算符，求和指标 $\langle i, j \rangle$ 表示对最近邻格点求和； n_i 表示第 i 个格点上的粒子数算符， ε_i 给出了由外加缓变势导致的第 i 个格点的能量偏移，其具体表示为：

$$\varepsilon_i = \int d^3x V_T(\mathbf{x}) |w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^2 \approx V_T(\mathbf{x}_i) \quad (1.9)$$

最后一项表示同一格点上原子之间的相互作用，相互作用的强弱由矩阵元

$$U = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3x |w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^4 \quad (1.10)$$

决定。

1.2 量子行走

量子行走是经典随机行走的量子力学推广，它不仅是量子传输的一种基本现象，同时也是展开量子算法和实现量子计算的实用性工具。与经典随机行走相比，由于量子态的相干叠加特性，其具有优于经典随机行走的快速扩散特性，如图 1.3^[15]。

量子行走由 Aharonov 等人于 1993 年^[16]首次提出，该概念的提出，最初的目的是出于寻找一种对于处理相同的问题，有没有较经典算法效率更高的算法存在？与经典随机行走中的离散、连续两种情形对应，量子行走也分为离散时间与连续时间两种。其中连续时间量子行走由 Farhi 和 Gutmann 于 1998 年^[17]首次提出，而离散时间量子行走由 Watrous 于 2001 年^[18]提出，同年由 Ambainis 等人提出了离散时间量子行走中的 Hadamard 行走^[19]。

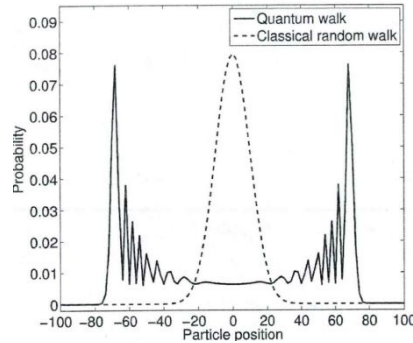


图 1.3 移动 100 步的经典随机行走（虚线）和量子行走（实线）的概率分布

离散时间和连续时间量子行走均被广泛应用于量子算法和量子计算，Childs 等人^[20]利用连续时间量子行走使得组合二叉树的到达时间，同经典方法相比，呈现指数加速，Shenvi 等人^[21]认为离散时间量子行走（可称作 Grover 搜索算法），在一组混乱的数据库中找到目标数据的效率较最优的经典算法同样是指数加速，Ambainis^[22]提出利用量子行走解决元素不同问题的最优算法，达到 $O(N^{2/3})$ ，Childs^[23]和 Lovett 等人^[24]分别利用连续时间量子行走和离散时间量子行走来实现普适量子计算，以及后来，Childs 等人^[25]为了提高效率利用多粒子量子行走进行普适量子计算。除此之外，具有多个硬币^[26]或者退相干硬币^[27]的量子行走，以及局域^[28-31]，无序^[32,33]，振

荡^[34-36], 拓扑^[37-40], 相变^[41]等其他情形的量子行走问题也被研究。相对较多的关于量子行走的理论工作, 到目前为止, 也已经有很多量子行走的实验方案被实现, 其中包括杜江峰等人^[42]及 Ryan 等人^[43]在核磁共振系统中进行 2-qubit 的连续时间量子行走和 3-qubit 的离散时间量子行走, Grossman 等人^[44]在钠玻色-爱因斯坦凝聚态上和 Perets 等人^[45]在波导晶体上实现了离散时间量子行走, 还有离子阱^[46], 光晶格^[47,48], Bose-Einstein 凝聚态^[49], 量子 accelerator modes^[50], 量子点^[51]等方面都实现了量子行走, 以及 2012 年, Lahini 等人^[52]光晶格中两相互作用玻色子和 Sansoni 等人^[53]波导晶体上两光子的量子行走, 以及二维系统量子行走的实现^[54], 最近, Philipp M. Preiss 等人^[55]在光晶格中引入倾斜梯度磁场实现了强关联系统的量子行走。

此外量子行走理论也用来解释其他一些学科领域的相关现象, 比如生物系统中光合作用过程中的能量输运^[56,57]。

1.2.1 离散时间量子行走

为了更好的了解量子行走和经典随机行走之间的差异性, 在介绍离散时间量子行走之前, 我们首先简单介绍离散时间经典随机行走。离散时间经典随机行走的行走者用硬币表示, 每次投掷硬币后, 根据硬币的正反状态决定下一步行走的方向。如果是在一条直线上行走, 则硬币有正反两面, 相对移动就是左右两个方向。而离散时间量子行走与经典情形相似, 不同的只是硬币投掷改为硬币算符作用于硬币态上。这里具体讨论一下一维量子行走的情形, 一维量子行走是一维经典随机行走的量子情形: 考虑一个粒子处在希尔伯特空间 $H \equiv H_p \otimes H_c$ 上, 其中 H_p 由正交矢量 $\{|i\rangle, i \in \mathbb{Z}\}$ 展开, 表示这个粒子位于直线上的位置, 且 H_c 代表二维硬币空间, 其可以用两正交矢量 $|c = 0, 1\rangle$ 表示, 代表硬币的状态。

初始时刻, 硬币态可以表述为如下的叠加态

$$|\psi_c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.11)$$

其中 α, β 是处于不同硬币态的概率幅, 且满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。在离散时间量子行走理论中, 表示状态的波函数要写为位置态与硬币态直积的形式:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i \sum_c f_{ic}(t) |i\rangle \otimes |c\rangle \quad (1.12)$$

相应的, 初态要写为

$$|\psi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |x_0\rangle \quad (1.13)$$

$|x_0\rangle$ 表示初始时刻的位置态。

随后粒子的每一步移动将借助演化算符 U 完成，演化过程表示为

$$|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle \quad (1.14)$$

其中 $U = \left(\sum_c |c\rangle\langle c| \otimes S_c \right) \left(C \otimes \sum_i |i\rangle\langle i| \right)$ ， C 是硬币投掷算符， S_c 是依赖于投掷算符的平移算符，且表示为 $S_c = \sum_i |i + (-1)^{c+1}\rangle\langle i|$ ， t 是移动的步数。

1.2.2 连续时间量子行走

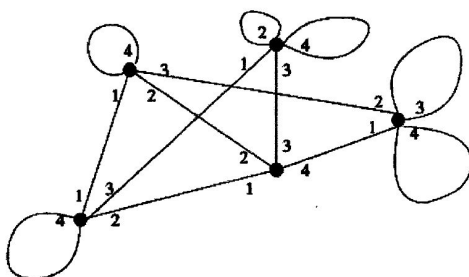


图 1.4 图 $G(V, E)$ ^[15]

在一个图上的经典连续时间随机行走是一个 Markov 过程。如图 1.4 所示，一个图 $G(V, E)$ 由点集合 $V = \{1, 2, 3, \dots, \nu\}$ 和两点相连的边集合 $e_i(j, k) \in E$ 构成。在图上的行走只发生在有边相连的两个点之间，令 γ 为跃迁几率，粒子在图上行走的过程可用 Markovian 主方程表示：

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = H\mathbf{P}(t) \quad (1.15)$$

其中取实数值的几率分布矢量 $\mathbf{P}(t)$ 用来描述随机行走的状态，转移几率矩阵 H 定义如下

$$H_{jk} = \begin{cases} -\gamma_{jk} & j \neq k, \text{且} j \text{和} k \text{由一条边相连} \\ 0 & j \neq k, \text{且} j \text{和} k \text{不相连} \\ S_j & j=k \end{cases} \quad (1.16)$$

式中相应的 $S_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N \gamma_{jk}$ ，用以保证几率流守恒，即对于某一点，粒子由该点跃迁到其他点的几率要等于其他点上的粒子跃迁到此点的几率。将上面的描述扩展到量子领域，经典随机行走中几率分布矢量 $\mathbf{P}(t)$ 的角色将被复数形式的波函数 $|\psi(t)\rangle$ 代替。

同时取 $\hbar = 1$ ，系统的动力学演化遵循含时薛定谔方程

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (1.17)$$

或演化方程

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle \quad (1.18)$$

总之，连续时间量子行走只发生在位置空间 H_p ，而不需要硬币空间，不需要投掷硬币。简单地说就是，我们只要知道系统的哈密顿量，选择一组具有完备、正交性的基矢构造希尔伯特空间，选择一初始状态，就可以计算我们所关注的物理量。

1.3 任意子模型

任意子的提出成功地解释了分数量子霍尔效应^[58-60]。然而这些年来，对于任意子的研究一直局限于二维系统^[61,62]。直到 Haldane 提出另一种不依赖于空间维度的分数统计概念，即 Haldane 统计^[63]，这种统计定义可被视为一种广义的泡利不相容原理，同时它也是分数不相容统计的基础，其中分数不相容统计在低维凝聚态系统中得到广泛的应用。

1.3.1 Haldane 统计

Haldane 统计的定义用公式表示为^[63]

$$\Delta d_\alpha = -\sum_\beta g_{\alpha\beta} \Delta N_\beta \quad (1.19)$$

这是一个微分表达式。其中，下标 α 、 β 表示粒子的种类； d_α 表示一个 α 粒子的希尔伯特空间维度，其被要求是有限且广延的，当向系统增加一个 α 粒子时， d_α 将发生变化，并且这一变化一般还要受到系统中已有粒子的影响； $g_{\alpha\beta}$ 表征统计参数，反映粒子之间的一种统计相互作用； N_β 是 β 粒子的数目。此式意味着一个 α 粒子单粒子态总数目（希尔伯特空间维度）的变化与系统粒子数的变化之间存在一种线性关系。当 $\alpha \neq \beta$ 且 $g_{\alpha\beta} \neq 0$ 时，则称系统存在统计相互作用。通常研究的玻色、费米统计只是 Haldane 统计的两种特殊情况。 $g_{\alpha\beta} = 0$ 对应玻色统计，因为玻色系统是允许多个粒子处在同一单粒子态上的，新加入系统中的粒子的状态不会受到已有粒子的影响；相应的 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ 对应费米统计，由于费米系统满足的泡利不相容原理，一个单粒子量子态上仅能容纳一个粒子，新加入的粒子必然只能去占据其他空的单粒子量子态。除此， $g_{\alpha\beta}$ 的其它取值，用于描述介于玻色、费米两统计之间的分数统计。

相应的，Haldane 统计的积分表达式为

$$d_\alpha = G_\alpha - \sum_\beta g_{\alpha\beta} (N_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \quad (1.20)$$

其中， G_α 等于 α 粒子系统单粒子态的总数目，亦表示在空系统中只加入一个 α 粒子

对应的 Hilbert 空间维度。

1.3.2 Kundu 任意子

考虑一个具有双 δ 势相互作用的一维玻色系统，其哈密顿量表示为：

$$H_N = -\sum_k \partial_{x_k}^2 + \sum_{\langle k,l \rangle} \delta(x_k - x_l) \left[c + i\kappa (\partial_{x_k} + \partial_{x_l}) \right] + \gamma_1 \sum_{\langle j,k,l \rangle} \delta(x_j - x_k) \delta(x_l - x_k) + \gamma_2 \sum_{\langle k,l \rangle} \delta(x_k - x_l)^2 \quad (1.21)$$

对于该复杂系统，除了一些特殊的情况 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$)，其一般情形至今仍无法精确求解。但是，取定 $\gamma_1 = \gamma_2 = \kappa^2$ 时，此模型可以转化为一个 δ 相互作用形式相对简单的任意子模型^[64]。首先，写出上述哈密顿量对应的非线性量子场论形式

$$H_N = \int dx \left\{ \left[\psi_x^\dagger \psi_x + c\rho + i\kappa\rho (\psi_x^\dagger \psi_x - \psi_x \psi_x^\dagger) \right] + \kappa (\psi_x^\dagger \rho \psi_x) \right\} \quad (1.22)$$

其中， $::$ 表示正规乘积， $\psi(x)$ 与其共轭项 $\psi^\dagger(x)$ 是玻色场算符，下标 x 表示对 x 求偏导， $\rho = \psi^\dagger \psi$ 。借助规范变换定义一个新的场算符 $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi}(x) = e^{-i\kappa \int_{-\infty}^x \psi^\dagger(x') \psi(x') dx'} \psi(x) \quad (1.23)$$

结合其共轭形式 $\tilde{\psi}^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) e^{i\kappa \int_{-\infty}^x \psi^\dagger(x') \psi(x') dx'}$ ，可以用新算符 $\tilde{\psi}$ 、 $\tilde{\psi}^\dagger$ 重新将玻色场哈密顿量表示为^[63-65]

$$\tilde{H}_N = \int dx \left\{ \left[\tilde{\psi}_x^\dagger \tilde{\psi}_x + c (\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi})^2 \right] \right\} \quad (1.24)$$

哈密顿量 \tilde{H}_N 对应的 N 粒子本征态可以被写为^[65,66]

$$|\Psi\rangle_N = \int d^N x e^{\frac{-i\kappa N}{2} \Phi_N(x_1, \dots, x_N)} \tilde{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \tilde{\psi}^\dagger(x_N) |0\rangle \quad (1.25)$$

非线性方程 \tilde{H}_N 的形式虽然与之前研究的模型^[67,68]完全相同，但新算符需满足如下的对易关系

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^\dagger(x_1) \tilde{\psi}^\dagger(x_2) &= e^{i\kappa \varepsilon(x_1 - x_2)} \tilde{\psi}^\dagger(x_2) \tilde{\psi}^\dagger(x_1) \\ \tilde{\psi}(x_1) \tilde{\psi}^\dagger(x_2) &= e^{-i\kappa \varepsilon(x_1 - x_2)} \tilde{\psi}^\dagger(x_2) \tilde{\psi}(x_1) + \delta(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (1.26)$$

这里， $\varepsilon(x)$ 为符号函数，具体形式为

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

利用上述对易关系，可以写出与 \tilde{H}_N 相应的力学哈密顿量^[69]

$$\tilde{H}'_N = -\sum_k \partial_{x_k}^2 + 2c \sum_{\langle k,l \rangle} \delta(x_k - x_l) \quad (1.28)$$

其中 $\varphi_N(x_1, \dots, x_N)$ 是 \tilde{H}'_N 的本征态。

定义系统波函数

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | \tilde{\psi}(x_1) \cdots \tilde{\psi}(x_N) | N \rangle \quad (1.29)$$

利用对易关系可以证明交换系统相邻两粒子，波函数 φ_N 满足下面的交换对称关系

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = e^{-ik\varepsilon(x_i - x_{i+1})} \varphi_N(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_N) \quad (1.30)$$

关于任意两粒子的交换对称关系由上式通过逐步迭代得到

$$\varphi_N(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = e^{-ik \left[\sum_{m=i+1}^j \varepsilon(x_i - x_m) - \sum_{m=i+1}^{j-1} \varepsilon(x_j - x_m) \right]} \varphi_N(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) \quad (1.31)$$

最终，一个形式复杂的玻色系统的量子力学问题就成功转换为与之等价的、形式上简单的任意子问题。只是需要注意任意子系统的哈密顿量形式虽与 Lieb-Liniger 气体完全一样，但是任意子系统对波函数 $\varphi_N(x_1, \dots, x_N)$ 作了更高的要求^[65,66]。

1.3.3 Girardeau 任意子

在一些物理模型中，当讨论零距离相互作用^[70]时，利用 Kundu 定义下的任意子处理问题时将非常棘手。为了避免这一困难，另一种与之相似但性质截然不同的一维任意子定义诞生了，即 Girardeau 任意子。Girardeau 提出由费米场算符出发定义任意子场算符：

$$\psi_a(x) = e^{-ik \int_{-\infty}^x \rho(x') dx'} \psi_f(x) \quad (1.32)$$

其中下标 a, f 分别代表任意子系统和费米系统， $\rho(x) = \psi_a^\dagger \psi_a = \psi_f^\dagger \psi_f$ 是两系统的粒子数算符。场算符满足对易关系

$$\begin{aligned} \psi_a(x_1) \psi_a(x_2) &= -e^{ik\varepsilon(x_1 - x_2)} \psi_a(x_2) \psi_a(x_1) \\ \psi_a(x_1) \psi_a^\dagger(x_2) &= -e^{-ik\varepsilon(x_1 - x_2)} \psi_a^\dagger(x_2) \psi_a(x_1) + \delta(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (1.33)$$

同 Kundu 任意子的定义比较，可发现，Girardeau 任意子的定义中硬核约束条件自动满足： $\psi_a^2(x) = [\psi_a^\dagger(x)]^2 = 0$ ， $\{\psi_a, \psi_a^\dagger\} = 0$ 。基于上述对易关系，Girardeau 定义下的任意子多体波函数中相邻两粒子的交换满足下面的式子

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) = -e^{-ik\varepsilon(x_i - x_{i+1})} \varphi_N(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_N) \quad (1.34)$$

相应地，任意两粒子的交换满足

$$\varphi_N(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -e^{-ik \left[\sum_{m=i+1}^j \varepsilon(x_i - x_m) - \sum_{m=i+1}^{j-1} \varepsilon(x_j - x_m) \right]} \varphi_N(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) \quad (1.35)$$

上世纪 60 年代，Girardeau 在求解硬核模型时，引入了 Bose-Fermi 映射理论。近半个世纪后，Girardeau 由费米场出发定义的一维任意子，把 Bose-Fermi 映射关系^[71]

推广到 Anyon-Fermion 映射关系^[70]，随后被广泛应用于后来的理论研究工作^[72-77]。

鉴于上述任意子的两种定义，可以考虑把复杂的一些任意子问题转化成较为简单的玻色、费米问题来讨论。这也是本文在第三章讨论任意子问题的出发点。

1.4 本文内容

基于上述理论知识背景，主要做了以下工作：在第二章中，我们首先考虑了两粒子在满足周期性边界条件的一维均匀光晶格中，不同的量子统计系统、初始量子态以及相互作用模式对粒子关联性质的影响；其次，通过引入一线性外势，实现了晶格中的布洛赫振荡；最后，简单介绍了无序晶格系统中的安德森局域现象。第三章，我们选择任意子作为研究对象，讨论了统计参数对两粒子关联效应的影响。第四章是我们对现有工作的一个总结，以及后期工作的一些展望。

第二章 两全同粒子在一维光晶格中的量子行走

同单粒子量子行走相比，多粒子的量子行走会呈现一些新颖的非经典关联性质，这将促进实用量子技术的发展。然而，考虑到粒子数的增加会导致希尔伯特空间维度的指数上升，加大计算的成本。在本章，我们选择两粒子作为研究对象，从连续时间量子行走理论出发，研究了一维光晶格中两全同粒子的量子行为对初态波函数、量子统计性质、相互作用强度、相互作用模式、以及晶格的状态（均匀、倾斜、无序）的依赖效应。

2.1 相互作用系统的量子行走

考虑周期性边界条件下一维光晶格中两全同粒子的量子行走，如图 2.1。系统的哈密顿量可写为：

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+d} \quad (2.1)$$

相应的周期边界条件为

$$a_{-L} = a_{L+1} \quad (2.2)$$

其中， a_l^\dagger (a_l) 表示在第 l 格点上产生（湮灭）一个粒子， $n_l = a_l^\dagger a_l$ 是粒子数算符， d 表示相互作用模式，可取不同的整数，比如 $d=0$ 表示同一格点相互作用， $d=1$ 表示最近邻相互作用， $d=2$ 表示次近邻相互作用，以此类推。式 (2.1) 中的第一项描述系统的动能， J 为最近邻格点之间的跳跃系数；第二项是系统的相互作用项， V 代表相互作用强度。晶格尺度 $L_{\text{total}}=2L+1$ ， l 为格点指标，且 $l=-L, -L+1, \dots, L$ 。

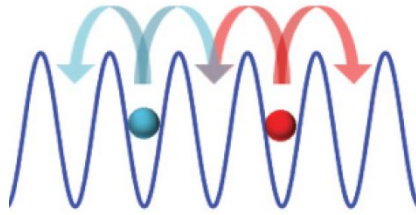


图 2.1 两粒子的量子行走^[52]

2.1.1 独立系统的量子行走

首先考虑最简单的晶格模型，哈密顿量中只有动能项，即表示为

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) \quad (2.3)$$

这里，考虑到 $[N, H] = 0$ ，即，总粒子数是守恒的，系统将要在两粒子构造的希尔伯特空间演化，其中希尔伯特空间可通过一系列的 Fock 态来构造，且可表示为

$$\mathcal{B} = \left\{ |l_1 l_2\rangle = \left(1 + \delta_{l_1 l_2}\right)^{-1/2} a_{l_1}^\dagger a_{l_2}^\dagger |0\rangle \right\} \quad (2.4)$$

则任意时刻的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = \sum C_{l_1 l_2}(t) |l_1 l_2\rangle \quad (2.5)$$

其中， $|0\rangle$ 表示真空态。对于玻色系统，求和指标为 $l_1 \leq l_2$ ；相应的费米、硬核玻色系统有 $l_1 < l_2$ 。 $C_{l_1 l_2}$ 为任意态在空间基矢上的展开系数。考虑 \hbar 取自然单位 $\hbar = 1$ ，任意态的时间演化遵循含时薛定谔方程

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H |\psi(t)\rangle \quad (2.6)$$

当我们选定初态波函数 $|\psi_0\rangle$ ，通过数值求解微分方程组式(2.6)，得到任意时刻的波函数 $|\psi(t)\rangle$ 。进而，可通过式(2.7)、式(2.8)分别计算两粒子在坐标空间、动量空间的关联

$$\Gamma_{qr}(t) = \langle \psi(t) | a_q^\dagger a_r^\dagger a_r a_q | \psi(t) \rangle \quad (2.7)$$

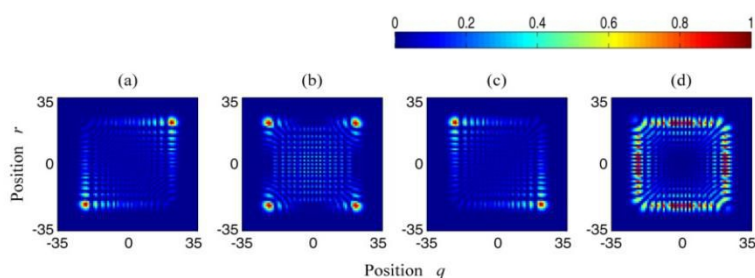
$$\Gamma_{\alpha\beta}(t) = \langle \psi(t) | a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\beta a_\alpha | \psi(t) \rangle \quad (2.8)$$

其中下标 q, r 为坐标空间指标， α, β 为动量空间指标，且 $q, r, \alpha, \beta = -L, -L+1, \dots, L$ 。 $\Gamma_{qr}(t)$ 表示在 q 格点发现粒子1(2)和在 r 格点发现粒子2(1)的联合几率。但是对于动量空间，为了获得关联函数 $\Gamma_{\alpha\beta}(t)$ ，我们需要通过离散傅里叶变换

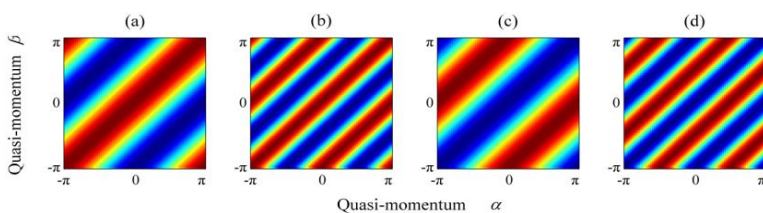
$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{l=-L}^L e^{i p_\alpha l} a_l, \quad \text{计算诸如 } \langle \psi(t) | a_p^\dagger a_q^\dagger a_r a_s | \psi(t) \rangle \text{ 类的项, 且 } q, p, r, s \text{ 四下}$$

标一般不同，准动量 $p_\alpha = 2\pi\alpha/L_{total}$ 。此外，我们申明本文中所有没有标注颜色条的物理图像都是依据数据取相对值 $\Gamma_{qr}(t)/\Gamma_{qr}^{\max}(t)$ ($\Gamma_{\alpha\beta}(t)/\Gamma_{\alpha\beta}^{\max}(t)$)来绘制的。图像中不同颜色代表值的大小依据图2.2给出的颜色条，红色表示最大值，蓝色表示最小值。

图2.2分别给出初态为 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 和 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 的玻色系统和费米系统的量子行走关联效应。首先，我们发现即使没有相互作用的存在，两粒子也存在干涉现象^[78-80]。对于初态 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ ，鉴于遵循的不同量子统计性质，玻色系统呈现典型的聚束现象，费米系统呈现反聚束现象。而当初态选定 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ ，这时的玻色系统(图2.2(b))虽有聚束行为，却呈现出一种特殊的空间对称性—输入输出对

图 2.2 两粒子坐标空间的关联效应 ($2L+1=71$, $Jt=12$)

(a)、(b) 玻色系统; (c)、(d) 费米系统

(a)、(c) $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$, (b)、(d) $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 图 2.3 两粒子动量空间的关联效应 ($2L+1=71$, $Jt=12$)

(a)、(b) 玻色系统; (c)、(d) 费米系统

(a)、(c) $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$, (b)、(d) $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$

称：粒子在移动过程中，要么同时处在同一晶格（关联矩阵的主对角线上），要么两个粒子分别处在关于粒子初始位置对称的晶格的两端（关联矩阵的反对角线上）；相应的费米系统（图 2.2 (d)）却呈现类似方格的空间分布。由此可见，选择不同的初态波函数两粒子量子行走的二阶关联效应也将不同。此外，由动量空间的关联效应（图 2.3）可发现，对于两种不同的量子初态，玻色系统都呈现聚束行为，费米系统都是反聚束行为，只是在相空间 $(-\pi, \pi)$ 范围内，表示关联较大值的亮条纹的条数不同。这里需要说明两点：对于这样的两直积形式的量子初态，量子干涉的发生是源于粒子的全同性、不可分辨性，当然，可分辨粒子也是有可能发生干涉现象的，只是需要选择纠缠态^[81]为初始量子态；此外，直积形式的量子态呈现的关联性质是可以经典光来仿真实现的，然而，对于全同粒子，当初始量子态选择为粒子同时置入格点 q 或 r 的纠缠态 ($|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_q |0\rangle_r + e^{-i\theta} |0\rangle_r |2\rangle_q$) 时，其是没有经典对应物的，但是全同粒子的纠缠态也可实现聚束、反聚束、输入输出对称、空间环类分布等关联行为，具体观察图 2.2—图 2.5 可知，无论在坐标空间还是动量空间，满足交换对称的纠缠态较对应的玻色系统直积态和满足交换反对称的纠缠态较对应的费米系统直积态所呈现的关联图像都存在一个 $\pi/2$ 的相位差。其中有趣的是，费米系统直

积态的关联效应（图 2.2 (c)）可以通过玻色系统的纠缠态（图 2.4 (a)）来实现。

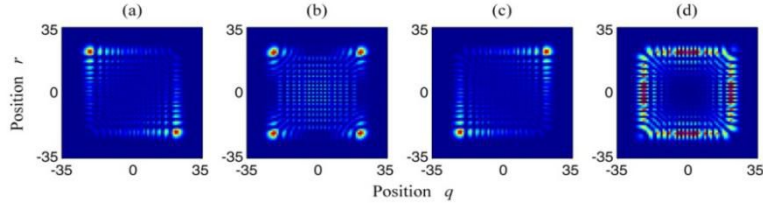


图 2.4 两粒子坐标空间的关联效应 ($2L+1=71, Jt=12$)

$$(a) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1) \quad (b) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$$

$$(c) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 - |0\rangle_0|2\rangle_1) \quad (d) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 - |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$$

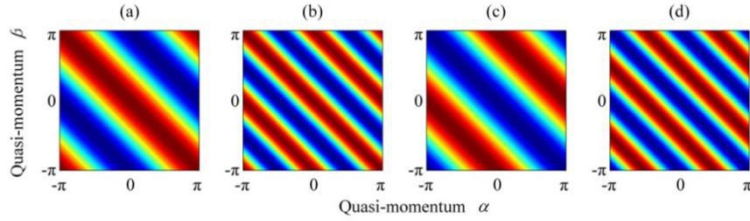


图 2.5 两粒子动量空间的关联效应 ($2L+1=71, Jt=12$)

$$(a) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1) \quad (b) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$$

$$(c) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 - |0\rangle_0|2\rangle_1) \quad (d) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 - |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$$

此外，我们也可以选择任意相 $\theta \in [0, \pi]$ 来研究。图 2.6 是 $\theta = \pi/2$ 的情况，其坐标空间的关联明显介于 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两者之间，动量空间的关联图像虽模糊，但总体取值趋向最大、最小值中间的值（这是因为 $\theta = 0$ 对应的关联图像中的亮条纹位置正是 $\theta = \pi$ 时暗条纹的位置，两者互补，取中间值）。

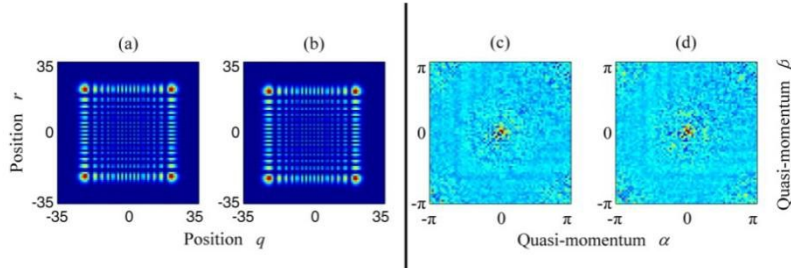


图 2.6 两粒子的关联效应 ($2L+1=71, Jt=12$)

$$\text{坐标空间 } (a) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2\rangle_0|0\rangle_1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} |0\rangle_0|2\rangle_1 \right) \quad (b) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} |0\rangle_{-1}|2\rangle_1 \right)$$

$$\text{动量空间 } (c) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2\rangle_0|0\rangle_1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} |0\rangle_0|2\rangle_1 \right) \quad (d) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} |0\rangle_{-1}|2\rangle_1 \right)$$

2.1.2 同一格点相互作用的玻色系统的量子行走

本小节我们分析相互作用对两粒子量子行走的影响，即相互作用模式 $d=0$ 的情形。当 $d=0$ 时，系统哈密顿量为

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + V \sum_{l=-L}^L n_l n_l \quad (2.9)$$

这里稍作变化，将其写为我们熟知的一维 Bose-Hubbard 模型

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + \frac{U}{2} \sum_{l=-L}^L n_l (n_l - 1) \quad (2.10)$$

U 为同一格点相互作用能。我们依然选择几种不同的初始量子态来研究其关联性质 $\Gamma_{qr}(t)$ 、 $\Gamma_{\alpha\beta}(t)$ 和粒子数密度 $\langle n_q(t) \rangle = \langle \psi(t) | a_q^\dagger a_q | \psi(t) \rangle$ (关联矩阵 $\Gamma_{qr}(t)$ 各列的求和) 的分布情况。

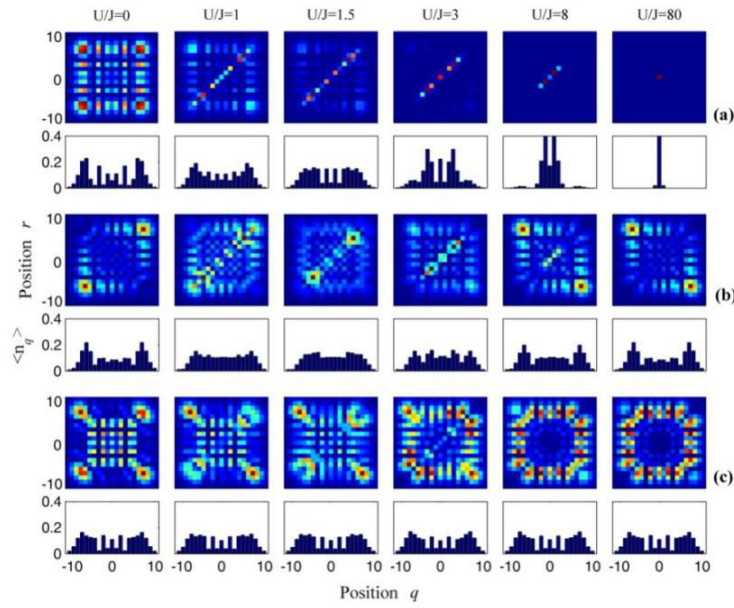


图 2.7 相互作用对坐标空间下不同初态的两粒子量子行走的影响 ($2L+1=21$, $Jt=4$)

$$(a) |\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2} (a_0^\dagger)^2 |0\rangle \quad (b) |\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle \quad (c) |\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$$

图 2.7(a) 描述的是初始时刻两粒子置入同一格点的情形，即 $|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2} (a_0^\dagger)^2 |0\rangle$ 。其中上下两行分别描述的是两粒子关联效应和粒子数密度分布的情况。当 $U=0$ 时，两粒子并没有发生干涉^[78]。粒子在随后的传播过程中要么同时处在关于初始位置对称的两端，要么分别处在这两端，在图像中体现为关联矩阵中对称的四个峰值。随着 U 的增大，关联图像显示粒子以粒子对的形式传播。同时，密度分布图像出现局域现象。图 2.7 (b) 描述的是初始时刻两粒子置入近邻格点的情形，即 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 。 $U=0$ 的情形我们之前已讨论，玻色系统呈现聚束现象，通常也称 Hanbury Brown–Twiss

(HBT) interferences^[82,83]。随着 U 的增大，粒子数密度分布情况的变化不大，但是两体关联效应却发生了根本的变化：由聚束逐渐转化为反聚束。特别地，当 U 取较大值时，玻色系统呈现的关联图像与自由费米系统相近，甚至在极限 $U \rightarrow \infty$ 时，完全等同于费米系统，此时粒子数密度分布与 $U=0$ 时的一样。图 2.7 (c) 描述的是初始时刻两粒子置入次近邻格点的情形，即 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 。 $U=0$ 的情形符合之前提及的玻色系统的输入输出对称，随着 U 的增大，两体关联效应由玻色系统过渡到类似的费米系统，在极限 $U \rightarrow \infty$ 时，等同于费米系统。而粒子数密度分布在 U 变化的过程中几乎没有改变。但是针对三种情形，值得强调是：相互作用对两粒子量子行走的影响在于其强度（大小）而并不依赖于相互作用正负的取值。

图 2.8 关注的是相互作用对动量空间关联性质的影响，其中图 2.8 (a) 描述的是初态 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ ，图 2.8 (b) 描述的是初态 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ ，随着 U 的增大，关联效应由玻色系统过渡到硬核玻色系统。其实在坐标空间，两种初始量子态对应的关联效应随着 U 的增大，也是由玻色系统过渡到硬核玻色系统，只是在实空间硬核玻色系统的关联效应和费米系统一样。这是可以理解的，因为对于硬核问题，我们一般会通过 Jordan-Wigner 变换

$$a_i = f_i \exp\left(-i\pi \sum_{i=-L}^{i-1} n_i\right), \quad a_i^\dagger = \exp\left(i\pi \sum_{i=-L}^{i-1} n_i\right) f_i^\dagger \quad (2.11)$$

将硬核系统转化到无自旋费米系统处理。其中 (2.11) 式中的 a_i 和 f_i 分别代表硬核玻色算符和费米算符。

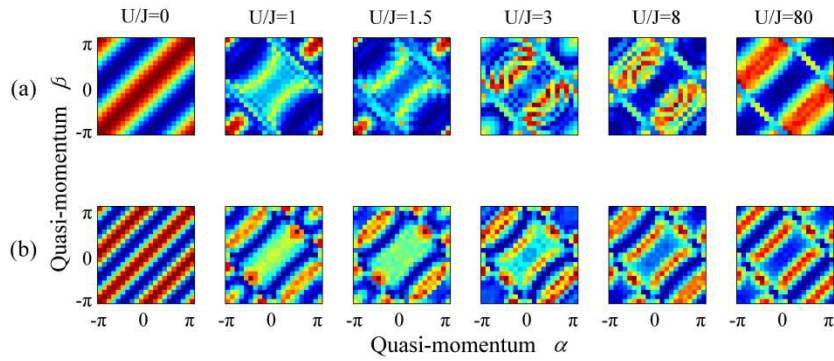


图 2.8 不同初态动量空间下的两粒子量子行走 ($2L+1=21$, $Jt=4$)
 (a) $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ (b) $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$

2.1.3 近邻格点相互作用的玻色、费米、硬核玻色系统的量子行走

这一节我们考虑两种近邻相互作用（最近邻和次近邻）对两粒子量子行走的影响，即 $d=1$ ^[84]和 $d=2$ ^[85]的情形。相应的系统哈密顿量分别表示为

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+1} \quad (2.12)$$

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+2} \quad (2.13)$$

鉴于研究的是格点间的相互作用，研究对象可以选取玻色、费米、硬核玻色 3 种系统。其满足的对易关系，如表 2.1。

表 2.1 坐标空间的对易关系

玻色系统	硬核玻色系统	费米系统
$[a_l, a_k] = [a_l^\dagger, a_k^\dagger] = 0$	$[a_l, a_k] = [a_l^\dagger, a_k^\dagger] = [a_l, a_k^\dagger] = 0$ ($l \neq k$)	$\{a_l, a_k\} = \{a_l^\dagger, a_k^\dagger\} = 0$
$[a_l, a_k^\dagger] = \delta_{lk}$	$\{a_l, a_l\} = \{a_l^\dagger, a_l^\dagger\} = 0$, $\{a_l, a_l^\dagger\} = 1$	$\{a_l, a_k^\dagger\} = \delta_{lk}$

通过离散傅里叶变换

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{l=-L}^L e^{ip_\alpha l} a_l, \quad a_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{l=-L}^L e^{-ip_\alpha l} a_l^\dagger \quad (2.14)$$

可以轻松获得 3 系统在动量空间的对易关系，表 2.2，

表 2.2 动量空间的对易关系

玻色系统	硬核玻色系统	费米系统
$[a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0$	$[a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0$	$\{a_\alpha, a_\beta\} = \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0$
$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$	$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{L_{total}} \sum_{\gamma\gamma'} \delta_{[\alpha+\gamma, \beta+\gamma']} a_\gamma^\dagger a_{\gamma'}$	$\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$

其中下标 l, k 为坐标空间指标， $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ 为动量空间指标，且 $l, k, \alpha, \beta, \gamma, \gamma' = -L, -L+1, \dots, L$ ，准动量 $p_\alpha = 2\pi\alpha/L_{total}$ 。

2.1.3.1 $d=1$

考虑最近邻相互作用，且作用强度 $V < 0$ [84] 的情形。同时选定初态波函数 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ ，研究最近邻相互作用对两粒子量子行走的影响。

图 2.9 描述的是 3 系统在坐标空间的关联。可以清楚地看到，玻色系统呈现聚束现象，费米系统和硬核玻色系统呈现反聚束现象。费米系统和硬核玻色系统在实空间的关联性质几乎一样（事实上数据存在微小的差异）。这样，实空间的关联信息只能做到将玻色系统从 3 系统中识别出来。同时，对动量空间关联信息的关注，如图 2.10，发现费米系统和硬核玻色系统在动量空间分别呈现反聚束和聚束现象。最终，坐标空间和动量空间的结合，做到了将 3 系统清楚识别。具体观察图 2.9，可发现随

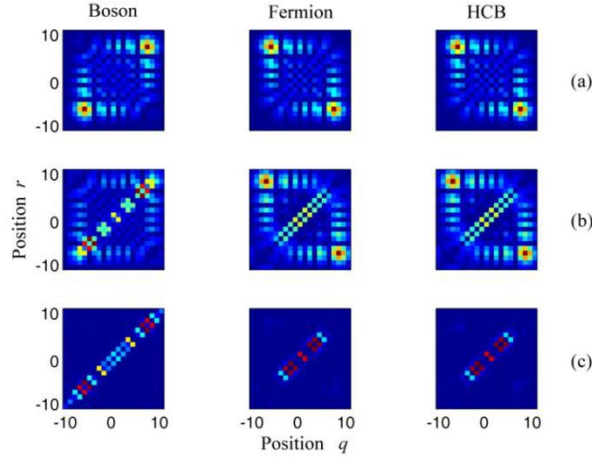


图 2.9 坐标空间下两粒子量子行走的关联效应 ($2L+1=21$)
 (a) $V/J=0, Jt=4$ (b) $V/J=-1, Jt=4.5$ (c) $V/J=-4, Jt=7.5$

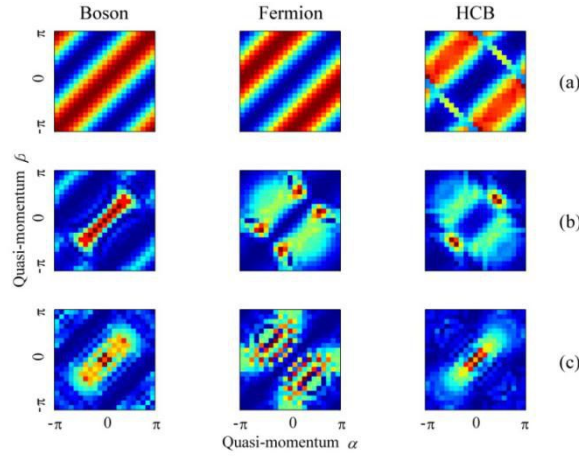


图 2.10 动量空间下两粒子量子行走的关联效应 ($2L+1=21$)
 (a) $V/J=0, Jt=4$ (b) $V/J=-1, Jt=4.5$ (c) $V/J=-4, Jt=7.5$

着 $|V/J|$ 的增大, 关联函数 $\Gamma_{qr}(t)$ 次对角线 ($q=r\pm 1$) 上的值逐渐变大, 其是两粒子出现绑定行走的信号, 也是两粒子束缚态^[86-88]存在的迹象。

特别是, 当近邻相互作用增大到一定值时, 哈密顿量中的动能项与相互作用项相比, 前者可作为微扰来处理, 且利用简并系统的二阶微扰理论^[89]

$$H = H_0 + \lambda H_1 \quad (2.15)$$

$$H' = \lambda H_1 \quad (2.16)$$

其中 H_1 为微扰项, λ 为耦合参数。对于任意的哈密顿量 H , 作用的希尔伯特空间为 \mathcal{H} , $P = \sum_{m \in PH} |m\rangle\langle m|$ 为投影算符, 其作用是将空间 \mathcal{H} 投影在其子空间 PH , 与 P 正交的算符为 $Q=1-P$ 。且满足 $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$ 。 ψ 为全空间的波函数, 满足薛定谔方程 $H\psi = E\psi$ 。通过简单的推导我们可以获得有效哈密顿量

$$H_{eff} = PHP - PHQ(QHQ - E)^{-1}QHP \quad (2.17)$$

通过进一步的迭代获得精确到二阶的有效哈密顿量

$$H_{\text{eff}} = PHP - PHQ(QHQ - PHP)^{-1}QHP \quad (2.18)$$

这里我们可将哈密顿量

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+1}$$

重新表示为

$$H_0 = V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+1} \quad (2.19)$$

$$H' = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) \quad (2.20)$$

这时作用的子空间 PH 为 $\{|1_q, 1_{q+1}\rangle\}$, 其中 $q = -L, \dots, L$, $|1_L, 1_{L+1}\rangle \equiv |1_L, 1_{-L}\rangle$ 。

进而解析获得系统的有效单粒子哈密顿量

$$H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}} \sum_{l=-L}^L (c_l^\dagger c_{l+1} + c_{l+1}^\dagger c_l) + \mu_{\text{eff}} \sum_{l=-L}^L c_l^\dagger c_l \quad (2.21)$$

其中,

$$c_l^\dagger = a_l^\dagger a_{l+1}^\dagger; \quad c_l^\dagger |0\rangle = |n_l = 1, n_{l+1} = 1\rangle;$$

$$J_{\text{eff}} \equiv J_{\text{eff}}^b = 3J^2/V; \quad J_{\text{eff}} \equiv J_{\text{eff}}^f = J_{\text{eff}}^{hcb} = J^2/V; \quad (2.22)$$

$$\mu_{\text{eff}} \equiv \mu_{\text{eff}}^b = 6J^2/V + V; \quad \mu_{\text{eff}} \equiv \mu_{\text{eff}}^f = \mu_{\text{eff}}^{hcb} = 2J^2/V + V \quad .$$

这里, 上标 b 、 f 和 hcb 分别表示玻色、费米和硬核玻色系统。对于强相互作用情形, 两粒子视如一个复合粒子。此时, 绑定行走在两粒子量子行走中占主导地位, 如图 2.11 所示, 对于给定的 J 和 V , 复合粒子在最近邻格点间的跳跃强度依赖于系统中粒子的统计性质。玻色系统的跳跃强度是费米 (硬核玻色) 系统的三倍。这与上述解析结果是相符的。

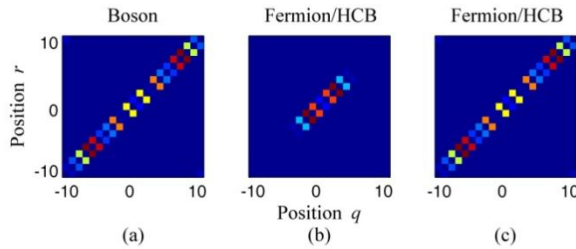


图 2.11 强相互作用下的两粒子量子行走 ($2L+1=21$, $V/J=-80$)

(a) $Jt=110$ (b) $Jt=110$ (c) $Jt=330$

2.1.3.2 $d=2$

考虑次近邻相互作用, 且作用强度 $V > 0$ [85] 的情形。选定与相互作用模式匹配的初态波函数 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$, 观察次近邻相互作用对粒子关联效应的影响, 并研究粒

子的动力学演化过程。

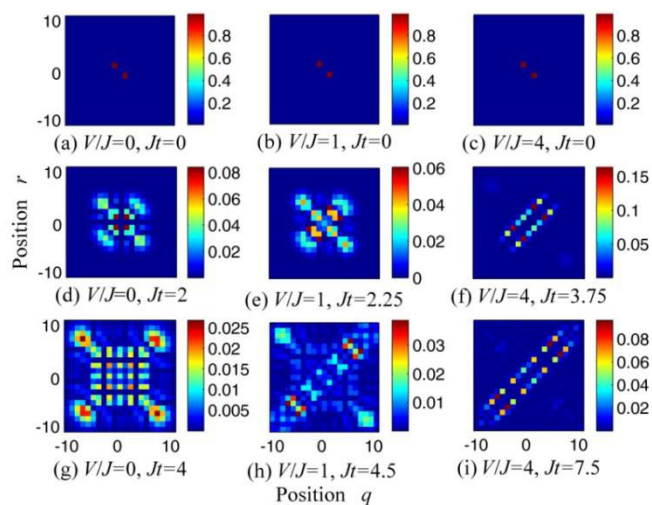


图 2.12 坐标空间下玻色系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=21$)

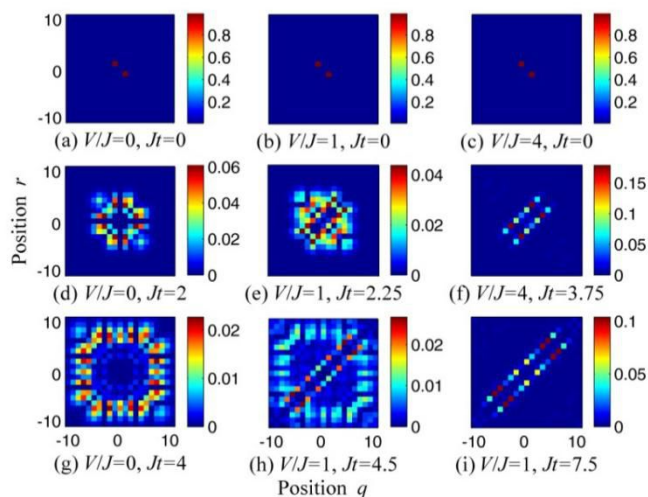


图 2.13 坐标空间下费米系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=21$)

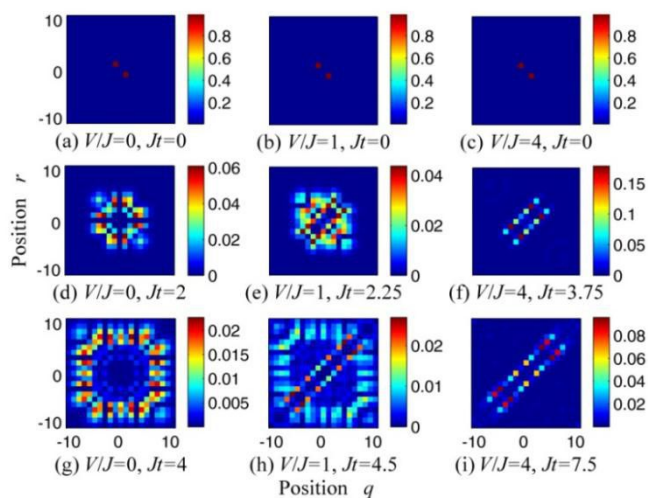


图 2.14 坐标空间下硬核玻色系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=21$)

图 2.12—图 2.14 依次给出玻色系统、费米系统和硬核玻色系统的两粒子量子行走关联效应，3 列分别对应相互作用强度参数 V 取 0, 1, 4 (以 J 为单位) 的动力学演化过程。其中，第 1 行是 $t=0$ (以 $1/J$ 为单位) 时刻的关联图像，最后 1 行分别对应 $Jt=4, 4.5, 7.5$ 时刻的关联图像，这样的参数取值可使关联矩阵呈现出比较直观清晰的物理图像。此外，为了展示动力学演化过程，我们给出了中间时间参数的关联图像。

图 2.12 和图 2.13 展示了在玻色和费米系统中, 针对同一相互作用强度 V , 关联矩阵中较大值均随时间的增大, 逐渐向矩阵的边缘移动, 且相对方向上移动的几率相同。对于 $V/J=0, Jt=4$ 的参数, 3 系统的关联效应已在上一小节作了分析, 对于费米系统呈现的环类分布, 这里借助相应参数的粒子数密度分布图 (图 2.16 (a)) 可见, 有相对较大的几率发现一个粒子处在晶格的边缘, 而另一个粒子位于晶格的中心区域附近。此外, 结合 $d=1$ 和 $d=2$ 的情形可知, 随着相互作用强度 V 的增大, 两粒子经历独立行走—独立行走和绑定行走共存—最终两个粒子像是被束缚在一起似的, 由初始位置以某一共同速度等几率地向晶格相反方向移动。同时, 在有限相互作用下, 将 $d=2$ 与 $d=1$ 的情形比较, 发现当考虑相互作用为最近邻相互作用, 同时选定初态波函数 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 时, 关联函数值主要存在于次对角线 ($q=r\pm 1$) 上; 相应的, 当相互作用为次近邻相互作用, 这时选定初态波函数 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$, 关联函数值则主要存在于次对角线 ($q=r\pm 2$) 上, 因此, 绑定行走的形式应是初态波函数和相互作用模式共同作用的效果, 而具体针对某一相互作用模式, 相互作用取值的正负, 并不会影响相关的物理规律。

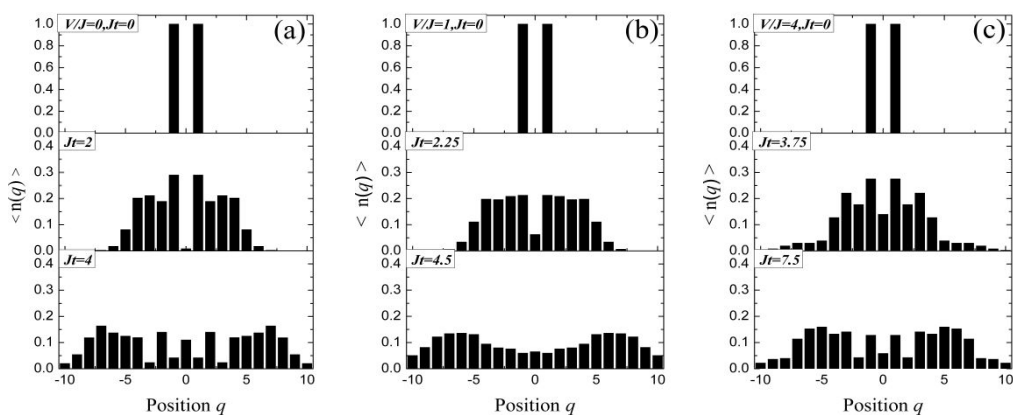


图 2.15 玻色系统中粒子数密度随时间的变化

图 2.15 和图 2.16 分别给出在玻色系统和费米系统下粒子数密度随时间的变化情况。同样，在两系统中可发现随着时间的增长粒子向晶格边缘方向移动。尤其通过对图 2.15 (b) 和 (c)，图 2.16 (b) 和 (c) 的中间区域作比较，发现当 $V/J=4$, $Jt=3.75$ (格点 $(-1, 1)$ 密度分布值小于 $V/J=4$, $Jt=2.25$ 的情况，因为随着时间的增长粒子移向晶格的边缘) 时，在格点 $(-1, 1)$ 处粒子的密度分布值明显大于 $V/J=1$, $Jt=2.25$ 的情况。该现象违背人的直觉：排斥力促使粒子分离，吸引力有助于束缚粒子。这可理解为一种动力学稳态^[90]，在强相互作用下，粒子的分离行为受到限制，似重新组合为一个复合粒子。

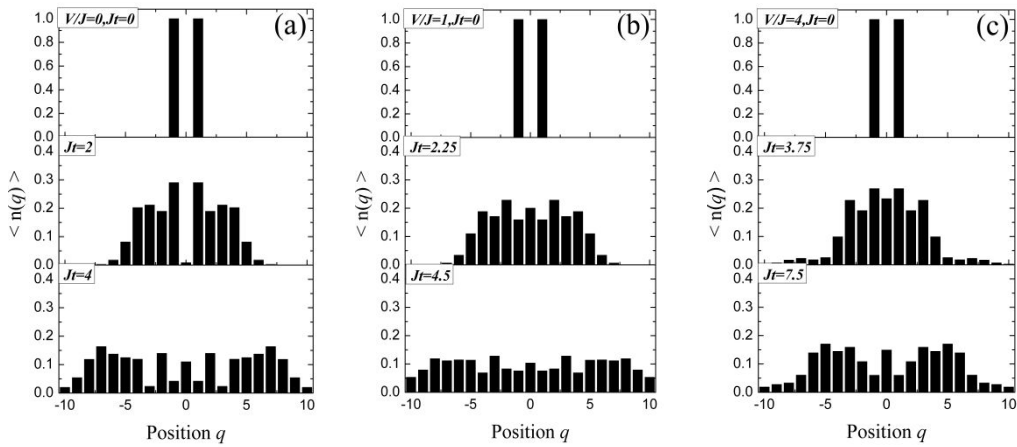


图 2.16 费米系统中粒子数密度随时间的变化

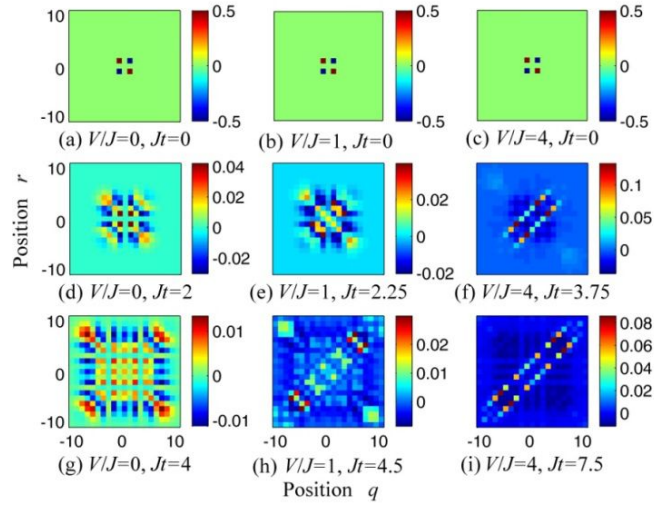
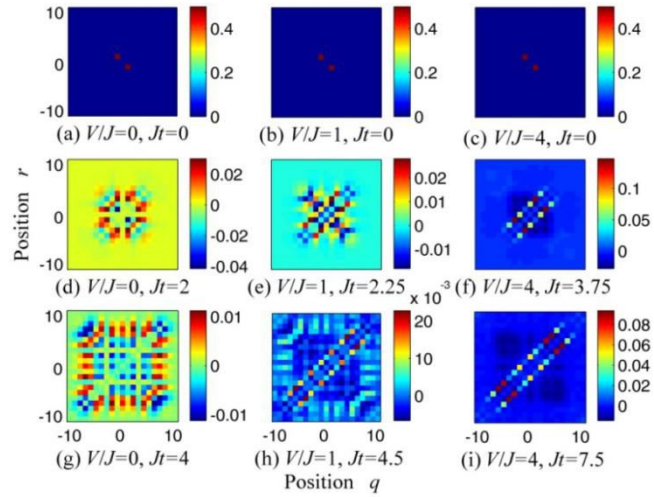
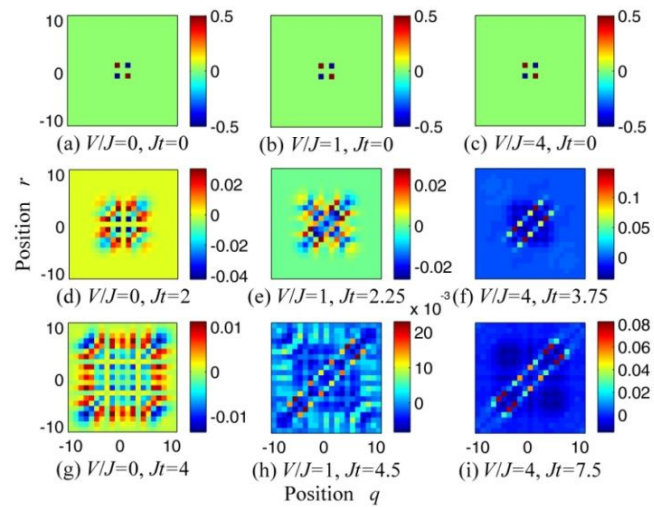
图 2.17—图 2.19 给出的是图 2.12—图 2.14 相应参数下的 3 系统的关联涨落变化情况。其中关联涨落定义式为

$$\Gamma_{qr}^F(t) = \Gamma_{qr}(t) - \frac{1}{2} n_q(t) n_r(t) \quad (2.23)$$

上标 F (Fluctuation) 是关联涨落的指标，以区别于 $\Gamma_{qr}(t)$ ， $n_q(t)$ 是粒子数密度。对于涨落，其描述的是物理量围绕自身统计平均值的微小无规则偏离现象。

由图 2.17—图 2.19 可见，考虑 $Jt \neq 0$ 时刻，当相互作用为 0 时，关联矩阵呈现 0 值背景下的涨落正负对称现象；当相互作用取非零值时，涨落正负对称现象将会被打破，且随着相互作用的增大，这种涨落正负对称破坏的程度会越来越明显。此外，费米系统和硬核玻色系统在关联涨落图像中存在明显的差异。这将有助于我们在坐标空间就实现将玻色、费米、硬核玻色系统区分。

图 2.20 为玻色系统和费米系统在强相互作用下两粒子的关联、关联涨落、以及粒子数密度的分布情况。对于玻色、费米、和硬核玻色 3 个系统，当次近邻相互作


 图 2.17 坐标空间下玻色系统的两粒子量子行走的关联涨落随时间的变化 ($2L+1=21$)

 图 2.18 坐标空间下费米系统的两粒子量子行走的关联涨落随时间的变化 ($2L+1=21$)

 图 2.19 坐标空间下硬核玻色系统的两粒子量子行走的关联涨落随时间的变化 ($2L+1=21$)

用增大到一定值时，哈密顿量中的动能项与相互作用项相比，前者亦可作为微扰来处理，利用简并系统的二阶微扰理论，可解析获得有效单粒子哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}} \sum_{l=-L}^L (c_l^\dagger c_{l+1} + c_{l+1}^\dagger c_l) + \mu_{\text{eff}} \sum_{l=-L}^L c_l^\dagger c_l \quad (2.24)$$

其中，

$$c_l^\dagger = a_l^\dagger a_{l+2}^\dagger, \quad c_l^\dagger |0\rangle = |n_l = 1, n_{l+2} = 1\rangle;$$

$$J_{\text{eff}} \equiv J_{\text{eff}}^b = J_{\text{eff}}^f = J_{\text{eff}}^{hcb} = 2J^2/V;$$

$$\mu_{\text{eff}} \equiv \mu_{\text{eff}}^b = \mu_{\text{eff}}^f = \mu_{\text{eff}}^{hcb} = 4J^2/V + V。$$

由此可知，玻色系统的近邻跳跃速度与费米、硬核玻色系统相同，这与 $d=1$ 情形中 $J_{\text{eff}}^b = 3J_{\text{eff}}^f = 3J_{\text{eff}}^{hcb}$ 的情况不同。图 2.20 (a) 呈现的数值计算结果亦与解析结果吻合。关联函数值主要存在于次对角线 ($q=r\pm 2$) 上，两粒子被束缚，共同以某一速度行走。这时的 $\Gamma_{q, q\pm 2}$ 表示在格点 q 发现粒子 1 (2)，在格点 $q\pm 2$ 发现粒子 2 (1) 的联合几率。

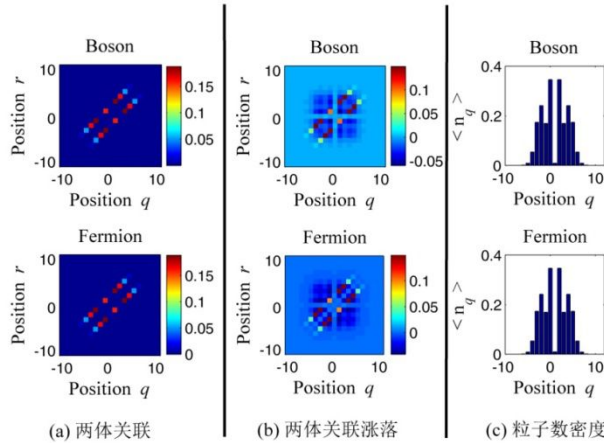
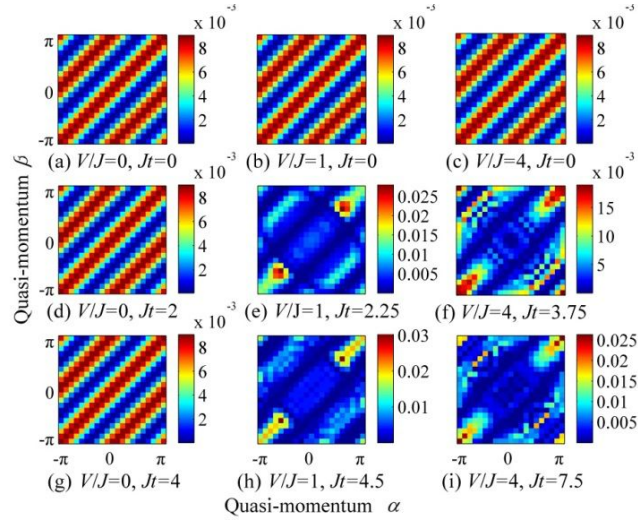
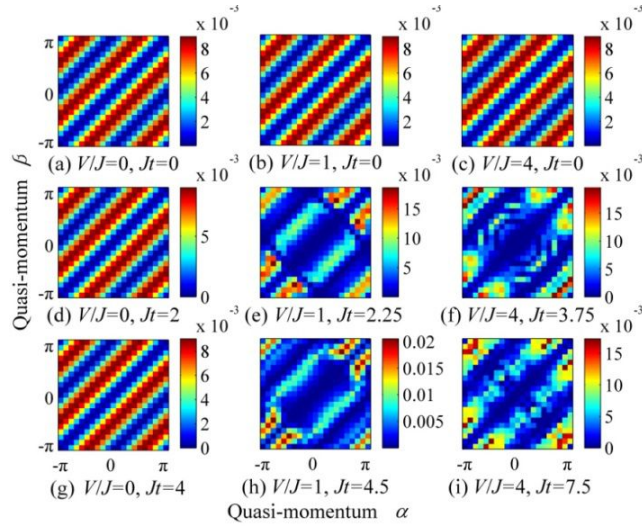
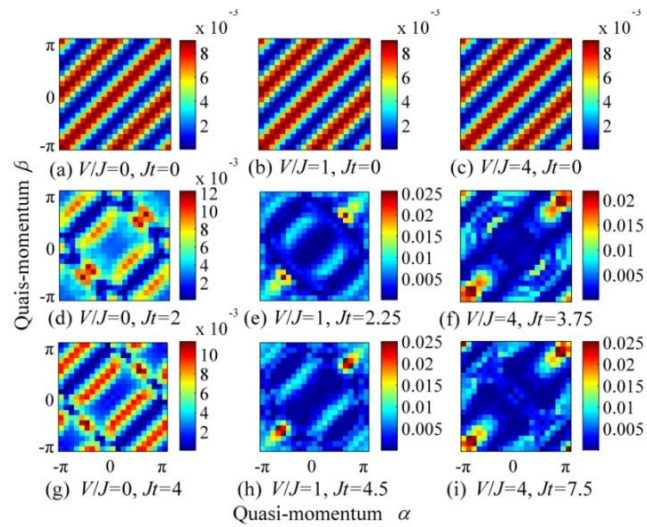


图 2.20 坐标空间下两强相互作用粒子的量子行走
($2L+1=21$, $V/J=60$, $Jt=55$)

图 2.21—图 2.23 描述了动量空间的两粒子关联函数随时间的变化情况。由图 2.21 和图 2.22 可见，在相互作用为零时，玻色系统和费米系统的动力学演化过程并未被清楚地呈现，且玻色关联图像到费米关联图像是平移效果（具体操作可通过构建任意子模型^[91]将两者联系起来）。当相互作用取非零值时，动力学演化过程呈现，且基于不同的量子统计性质，玻色系统呈现聚束行为，费米系统呈现反聚束行为，硬核玻色系统呈现聚束行为。


 图 2.21 动量空间下玻色系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=21$)

 图 2.22 动量空间下费米系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=21$)

 图 2.23 动量空间下硬核玻色系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=21$)

2.2 量子行走的布洛赫振荡

鉴于之前的工作是基于粒子未到达晶格边界作的讨论，在研究晶格中的布洛赫振荡周期性之前，我们首先来关注一下边界效应对量子行走的影响。

我们借用文献[92]的研究系统

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + 2J \sum_{l=-L}^L a_l^\dagger a_l \quad (2.25)$$

初态选定为 $|\psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1)$ 。同时考虑三种边界条件：周期性边界条件（PBC），开边界条件（OBC），反射边界条件（RBC）^[93]。结合图 2.24 和图 2.25 可知，在粒子未到达晶格边界之前（黑箭头之前），三种边界条件下，粒子呈现的关联效应是一致的，是典型的弹道传输，粒子数密度分布主要存在于两端的亮条纹，且与时间呈线性关系。一旦到达边界，在随后的演化过程中，PBC、OBC 和 RBC 下的关联效应将会存在差异。如图 2.25 (a) 所示， $Jt=40$ 时刻 OBC 下的关联图像中关联较大值存在的区域相对 PBC 下的关联图像要小，PBC 和 RBC 下关联图像的差异性不明显（具体的细微差别可观察图 2.26 的边缘值），但动量空间（图 2.25 (b)）却清晰的反映出边界条件带来的效应。因此，在研究有限尺度的系统时，我们有必要考虑到边界效应。

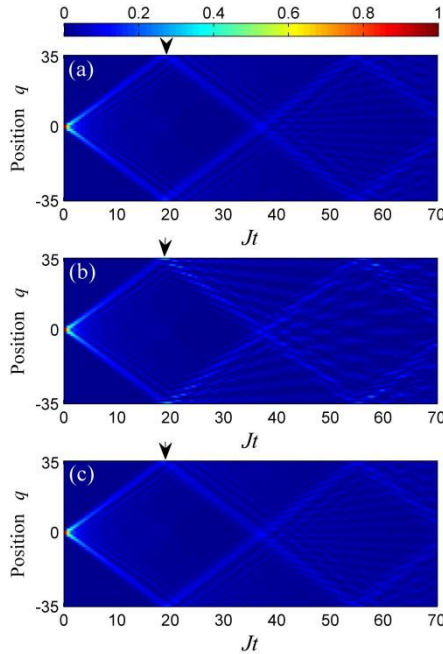
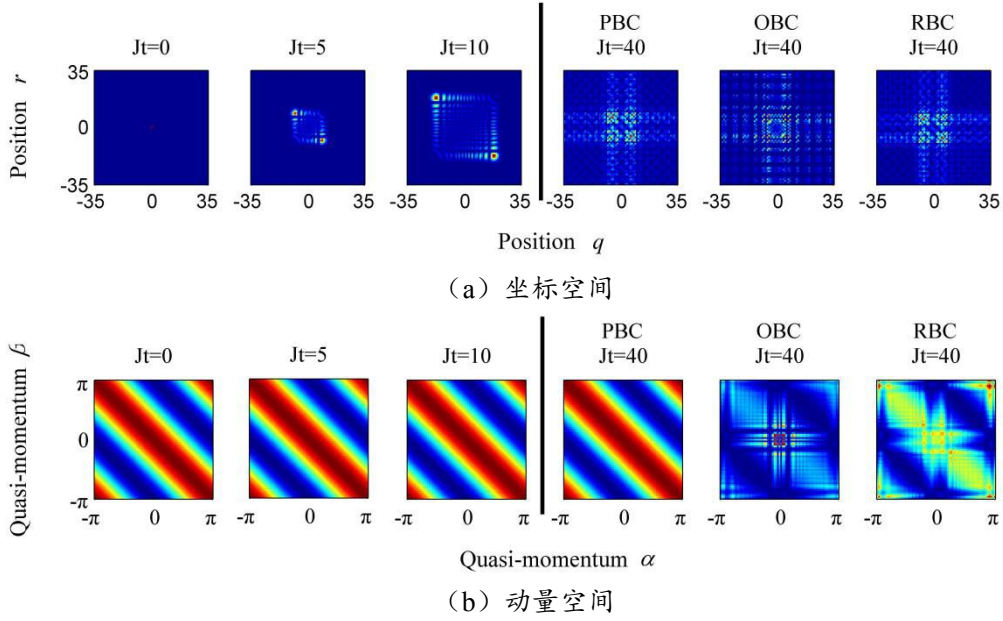
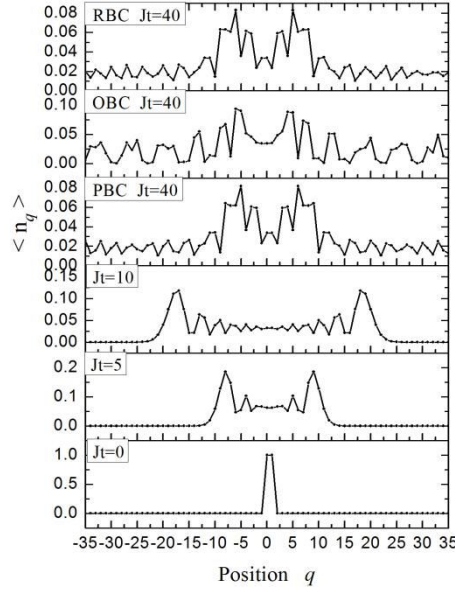


图 2.24 坐标空间下玻色系统粒子数密度随时间的变化 ($2L+1=71$)

(a) PBC (b) OBC (c) RBC


 图 2.25 玻色系统的两粒子量子行走的关联效应随时间的变化 ($2L+1=71$)

 图 2.26 玻色系统的两粒子量子行走的粒子数密度随时间的变化 ($2L+1=71$)

接下来，我们讨论晶格中的布洛赫振荡现象。考虑在原有动能项的基础上，引入一个倾斜势，倾斜度用 B 来表示，光波导模型中称之为线性传播常数。哈密顿量写为

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + B \sum_{l=-L}^L l a_l^\dagger a_l \quad (2.26)$$

这时，考虑到倾斜势的加入，周期性边界条件将不再适用，我们转向开边界条件。

通过海森堡方程

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H] \quad (2.27)$$

其中 $A(t)$ 是算符，且这里让产生算符 a_j^\dagger 代替 $A(t)$ ，有 $\frac{d}{dt}a_j^\dagger = \frac{1}{i\hbar}[a_j^\dagger, H]$ ，进而求得

$$-i\hbar \frac{d}{dt}a_j^\dagger = jBa_j^\dagger - J(a_{j+1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger) \quad (2.28)$$

然后在式子两边同时乘以 $\frac{1}{v}$ （在波导模型中， v 为光在波导中的传播速度，且 $v = \frac{c}{n}$ ， c 为真空光速， n 为波导材料的折射率），有

$$-i\hbar \frac{d}{d(vt)}a_j^\dagger = j\frac{B}{v}a_j^\dagger - \frac{J}{v}(a_{j+1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger) \quad (2.29)$$

令 $vt = z$ （ z 为沿着传播方向的空间位置）， $\frac{B}{v} = B'$ ， $-\frac{J}{v} = C$ （ C 在光波导模型中称为近邻耦合常数），即

$$-i\hbar \frac{d}{dz}a_j^\dagger = jB'a_j^\dagger + C(a_{j+1}^\dagger + a_{j-1}^\dagger) \quad (2.30)$$

该式子用来描述倾斜的单模波导模型^[35]，也是单粒子传播遵循的方程。产生算符的演化 $a_l^\dagger(z) = \sum_{l'} U_{l,l'}(z) a_{l'}^\dagger(z=0)$ 可用式子（2.30）的格林函数 $U_{l,l'}(z)$ ^[35,94,95] 来实现，么正变换 $U_{l,l'}(z)$ 描述一个粒子由格点 l 移动到格点 l' 的几率强度，具体形式为

$$U_{l,l'}(z) = e^{\frac{i\pi}{2}(l'-l)} e^{\frac{iB'z}{2}(l'+l)} J_{l'-l}\left(\frac{4C}{B'} \sin(B'z/2)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}(l'-l)} e^{\frac{iB'z}{2}(l'+l)} J_{l'-l}\left(\frac{-4J}{B} \sin(Bt/2)\right) \quad (2.31)$$

其中 J_l 是第 l 阶第一类贝塞尔函数。当 $A(t) \equiv a_j^\dagger a_k^\dagger$ 时，带入 $\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H]$ 我们解得两粒子传播遵循的海森堡方程

$$-i\hbar \frac{d}{dz}a_j^\dagger a_k^\dagger = 2jB'a_j^\dagger + C(a_j^\dagger a_{k-1}^\dagger + a_j^\dagger a_{k+1}^\dagger + a_k^\dagger a_{j-1}^\dagger + a_k^\dagger a_{j+1}^\dagger) \quad (2.32)$$

当研究单粒子问题^[35]时，由式（2.31）可知粒子围绕初始位置的振荡周期 $T = 4\pi J/B$ ，当粒子初始量子态取单粒子纯态时，粒子数密度随时间的变化显示双支振荡^[35]（双支振荡现象是基于粒子由初始位置等几率向晶格两端移动），每支呈现正弦曲线；当初态选择单粒子的纠缠态时，粒子数密度随时间的变化显示单支振荡^[35]。这里我们考虑连续时间的量子行走，由系统哈密顿量出发研究两粒子纠缠态量子行走的动力学问题。

图 2.27 描述的是初始量子态分别选定最大纠缠态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0 |0\rangle_1 + |0\rangle_0 |2\rangle_1)$ 和

$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$ 时，粒子数密度 $\langle n_q \rangle$ 随时间的变化。由图可见，两粒子纠缠态的粒子数密度的振荡显示双支振荡，振荡周期为 $T/2$ 。结合单粒子纠缠态的振荡周期 (T) 可见，振荡周期的长短与粒子数的多少有关。

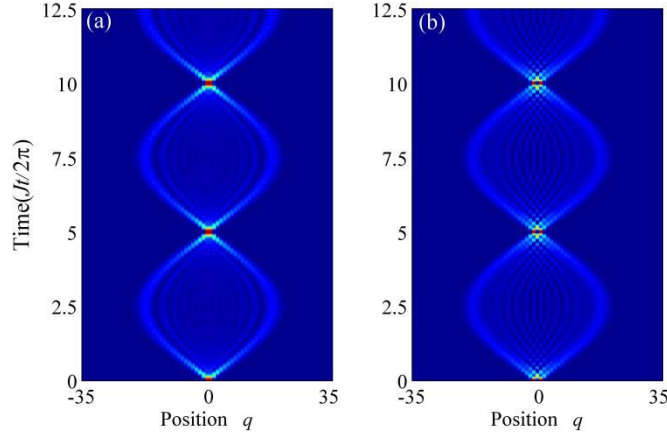


图 2.27 粒子数密度在坐标空间的布洛赫振荡 ($2L+1=71$, $B/J=0.2$)

$$(a) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1) \quad (b) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$$

图 2.28 (a) 描述的是纠缠态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + e^{-i\theta}|0\rangle_0|2\rangle_1)$ 中 $\theta = 0$ 时的关联矩阵的动力学演化过程。在起初的传播过程中，粒子运动行为与我们前面讨论的两粒子在满足周期性边界条件的均匀晶格中的运动情形一致：关联矩阵反对角线上的值明显较对角线上的值要大，粒子显示的是反聚束现象，两个粒子分处振荡曲线的一支；在随后的演化过程中，当粒子靠近转向点 ($0.25T$) 时，关联矩阵的对称性发生了明显的变化：对角线上的值变的越发显眼，有较大的几率发现两粒子处在振荡曲线的其中一支。在转向点 ($0.25T$) 处，粒子显示的是聚束现象，关联矩阵反对角线上的数值为零，也就是两粒子决不会分别处在双支振荡的其中一支。引人注目的是，尽管初始时刻两粒子处在不同的分支，在转向点，它们将汇聚在其中的一支。越过这一转向点后，粒子数密度分布向粒子初始置入的位置收缩。在收缩的过程中粒子再次转向反聚束态。在一个振荡周期 $T/2$ 内，实现了两次聚束-反聚束的转化。图 2.28 (b) 描述的是纠缠态中 $\theta = \pi$ 时的关联矩阵的动力学演化过程，对比图 2.28 (a) 和 (b)，可发现 θ 的取值确定了起初两粒子关联是聚束还是反聚束，但是聚束、反聚束循环的周期并不依赖于相因子 θ 。

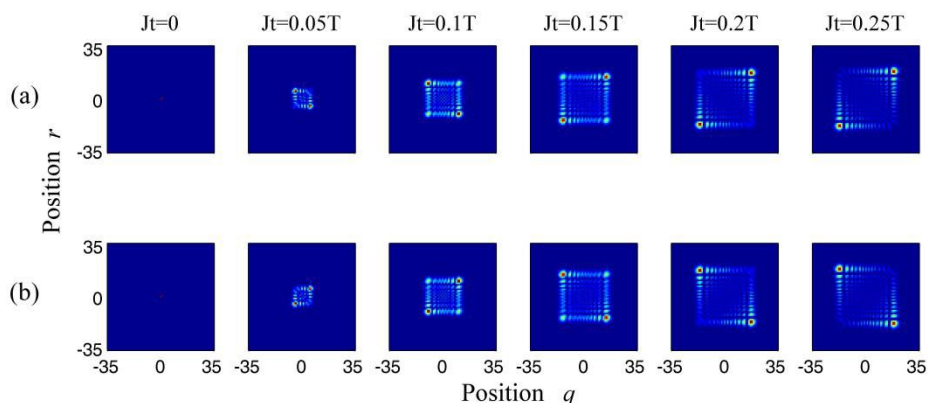


图 2.28 关联矩阵在坐标空间的布洛赫振荡 ($2L+1=71$, $B/J=0.2$)
(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi$

图 2.29 是图 2.28 相应参数下粒子在动量空间的关联效应，其中也可以看出关联振荡的周期 ($T/4$) 是粒子数分布振荡周期 ($T/2$) 的一半。同时，动量空间的演化实现了关联图像中亮条纹的平移：沿着对角线达到布里渊区 $k = \pi$ 边界后，反射到边界 $k = -\pi$ ，然后平移返回到原来的位置。

接着，我们分析了纠缠态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 + e^{-i\theta}|0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$ 的关联效应，由图 2.30 可知，这种情形下聚束—反聚束的变换以一种特殊的空间对称性呈现。关联图像在两种状态（矩阵峰值出现在矩阵的四个角落；矩阵峰值出现在矩阵角落的中间区域）之间缓慢变换，且振荡变换的周期为 $T/8$ ，是纠缠态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + e^{-i\theta}|0\rangle_0|2\rangle_1)$ 关联振荡周期的一半。这一信息可通过对比图 2.29 和图 2.31 获得。由此可见，粒子初始时刻置入晶格的指标差会影响关联振荡的周期。

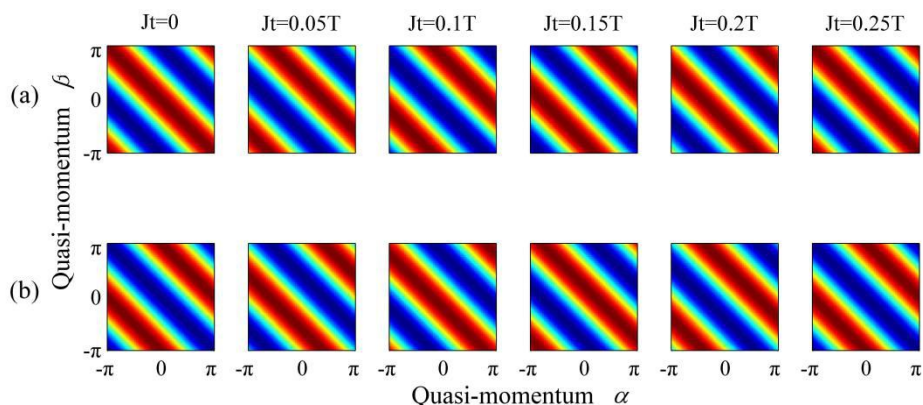


图 2.29 关联矩阵在动量空间的布洛赫振荡 ($2L+1=71$, $B/J=0.2$)
(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi$

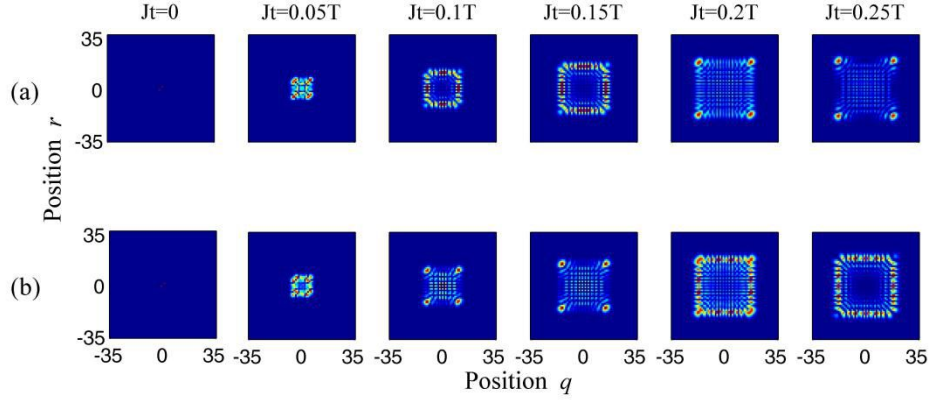


图 2.30 关联矩阵在坐标空间的布洛赫振荡 ($2L+1=71$, $B/J=0.2$)
(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi$

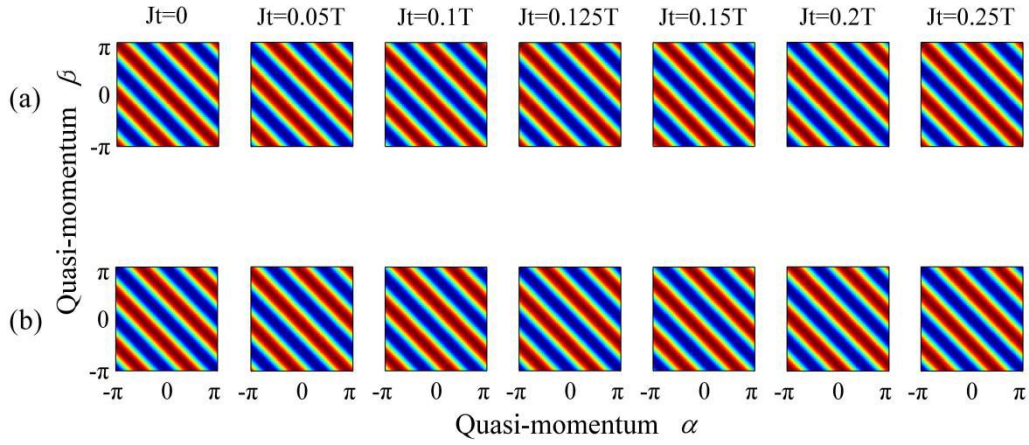


图 2.31 关联矩阵在动量空间的布洛赫振荡 ($2L+1=71$, $B/J=0.2$)
(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi$

倾斜势（线性势）的加入实现了周期性的动力学演化。那么非线性相互作用的加入会带来怎么的影响？我们考虑三种情况：同一格点相互作用 U （公式 2.33），最近邻格点相互作用 V （公式 2.34），谐振子势 W ^[96]（公式 2.35），相应的哈密顿量为

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + B \sum_{l=-L}^L l a_l^\dagger a_l + \frac{U}{2} \sum_{l=-L}^L n_l (n_l - 1) \quad (2.33)$$

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + B \sum_{l=-L}^L l a_l^\dagger a_l + V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+1} \quad (2.34)$$

$$H = -J \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + B \sum_{l=-L}^L l a_l^\dagger a_l + W \sum_{l=-L}^L l^2 a_l^\dagger a_l \quad (2.35)$$

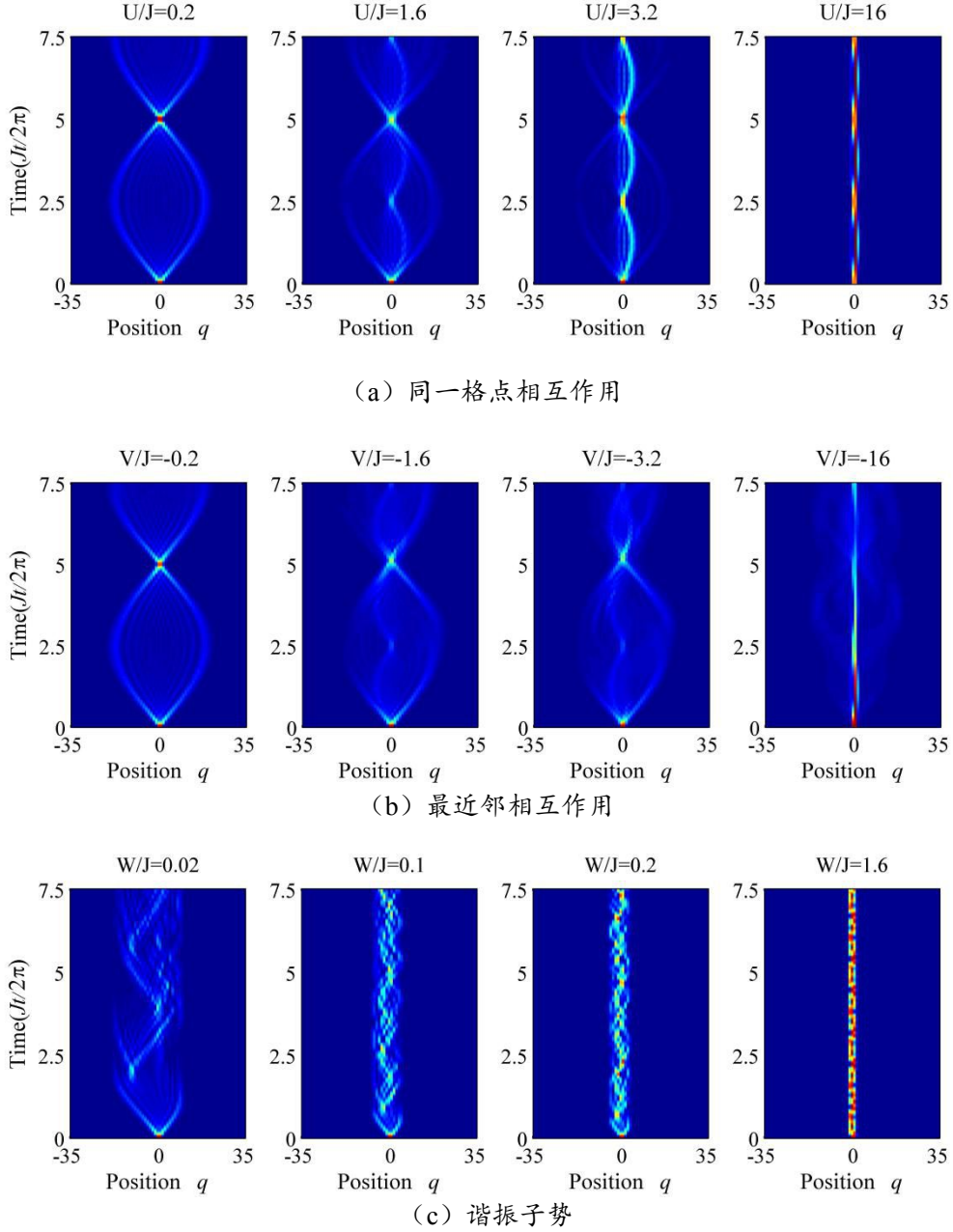


图 2.32 非线性项对粒子数密度在坐标空间的布洛赫振荡周期的影响 ($2L+1=71$, $B/J=0.2$)

图 2.32 给出了非线性相互作用对纠缠态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1)$ 的空间粒子数密度分布动力学演化周期性的影响。对于图 2.32 (a)，我们发现随着相互作用 U 的增大，振荡的周期性破坏程度越明显，继续增大相互作用，布洛赫振荡频率将为原来振荡频率的二倍，且由于长程跳跃 (long-range tunneling) 效应^[55]，振荡图像的左右不对称现象愈发明显，当相互作用足够大时，粒子的振荡将被局域在置入晶格的初始位置附近。对于非线性项最近邻相互作用 V (图 2.32 (b)) 和谐振子势 W (图

2.32 (c)), 随着其取值的增大, 振荡的周期性破坏程度越明显, 当相互作用足够大时, 粒子的振荡将被局域在置入晶格的初始位置附近。所要注意的是, 较小的 W 取值就足以破坏原有的周期性振荡行为。

此外, 我们也观察了倾斜度 B 对纠缠态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1)$ 的粒子数密度分布的影响。如图 2.33 所示, 随着 B/J 的逐渐增大, 粒子分布的空间尺度逐渐减小, 在 $B/J=0.4$ 时重新回到了初始位置, 继续增大 B/J , 在 $B/J=0.8$ 时再次回到了初始位置, 形同 Wannier-Stark Ladder^[97,98]。最终 B/J 的变化带来两种结果: 振荡周期的变化 $T = 4\pi J/B$; 粒子分布的空间尺度的变化。

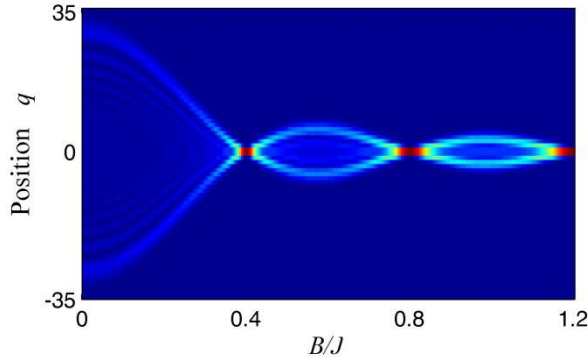


图 2.33 倾斜度对粒子数密度在坐标空间的布洛赫振荡的影响 ($2L+1=71$, $Jt=5\pi$)

2.3 量子行走的安德森局域

我们之前研究系统中的跳跃系数 J 、相互作用参数 (U , V) 和倾斜度 B 并没有依赖于晶格的格点指标, 也就是所谓的均匀系统。在这一小节将考虑非均匀系统: 无序系统。无序通过赋予 $J_{l,l+1}$ 或 B_l 一组随机数来引入。相应的哈密顿量为

$$H = -\sum_{l=1}^L (J_{l,l+1} a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + \sum_{l=1}^L B_l a_l^\dagger a_l \quad (2.36)$$

文献[28]就系统哈密顿量式 (2.36) 作了较为详细的分析, 如图 2.34^[28], 其中偶数列是相应系统关联图像中间局域区域的放大图。不管初始量子态是直积态 (左 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$, 中 $|\psi_0\rangle = a_{-1}^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$) 还是纠缠态 (右上 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_0|0\rangle_1 + |0\rangle_0|2\rangle_1)$, 右下 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_{-1}|0\rangle_1 - |0\rangle_{-1}|2\rangle_1)$), 无序的存在都会导致关联矩阵中局域现象的出现。

具体表现为关联矩阵图像中间区域存在不可忽略的关联值。

现在我们具体关注一下玻色系统选择初态 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 的关联图像，发现两玻色子既可以以弹道传输方式移动，某时刻以聚束的形式存在于关联矩阵对角线的两个顶端，也可以基于晶格的无序，在散射过程中出现局域现象，关联图像的中间呈现数值较大的红色。此外，鉴于矩阵图像四个边缘中间的亮点，一个粒子局域另一个粒子扩散的可能性也存在。总之，对无序系统的研究将有助于对真实复杂的物理环境的认识。

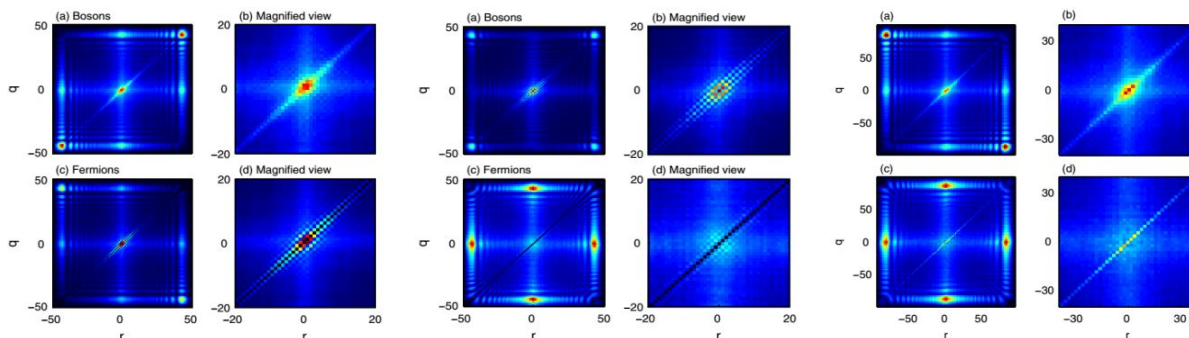


图 2.34 无序导致的安德森局域现象^[28]

2.4 小结

在第一小节首先讨论了独立系统的量子行为，发现即使没有相互作用的存在，两粒子也可产生量子干涉现象。满足不同统计性质的粒子呈现的关联效应不同。并且，不同初始量子态的选择也会影响粒子量子行走的关联性质。有趣的是，玻色子的纠缠态可以实现类似于费米系统中直积态的关联效应。只是直积态的关联效应在实验上是可以经典光来模拟的，但是纠缠态却找不到相应的经典对应物；接着，我们在系统中考虑了同一格点的相互作用，发现随着相互作用的增大，玻色系统的二阶关联图像逐渐由玻色系统过渡到硬核玻色系统，而相互作用 U 取值的正负并不影响此变化过程；紧接着，我们对相互作用模式做了调整，分别考虑了最近邻和次近邻两种相互作用对两粒子量子行走的影响，得出相互作用 V 的强弱决定了两粒子是独立行走，还是绑定行走。绑定行走的具体形式是初态波函数和相互作用模式共同作用的结果。同样，相互作用 V 取值的正负不影响相应的物理规律。

第二小节分析了线性倾斜势导致的纠缠态的布洛赫振荡。发现粒子数密度振荡周期的长短与粒子数的个数有关；聚束—反聚束转化的周期与粒子初始置入晶格的指标差有关。此外，非线性相互作用的存在将会影响原来振荡行为的周期性。

最后，在第三小节简单介绍了无序系统带来的安德森局域现象。

第三章 一维光晶格中两相互作用任意子的量子行走

前面的讨论都是基于熟悉的一些系统，本章我们将研究的粒子推广到满足分数统计的任意子。讨论分数统计参数的引入对两相互作用任意子量子行走的影响。

3.1 两相互作用任意子的关联

基于满足周期性边界条件的一维光晶格，我们研究两全同任意子的关联效应。系统的哈密顿量表示为

$$H^a = \sum_{l=-L}^L \left[-J(a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + \frac{U}{2} n_l(n_l - 1) + V n_l n_{l+1} \right] \quad (3.1)$$

其中，上标 a 代表任意子系统， a_l^\dagger (a_l) 分别为任意子的产生（湮灭）算符，且满足对易关系

$$\begin{aligned} a_l a_k^\dagger &= e^{-i\chi\pi\varepsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l + \delta_{lk} \\ a_l a_k &= e^{i\chi\pi\varepsilon(l-k)} a_k a_l \\ a_l^\dagger a_k^\dagger &= e^{i\chi\pi\varepsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l^\dagger \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中符号函数

$$\varepsilon(l-k) = \begin{cases} 1 & l > k \\ 0 & l = k \\ -1 & l < k \end{cases}$$

参数 χ 用以描述任意子所满足的分数统计性质，且 $\chi \in [0,1]$ ，当 $\chi=0$ 时，我们称之为玻色极限，相应的 $\chi=1$ 为费米极限。在绪论部分，我们已经提及任意子系统 ($\psi_a(x)$) 通常需要借助玻色系统 ($\psi_b(x)$) 来实现，具体形式表示为

$$\psi_a(x) = e^{-i\chi\pi \int_{-\infty}^x \psi_b^\dagger(x') \psi_b(x') dx'} \psi_b(x) \quad (3.3)$$

其中下标 a , b 分别指示任意子和玻色子系统。人们也将这种由玻色系统出发定义的任意子称为 Kundu 任意子。很显然，这种实现方式保证了任意子系统在玻色极限可以完美地退化为玻色系统。但是，在费米极限，粒子在同一格点满足玻色对易关系，不同格点满足费米反对易关系，文献[99]将这一特殊情形下的粒子称为赝费米子 (Pseudo-fermion)。然而，Kundu 任意子的定义在处理零距离相互作用的一些物理模型时将非常棘手。为此 Girardeau 提出了另一种依据费米系统来实现任意子系统的方法，即 Anyon-Fermion Mapping。相应地，该定义下的任意子称为 Girardeau 任意子。只是，这种费米表象仅仅能描述系统间存在强排斥相互作用极限的情形，也就是所谓的硬核相互作用，具体情况我们将在 3.2 做讨论。

这里我们从任意子的第一种定义出发，借助一维系统中任意子和玻色子的映射理

论来研究任意子的关联性质。首先，引进分数版本的 Jordan-Wigner 变换^[99]，即 Anyon-Boson Mapping

$$a_l = b_l \exp\left(-i\chi\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right), \quad a_l^\dagger = \exp\left(i\chi\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right) b_l^\dagger \quad (3.4)$$

其中， $n_l = a_l^\dagger a_l = b_l^\dagger b_l$ 是两种粒子的粒子数算符。如果从玻色子的对易关系出发，亦 $[b_l, b_k] = [b_l^\dagger, b_k^\dagger] = 0$ ， $[b_l, b_k^\dagger] = \delta_{lk}$ ，我们可以轻松地验证算符 a_l 事实上满足任意子对易关系式 (3.2)。这种映射理论说明了一维系统中的任意子实际上是一种非局域的准粒子，其非局域性体现在式 (3.4) 中的任意子算符 a_l 可表示为玻色算符 b_l 和算符串 $\exp\left(-i\chi\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right)$ 的乘积形式。

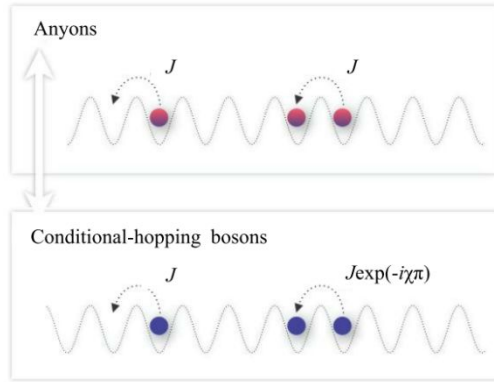


图 3.1 Anyon-Boson Mapping 示意图^[99]

我们最终的目的是提出一个现实的方案用以研究一维系统中相互作用的任意子气体的动力学行为。因此，在考虑 Anyon-Boson Mapping 的基础上，结合系统所满足的周期性边界条件

$$\begin{aligned} a_L^\dagger a_{-L} &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{i=-L}^{L-1} n_i\right) b_L^\dagger b_{-L} \\ a_{-L}^\dagger a_L &= b_{-L}^\dagger b_L \exp\left(-i\chi\pi \sum_{i=-L}^{L-1} n_i\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

哈密顿量 H^a 可以重新写为玻色算符的形式

$$H^b = -J \sum_{i=-L}^{L-1} (b_i^\dagger \exp(-i\chi\pi n_i) b_{i+1} + \text{H.c.}) - J \left(\exp\left(i\chi\pi \sum_{i=-L}^{L-1} n_i\right) b_L^\dagger b_{-L} + \text{H.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_{i=-L}^L n_i (n_i - 1) + V \sum_{i=-L}^L n_i n_{i+1} \quad (3.6)$$

这样，对于哈密顿量 H^b ，除了边界 ($-L$ 和 L)，粒子在最近邻格点 ($l, l+1$) 间跳跃时，会导致跳跃振幅 J 依赖于格点占有数 n_l ，具体表现为 $J \exp(-i\chi\pi n_l)$ ，如果格点 l

上没有粒子，跳跃振幅仅仅是 J ；如果格点 l 上放置一个粒子，跳跃振幅则为 $J \exp(-i\chi\pi)$ ，如图 3.1，以此类推。同时，需要说明的是，基于我们研究的是粒子未到达晶格边界的量子行走，由周期性边界条件引入的非局域映射项 $J \left(\exp \left(i\chi\pi \sum_{i=-L}^{L-1} n_i \right) b_L^\dagger b_{-L} + \text{H.c.} \right)$ 对系统的影响将非常小，这样任意子和玻色子之间的非局域映射就幸运地实现了较好的局域。此外，正如任意子对易关系描述的那样，任意子的空间对称性遭到破坏，而 Jordan-Wigner 变换将这种非对称性转移到玻色系统，具体表现为哈密顿量 H^b 中相因子 $\exp(-i\chi\pi n_l)$ 仅仅作用在目标格点 l ，这将破坏空间的宇称对称性。

同第二章讨论一样，在考虑了系统哈密顿量的前提下，我们构建两粒子系统的希尔伯特空间。对于两任意子，基于采用了精确的 Anyon-Boson Mapping 映射理论，系统希尔伯特空间可以表示为 $B_a^2 = B_b^2 = \left\{ |l_1, l_2\rangle = \left(1 + \delta_{l_1 l_2}\right)^{-1/2} b_{l_1}^\dagger b_{l_2}^\dagger |0\rangle, -L \leq l_1 \leq l_2 \leq L \right\}$ 。 $|0\rangle$ 表示真空态。知道了 B_b^2 ，很容易求得哈密顿矩阵 $H^{(2)}$ ，让 $\hbar = 1$ ，任意态的时间演化遵循含时薛定谔方程 $i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H^{(2)} |\psi(t)\rangle$ ，且 $|\psi(t)\rangle = \sum_{l_1 \leq l_2} C_{l_1, l_2}(t) |l_1, l_2\rangle$ 。接下来就研究统计参数对两任意子连续时间量子行走的影响。初始时刻，我们选择将两粒子置入两相邻晶格 0 和 1，即 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 。

首先讨论不考虑同一格点相互作用时，统计参数 χ 对两体关联函数在坐标空间和动量空间所产生的影响。如图 3.2 所示，第 1 列对应统计参数 $\chi=0$ 的玻色极限，其与第二章讨论的玻色系统完全吻合。对于给定的一组相互作用强度和时间参数，比如图 3.2 (a)，随着统计参数 χ 的逐渐增大，两聚束点沿着主对角线方向逐渐靠近，但是在费米极限 $\chi=1$ 时，并没有看到期盼的费米反聚束现象。这是因为在费米极限时，对应的粒子并不是真实的费米子，而是被称为赝费米子。在我们研究的系统中，具体表现为：同一格点满足对易关系，且在不考虑近邻相互作用时，两粒子趋向于待在初始置入粒子的两晶格中的任意一个；不同格点满足反对易关系，在有限相互作用下，它们占据近邻晶格，并粘滞在一起，在随后的演化过程中，以某一共同速度等几率反向移向晶格边缘；在强相互作用下，粒子的独立行走行为变得越发模糊不明显，但是却呈现出真实费米系统所具有的关联效应。

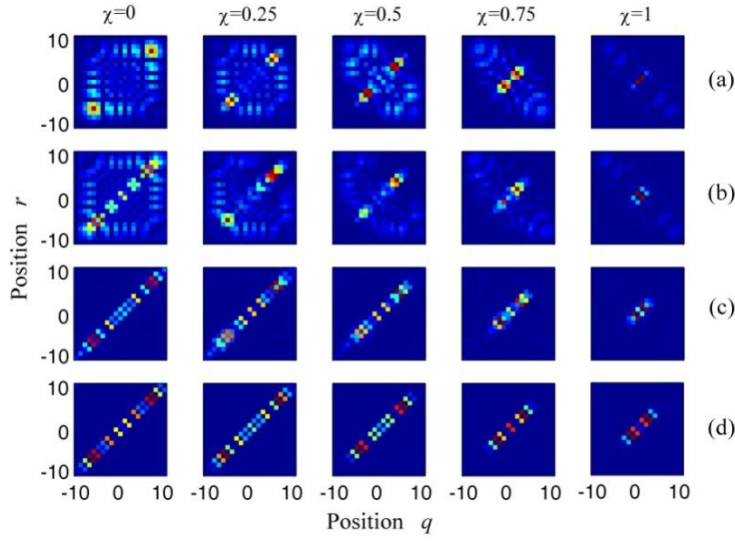


图 3.2 两任意子的量子行走在坐标空间的两体关联效应 ($2L+1=21$, $U/J=0$)
 (a) $V/J=0$, $Jt=4$ (b) $V/J=-1$, $Jt=4.5$ (c) $V/J=-4$, $Jt=7.5$ (d) $V/J=-80$, $Jt=110$

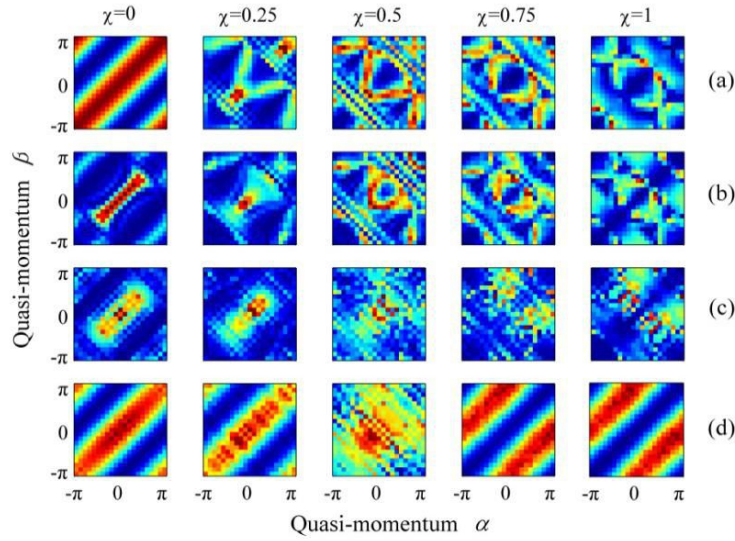


图 3.3 两任意子的量子行走在动量空间的两体关联效应 ($2L+1=21$, $U/J=0$)
 (a) $V/J=0$, $Jt=4$ (b) $V/J=-1$, $Jt=4.5$ (c) $V/J=-4$, $Jt=7.5$ (d) $V/J=-80$, $Jt=110$

此外，我们发现在玻色极限 $\chi=0$ 和费米极限 $\chi=1$ 时，关联矩阵关于粒子置入晶格的初始位置对称。但是，在有限相互作用下，一旦统计参数 χ 偏离两极限，关联矩阵便不再对称。这种不对称现象的出现正是统计参数 χ 的作用：随着统计参数 χ 的增大，公式 (3.6) 中依赖占有数的统计因子变得越来越重要，不同占有数的统计因子在近邻格点跳跃过程中贡献不同的值。我们来关注第 l 格点占据数 $n_l = 1$ 的情况，向左跃迁会获得一个相因子 $e^{-i\chi\pi}$ ；相反，向右跳跃获得相因子 $e^{i\chi\pi}$ 。哈密顿量中动能项的这种非

相干叠加被统计因子放大，进而导致关联矩阵呈现不对称。图 3.2 (d) 描述的是强相互作用下的关联效应，这时的动力学行为主要取决于相互作用项，统计参数只是单纯地体现出收缩效应，并没有引起对称性的破坏。

图 3.3 给出了图 3.2 相应参数下的两任意子在动量空间的关联。同坐标空间讨论的情况类似，在玻色极限下，关联函数完美呈现相应玻色系统的关联效应，由于赝费米的缘故，在费米极限下，关联函数没有回到真实费米系统，且统计因子诱导的两体关联函数的非对称性较坐标空间更加明显直观。由图 3.3 可见，一旦统计参数 χ 偏离玻色极限，有趣的非对称现象就会出现在关联图像中，甚至不需要相互作用的存在。因此，我们得出结论：两体关联的非对称性来源于任意子奇特的统计性质。此外，强相互作用下，空间关联实现了玻色极限到费米极限的过渡，但是在动量空间，虽然观察到明显的由玻色极限的聚束过渡到费米极限的反聚束的迹象，但是非对称性仍然伴随整个过渡过程。

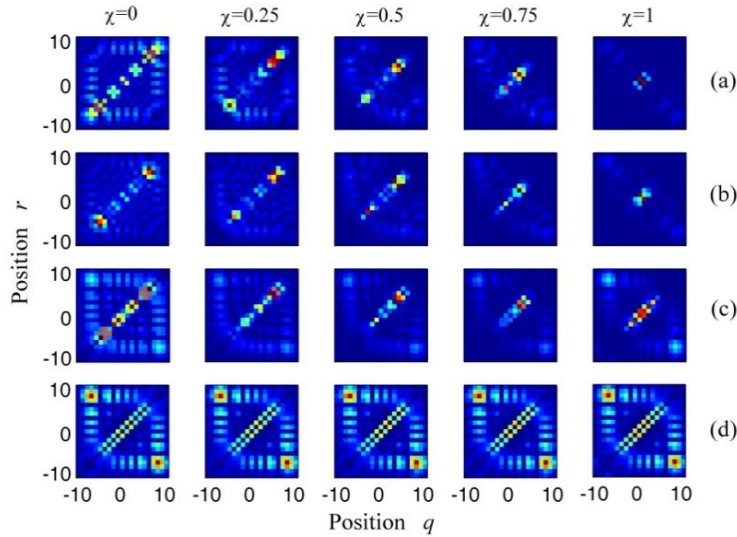


图 3.4 两任意子的量子行走在坐标空间的两体关联效应 ($2L+1=21$, $V/J=-1$, $Jt=4.5$)
(a) $U/J=0$ (b) $U/J=1$ (c) $U/J=4$ (d) $U/J=80$

接下来，我们考虑同一格点相互作用，并观察它与近邻相互作用的竞争情况。在图 3.4 中，给定参数 $V/J=-1$ ，让 U 变化，其第 1 列对应玻色极限，我们看到随着 U 的增大，两体关联效应由玻色系统的聚束现象过渡到硬核玻色的反聚束现象。随着统计参数的增大，相似的收缩现象出现。对应最后 1 列的费米极限，关联函数由赝费米过渡到真实的费米系统。当 U 足够大时，硬核玻色子、硬核任意子、真实费米子所呈现的两体关联效应几乎完全一样。

同时，我们关注了统计参数 χ 对关联涨落和粒子数密度分布的影响，发现当存在有限的 V 和 U 中的任何一个相互作用时，统计参数 χ 将破坏关联涨落和粒子数密度分布的对称性。很显然，与硬核任意子的粒子数密度分布与统计参数无关相比，这里的统计参数 χ 在粒子数密度分布的对称性中扮演着重要的角色。

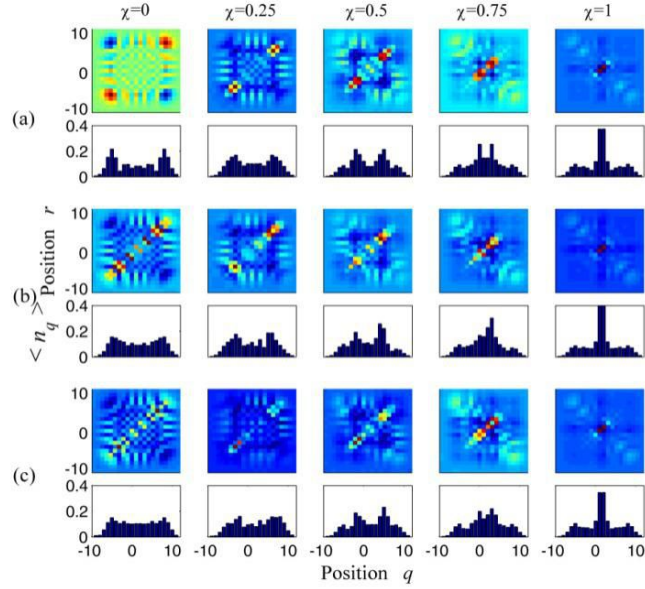


图 3.5 坐标空间下的两体关联涨落和粒子数密度分布 ($2L+1=21$, $Jt=4$)
 (a) $V/J=0$, $U/J=0$ (b) $V/J=-1$, $U/J=0$ (c) $V/J=0$, $U/J=1$

3.2 两相互作用硬核任意子的关联

鉴于上一节采用的 Anyon-Boson Mapping 方法，任意子系统在费米极限下不能真实还原费米系统，我们转向另一种定义：任意子场通过费米场来实现，即 Anyon-Fermion Mapping，这种定义保证了在费米极限下任意子系统回到了真实费米系统。在这里，引进另一参数 κ 用来描述新定义下的任意子的统计性质。这时的任意子算符满足对易关系

$$\begin{aligned}
 a_l a_k^\dagger &= \delta_{lk} - e^{-i\kappa\pi\varepsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l \\
 a_l a_k &= -e^{i\kappa\pi\varepsilon(l-k)} a_k a_l \\
 a_l^\dagger a_k^\dagger &= -e^{i\kappa\pi\varepsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l^\dagger
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

当 $\varepsilon(x) = 0$ 时，泡利不相容原理 $a_l^{\dagger 2} = a_l^2 = 0$ 和 $\{a_l, a_l^\dagger\} = 1$ 自动满足，而这些对易关系往往用来描述硬核条件。所以拥有这些性质的任意子被称为硬核任意子。相应地，对易关系式 (3.7) 连接真实的费米子 ($\kappa = 0$) 和硬核玻色子 ($\kappa = 1$)，而对易关系式 (3.2) 连接普通的玻色子 ($\chi = 0$) 和赝费米子 ($\chi = 1$)。这一节，我们研究一维光晶格中两

硬核任意子的量子行走，其哈密顿量写为

$$H^{HCA} = \sum_{l=-L}^L \left[-J(a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + V n_l n_{l+1} \right] \quad (3.8)$$

该模型同样可以通过广义 Jordan-Wigner 变换将硬核任意子系统映射到无自旋费米系统来研究。其中映射关系式

$$a_l = f_l \exp\left(-i\kappa\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right), \quad a_l^\dagger = \exp\left(i\kappa\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right) f_l^\dagger \quad (3.9)$$

f_l^\dagger , f_l 分别是费米子的产生、湮灭算符； $n_l = a_l^\dagger a_l = f_l^\dagger f_l$ 是两种粒子的粒子数算符。

通过 J-W 变换，满足周期性边界条件的硬核任意子哈密顿量式 (3.8) 可以用费米算符重新表示为

$$H^f = -J \sum_{l=-L}^L (f_l^\dagger f_{l+1} + \text{H.c.}) - J \left[\exp\left(i\kappa\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right) f_L^\dagger f_{-L} + \text{H.c.} \right] + V \sum_{l=-L}^L n_l n_{l+1} \quad (3.10)$$

这里，我们注意到一个较大的不同点就是由于硬核的限制条件，统计因子只能出现在边界项。相应的希尔伯特空间表示为 $\mathcal{B}_{HCA}^2 = \mathcal{B}_f^2 = \{|l_1 l_2\rangle = f_{l_1}^\dagger f_{l_2}^\dagger |0\rangle, -L \leq l_1 < l_2 \leq L\}$ 。仍然选择初态 $|\psi_0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ 来讨论硬核任意子的量子行走行为。

图 3.6 给出两硬核任意子在坐标空间的关联，我们发现随着相互作用的增大关联图像由反聚束过渡到绑定行走，但整个过程对统计参数的参与并没有什么反应，且同之前描述的费米系统几乎完全一样。同时，图像的每一行肉眼看上去几乎相同，尽管数据存在细微的变化。出现这种现象的原因是：对于系统的哈密顿量，除了边界项，其完全等同于费米系统，而我们这里选择的时间参数还未允许粒子运动到晶格边界，所以边界项的作用几乎为零，波函数完全可以由相应参数下的费米系统求出；而对于二阶关联函数 $\Gamma_{qr}(t)$ ，鉴于硬核限制条件，关联函数的对角项元素消失，且关联函数式 $\Gamma_{qr}(t) = \langle \psi^{HCA}(t) | a_q^\dagger a_r^\dagger a_r a_q | \psi^{HCA}(t) \rangle = \langle \psi^{HCA}(t) | n_q n_r | \psi^{HCA}(t) \rangle$ 中统计参数自动取消。所以，统计参数对坐标空间下硬核任意子的关联效应没有影响。同时，考虑到粒子数密度是关联矩阵的列向量求和，可知统计参数对坐标空间下硬核任意子的粒子数密度分布也没有影响。但对于 $\Gamma_{\alpha\beta}(t) = \langle \psi^{HCA}(t) | a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\beta a_\alpha | \psi^{HCA}(t) \rangle$ 动量空间关联函数，我们需要计算诸如 $\langle \psi^{HCA}(t) | a_p^\dagger a_q^\dagger a_r a_s | \psi^{HCA}(t) \rangle$ 一类的项，且 q 、 p 、 r 、 s 四指标一般是不

同的。在这里，映射的操作将会引入统计参数 κ 。进而，图 3.7 描述的动量空间将呈现更加丰富的信息。在图 3.7 中第一列和最后一列精确地对应于真实费米系统 ($\kappa=0$) 和硬核玻色系统 ($\kappa=1$)。一旦统计参数偏离费米、玻色两极限，关联函数的非对称性就显现出来，且统计参数 κ 从 0 到 1 的变化实现了费米反聚束到硬核玻色聚束的缓慢变化。特别地，针对强相互作用，图 3.7 (d) 清楚地显示了两彩条是如何平缓地合并为一个彩条的。这为通过观察动量空间的关联来探究不同统计参数取值提供了一种方法，而这种方法在当下的冷原子实验室是可行的。

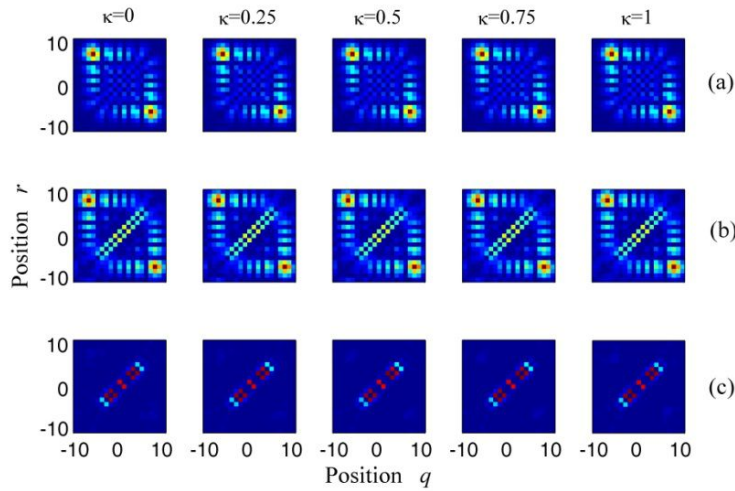


图 3.6 两硬核任意子的量子行走坐标空间的两体关联效应 ($2L+1=21$)
 (a) $V/J=0, Jt=4$ (b) $V/J=-1, Jt=4.5$ (c) $V/J=-4, Jt=7.5$

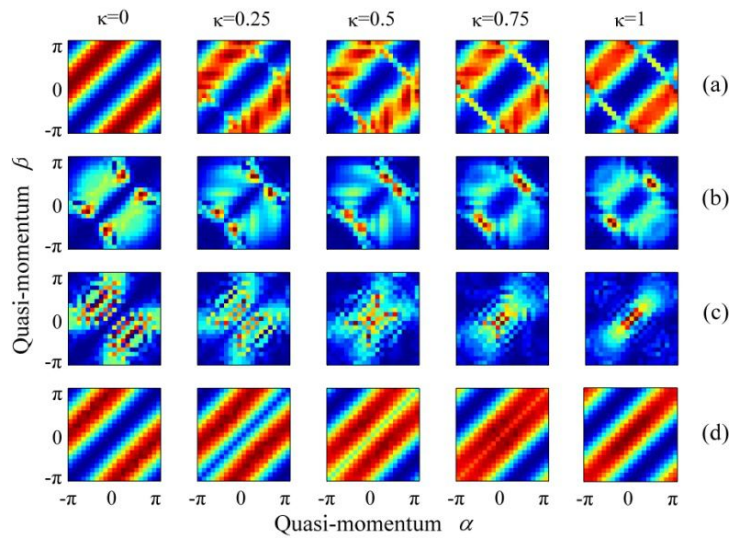


图 3.7 两硬核任意子的量子行走动量空间的两体关联效应 ($2L+1=21$)
 (a) $V/J=0, Jt=4$ (b) $V/J=-1, Jt=4.5$ (c) $V/J=-4, Jt=7.5$ (d) $V/J=-80, Jt=110$

3.3 小结

本章我们通过引入两种映射理论，分别讨论了统计参数对两相互作用任意子和硬核任意子的二阶关联效应的影响。发现在坐标空间，对于 Kundu 定义下的任意子，在有限相互作用下，统计参数一旦偏离玻色、费米两极限，就会导致关联矩阵对称性的破缺，而在强相互作用下，由于承载统计参数的动能项被视为微扰，统计参数导致的关联矩阵的不对称现象消失，只起到收缩效应，但是，在有限近邻相互作用下，考虑了较强的同一格点相互作用时，统计参数引起的收缩效应也消失了。此外，统计参数也会影响粒子数密度分布的对称性；而对于 Girardeau 定义下的任意子，即硬核任意子，其关联矩阵和粒子数密度分布的对称性均不受统计参数的影响。但是到了动量空间，统计参数的存在使得两任意子关联矩阵对称性破缺的程度越发显著，即使在费米极限下也不对称；可这时两硬核任意子关联矩阵却感受到了统计参数的影响，在偏离两极限时，关联图像出现不对称现象，且随着统计参数从 0 到 1 的变化，关联图像由费米系统过渡到硬核玻色系统。

值得说明的是，两种映射理论都没有完美实现玻色系统和费米系统的过渡，具体情况如图 3.8。所以，不能简单地认为任意子就是介于玻色、费米之间的一种粒子，两种映射都只能退回到其中的一种极限。

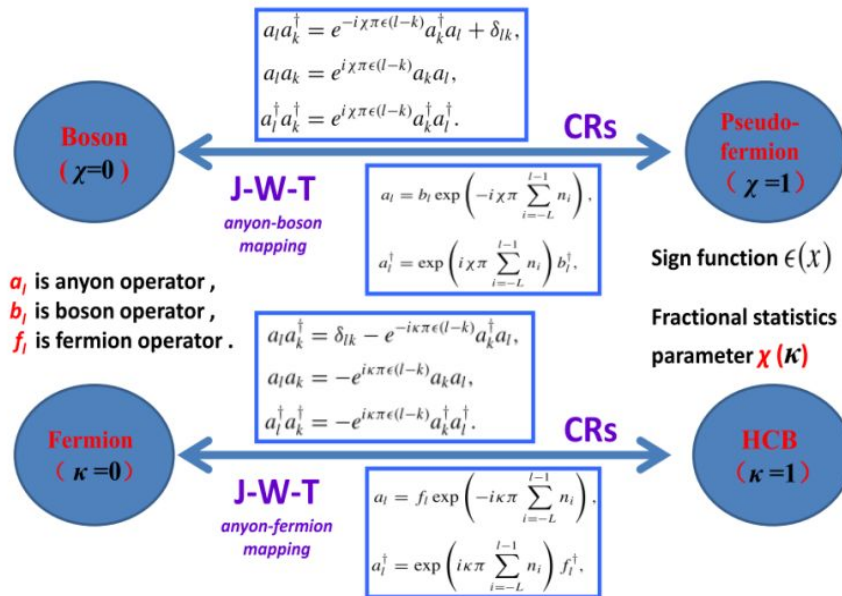


图 3.8 两种映射理论示意图

第四章 总结与展望

4.1 总结

本文首先基于一维玻色-哈伯德模型的各种扩展形式，讨论了一维光晶格中两全同粒子的量子行走。具体分析了量子统计性质，初态波函数，相互作用强度以及相互作用模式对两粒子二阶关联函数的影响。在讨论中发现：

- 1) 两粒子之间即使没有相互作用也可产生量子干涉现象。
- 2) 针对同一初始量子态，服从不同量子统计性质的粒子，呈现的关联性质不同；对于具体服从一种量子统计性质的粒子，在不同的初始量子态下呈现不同的关联行为。
- 3) 玻色系统的纠缠态(*NOON*态)一定程度上实现了费米直积态所呈现的关联性质；且直积态的关联效应在实验上是可以经典光来模拟的，但是纠缠态却找不到相应的经典对应物。
- 4) 考虑了同一格点的相互作用，当选择的初态波函数(直积态)同时适用于玻色系统和费米系统时，随着相互作用的增大，两粒子量子行走的关联图像由玻色系统过渡到硬核玻色系统；当选择的初态波函数仅适用于玻色系统时，随着相互作用的增大，两粒子被束缚于初始位置。但是， U 取值的正负并不影响此变化过程。
- 5) 考虑近邻相互作用时，相互作用的强弱决定了两粒子是独立行走还是绑定行走，而绑定行走的具体形式是初态波函数和相互作用模式共同作用的结果。同时，相互作用 V 取值的正负不影响相应的物理规律。
- 6) 线性外势导致了纠缠态的布洛赫振荡，体现了量子行走的周期性，且发现粒子数密度振荡周期的长短与粒子数的个数有关；聚束一反聚束转化的周期与粒子初始置入晶格的指标差有关。而非线性相互作用的存在破坏了振荡的周期性。
- 7) 无序(对角无序和非对角无序)系统导致了安德森局域现象。

此外，利用两种映射理论，通过数值求解，研究了统计参数对 Kundu 任意子和 Girardeau 任意子两体关联矩阵的影响。具体情况如下：

- 1) 在坐标空间中，Kundu 定义下的任意子，在有限相互作用下，统计参数一旦偏离玻色、费米两极限，关联矩阵的不对称现象就会出现，且费米极限下虽然对称，但不是真实的费米系统。而在强相互作用下(由于承载统计参数的动能项，与相互作用项相比，作用效果较小，被视为微扰)统计参数导致的关联矩阵的不对称现象消失，只起到收缩效应，此外，统计参数也会影响关联涨落和粒子数密度分

布的对称性；Girardeau 定义下的任意子，即硬核任意子，其关联矩阵对称性和粒子数密度分布的对称性均不受统计参数的影响。

- 2) 在动量空间中，统计参数的存在使得两任意子关联矩阵对称性破缺的程度越发显著，即使是费米极限，即使是没有相互作用，不对称现象依然存在；可这时由于坐标空间和动量空间之间的傅里叶变换操作，两硬核任意子关联矩阵却感受到了统计参数的影响，在偏离两极限时，关联图像出现不对称现象，且随着统计参数从 0 到 1 的变化，关联图像由费米系统过渡到硬核玻色系统。

总之，两种映射理论都没有完美实现玻色系统和费米系统的过渡。也不能简单地认为任意子就是介于玻色、费米之间的一种粒子，任意一种映射都只能退回到一种极限。

4.2 展望

本文的很多讨论都是基于粒子没有到达晶格边界做的分析，那粒子到达边界又会带来怎么的效果？对于不同的边界条件（周期边界条件，开边界条件，无穷边界条件，单边边界条件，反射边界条件，扭曲边界条件^[100]），关联图像会存在怎样的差异？比如对于扭曲边界条件

$$a_{L+1} = e^{-i\delta} a_1 \quad (4.1)$$

其中， δ 表示相位因子。它会在边界连接处引进一个相位因子。这样在一维的玻色、费米系统中同样可以研究相因子的影响。

此外，在第二章的讨论中，我们获知最近邻相互作用和次近邻相互作用对系统关联性质的影响是不同的。后面的工作，完全可以考虑非近邻格点间的跃迁，比如考虑系统哈密顿量为

$$H = \gamma \sum_{l=-L}^L \left((2m+1) a_l^\dagger a_l - \sum_{z=-m}^m a_{l+m}^\dagger a_l \right) \quad z \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

其中 γ 表示粒子在格点间的跳跃强度， $2m$ 表示粒子跃迁到的近邻格点数，且左右各 m 。图 4.1 给出了 $m=3$ 的示意图。同样，通过一定的技术手段可以调控 γ 使粒子以不同的强度跃迁到不同的格点，进而研究 γ 对粒子关联性质的影响。

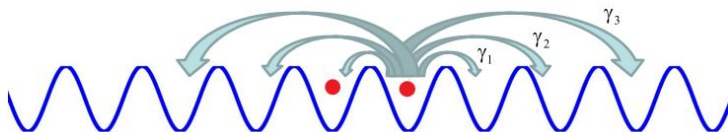


图 4.1 $m=3$ 的示意图

同时，将 γ 的操作引进哈密顿量

$$H = -\gamma \sum_{l=-L}^L (a_l^\dagger a_{l+1} + \text{H.c.}) + B \sum_{l=-L}^L l a_l^\dagger a_l \quad (4.3)$$

有

$$H = -\sum_{l=-L}^L (\gamma_1 a_l^\dagger a_{l+1} + \gamma_2 a_l^\dagger a_{l+2} + \text{H.c.}) + B \sum_{l=-L}^L l a_l^\dagger a_l \quad (4.4)$$

也可以观察 γ 对布洛赫振荡的影响。

而关于局域理论工作的扩展，可以关注非线性项的影响。

总之，复杂可行的量子行走模型的建立将会为量子计算理论提供很好的前景。

附录 A 硬核玻色子在动量空间的对易关系证明

证明对易关系

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{L_{total}} \sum_{\gamma, \gamma'=-L}^L \delta_{\alpha+\gamma, \beta+\gamma'} a_\gamma^\dagger a_{\gamma'} \quad (\text{A.1})$$

证明过程

$$\begin{aligned}
& [a_\alpha, a_\beta^\dagger] \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{l=-L}^L e^{ip_\alpha l} a_l, \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{k=-L}^L e^{-ip_\beta k} a_k^\dagger \right] \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(-L)} a_{-L} + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(-L+1)} a_{-L+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(L-1)} a_{L-1} + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(L)} a_L, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(-L)} a_{-L}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(-L+1)} a_{-L+1}^\dagger + \dots + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(L-1)} a_{L-1}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(L)} a_L^\dagger \right] \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(-L)} a_{-L}, \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(-L)} a_{-L}^\dagger \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(-L+1)} a_{-L+1}, \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(-L+1)} a_{-L+1}^\dagger \right] \\
&\quad + \dots + \left[\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(L-1)} a_{L-1}, \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(L-1)} a_{L-1}^\dagger \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{ip_\alpha(L)} a_L, \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{-ip_\beta(L)} a_L^\dagger \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)(-L)} [a_{-L}, a_{-L}^\dagger] + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)(-L+1)} [a_{-L+1}, a_{-L+1}^\dagger] \\
&\quad + \dots + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)(L-1)} [a_{L-1}, a_{L-1}^\dagger] + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)L} [a_L, a_L^\dagger] \\
&= \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)(-L)} (1 - 2a_{-L}^\dagger a_{-L}) + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)(-L+1)} (1 - 2a_{-L+1}^\dagger a_{-L+1}) \\
&\quad + \dots + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)(L-1)} (1 - 2a_{L-1}^\dagger a_{L-1}) + \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} e^{i(p_\alpha-p_\beta)L} (1 - 2a_L^\dagger a_L) \\
&= \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{l=-L}^L e^{i(p_\alpha-p_\beta)l} - \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{l=-L}^L e^{i(p_\alpha-p_\beta)l} 2a_l^\dagger a_l \\
&= \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{l=-L}^L e^{i(p_\alpha-p_\beta)l} 2 \left(\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{\gamma=-L}^L e^{ip_\gamma l} a_\gamma^\dagger \right) \left(\frac{1}{\sqrt{L_{total}}} \sum_{\gamma'=-L}^L e^{-ip_{\gamma'} l} a_{\gamma'} \right) \\
&= \delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{L_{total}} \sum_{\gamma, \gamma'=-L}^L \sum_{l=-L}^L e^{i(p_\alpha-p_\beta+p_\gamma-p_{\gamma'})l} a_\gamma^\dagger a_{\gamma'} \\
&= \delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{L_{total}} \sum_{\gamma, \gamma'=-L}^L \delta_{\alpha+\gamma, \beta+\gamma'} a_\gamma^\dagger a_{\gamma'}
\end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

附录 B Anyon-Boson Mapping 公式的相关证明

Anyon-Boson Mapping 公式

$$a_l = b_l \exp\left(-i\chi\pi \sum_{i=-L}^{l-1} n_i\right) \quad (\text{B.1})$$

假定任意子满足对易关系

$$a_l a_k^\dagger = e^{-i\chi\pi\epsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l + \delta_{lk} \quad (\text{B.2})$$

且这里取 $l < k$ ，我们利用映射关系求得

$$\begin{aligned} a_l a_k^\dagger &= b_l \exp\left(-i\chi\pi \sum_{m=-L}^{l-1} n_m\right) \exp\left(i\chi\pi \sum_{m=-L}^{k-1} n_m\right) b_k^\dagger \\ &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) b_l b_k^\dagger \exp(i\chi\pi n_l) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} e^{-i\chi\pi\epsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l &= e^{i\chi\pi} \exp\left(i\chi\pi \sum_{m=-L}^{k-1} n_m\right) b_k^\dagger b_l \exp\left(-i\chi\pi \sum_{m=-L}^{l-1} n_m\right) \\ &= e^{i\chi\pi} \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) \exp(i\chi\pi n_l) b_k^\dagger b_l \\ &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) \exp(i\chi\pi(n_l + 1)) b_k^\dagger b_l \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} a_l a_k^\dagger - e^{-i\chi\pi\epsilon(l-k)} a_k^\dagger a_l &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) b_l b_k^\dagger \exp(i\chi\pi n_l) - \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) \exp(i\chi\pi(n_l + 1)) b_k^\dagger b_l \\ &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) (b_l \exp(i\chi\pi n_l) b_k^\dagger - \exp(i\chi\pi(n_l + 1)) b_k^\dagger b_l) \\ &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) (\exp(i\chi\pi(n_l + 1)) b_l b_k^\dagger - \exp(i\chi\pi(n_l + 1)) b_k^\dagger b_l) \\ &= \exp\left(i\chi\pi \sum_{l < m < k} n_m\right) \exp(i\chi\pi(n_l + 1)) [b_l, b_k^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

其中：

$$\begin{aligned}
 & b_l \exp(i\chi\pi n_l) \\
 &= b_l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\chi\pi b_l^\dagger b_l)^m}{m!} \\
 &= b_l + b_l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\chi\pi b_l^\dagger b_l)^m}{m!} \\
 &= b_l + \frac{i\chi\pi}{1!} b_l b_l^\dagger b_l + \frac{(i\chi\pi)^2}{2!} b_l (b_l^\dagger b_l)^2 + \frac{(i\chi\pi)^3}{3!} b_l (b_l^\dagger b_l)^3 + \dots \\
 &= b_l + \frac{i\chi\pi}{1!} (1 + b_l^\dagger b_l) b_l + \frac{(i\chi\pi)^2}{2!} (1 + b_l^\dagger b_l) b_l (b_l^\dagger b_l) + \frac{(i\chi\pi)^3}{3!} (1 + b_l^\dagger b_l) b_l (b_l^\dagger b_l)^2 + \dots \\
 &= b_l + \frac{i\chi\pi}{1!} (1 + n_l) b_l + \frac{(i\chi\pi)^2}{2!} (1 + n_l)^2 b_l + \frac{(i\chi\pi)^3}{3!} (1 + n_l)^3 b_l + \dots \\
 &= \exp(i\chi\pi (n_l + 1)) b_l
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

结合式子 (B.2) 和 (B.5), 可知 $[b_l, b_k^\dagger] = 0$, b_l 是玻色算符, 满足对易关系。

参考文献

- [1] Leinaas, J. and Myrheim, J. , On the theory of identical particles[J]. *Nuovo Cimento B*, 1977, **37**: 1.
- [2] Goldin, G. A., Menikoff, R. and Sharp, D. H. , Representations of a local current algebra in nonsimply connected space and the Aharonov-Bohm effect[J]. *J. Math. Phys.* 1981, **22**: 1664.
- [3] Wilczek, F. , Magnetic flux, angular momentum, and statistics[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1982, **48**: 1144.
- [4] Tsui, D. C., Stormer, H. L. and Gossard, A. C. , Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1982, **48**: 1559.
- [5] Laughlin, R. B., Anomalous quantum hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1983, **50**: 1395.
- [6] V. S. Letokhov, Doppler line narrowing in a stand light wave[J]. *JETP Letter*, 1968, **7**: 272.
- [7] C Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf, C. Cohen-Tannoudji Channeling Atoms in a Laser Standing Wave[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1987, **59**:1659. ,
- [8] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models[J], *J. opt. Soc. Am.*, 1989, 2023.
- [9] C. Cohen- Tannoudji and W.D. Phillips, New Mechanisms for Laser Cooling, *Phys. Today*, 1990, 33.
- [10] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger. Many-body physics with ultracold gases[J] . *Rev. Mod. Phys.* 2008, **80**: 885.
- [11] M.P.A. Fischer, Quantum Phase Transitions in Disordered Two-Dimensional Superconductors[J] . *Phys. Rev. Lett.* 1990, **65**: 923.
- [12] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001.
- [13] Min-Chul Cha, M.P.A. Fischer, S.M. Girvin, M. Wallin, and A.P. Young, Universal conductivity of two-dimensional films at the superconductor-insulator transition [J]. *Phys. Rev. B*,1991, **44**: 6883.
- [14] D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner, and P. Zoller, Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices[J]. *Phys. Rev. Lett.* 1998, **81**: 3108.

- [15] 李敏, 博士论文: 量子随机行走的基本性质及应用研究, 中国科技大学 (2013) .
- [16] Aharonov Y, Davidovich L, and Zagury N. , Quantum random walks [J]. Phys. Rev. A, 1993, **48**(2): 1687.
- [17] E. Farhi, and S. Gutmann, Quantum computation and decision trees[J]. Phys. Rev. A , 1998, **58**: 915.
- [18] J. Watrous, Quantum simulations of classical random walks and undirected graph connectively[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2001, **62**: 376.
- [19] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous, One Dimensional Quantum Walk, In: Proceeding of the 33th AGM Symposium on The Theory of Computation (STOC'01) ACM pp. 60-69 (2001).
- [20] A. M. Childs, E. Farhi and S. Gutmann, An Example of the Difference Between Quantum and Classical Random Walks, Quantum Information Processing. 1, pp. 35-43 (2002).
- [21] N. Shenvi, J. Kempe and K. B. Whaley, Quantum random-walk search algorithm[J]. Phys. Rev. A, 2003, **67**: 052307.
- [22] A. Ambainis, Quantum walk algorithm for element distinctness, SIAM Journal on Computing, 2007, **37**(1): 210.
- [23] A. M. Childs, Universal computation by quantum walk[J], Phys. Rev. Lett. 2009, **102**: 180501.
- [24] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, and V. Kendon, Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk[J]. Phys. Rev. A, 2010, **81**: 042330.
- [25] A. M. Childs, D. Gosset and Z. Webb, Universal computation by multi-particle quantum walk[J] Science, 2013, **39**: 791.
- [26] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, Quantum walks driven by many coins[J]. Phys. Rev. A, 2003, **67**: 052317.
- [27] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, Quantum random walks with decoherent coins[J]. Phys. Rev. A , 2003, **67**: 032304.
- [28] Yoav Lahini, Yaron Bromberg, Demetrios N. Christodoulides, and Yaron Silberberg. Quantum Correlations in Two-Particle Anderson Localization[J]. Phys. Rev. Lett. 2010, **105**: 163905.

- [29] A. Wójcik, T. Luczak, P. Kurzynski, A. Grudka, T. Gdala, and M. Bednarska-Bzdęga, Trapping a particle of a quantum walk on the line[J]. Phys. Rev. A, 2012, **85**: 012329.
- [30] Andrea Crespi, Roberto Osellame, Roberta Ramponi, Vittorio Giovannetti, Rosario Fazio, Linda Sansoni, Francesco De Nicola, Fabio Sciarrino, and Paolo Mataloni, Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk[J]. Nat. Photonics, 2013, **7**: 322.
- [31] R. Zhang, P. Xue, and J. Twamley, One-dimensional quantum walks with single-point phase defects[J]. Phys. Rev. A, 2014, **89**: 042317.
- [32] Yoav Lahini, Assaf Avidan, Francesca Pozzi, Marc Sorel, Roberto Morandotti, Demetrios N. Christodoulides, and Yaron Silberberg. Anderson Localization and Nonlinearity in One-Dimensional Disordered Photonic Lattices[J]. Phys. Rev. Lett. 2008, **100**: 013906.
- [33] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potocek, A. Gábris, I. Jex, and Ch. Silberhorn. Decoherence and Disorder in Quantum Walks: From Ballistic Spread to Localization[J]. Phys. Rev. Lett. 2011, **106**: 180403.
- [34] A. Wójcik, T. Luczak, P. Kurzynski, A. Grudka, and M. Bednarska, Quasiperiodic Dynamics of a Quantum Walk on the Line[J]. Phys. Rev. Lett. 2004, **93**: 180601.
- [35] Yaron Bromberg, Yoav Lahini, and Yaron Silberberg. Bloch Oscillations of Path-Entangled Photons[J]. Phys. Rev. Lett. 2010, **105**: 263604.
- [36] M. Genske, W. Alt, A. Steffen, A. H. Werner, R. F. Werner, D. Meschede, and A. Alberti, Electric Quantum Walks with Individual Atoms[J]. Phys. Rev. Lett. 2013, **110**: 190601.
- [37] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg, and E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks[J]. Phys. Rev. A, 2010, **82**: 033429.
- [38] J. K. Asbóth, Symmetries, topological phases, and bound states in the one-dimensional quantum walk[J]. Phys. Rev. B, 2012, **86**: 195414.
- [39] T. Kitagawa, M. A. Broome, A. Fedrizzi, M. S. Rudner, E. Berg, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, E. Demler, and A. G. White, Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks[J]. Nature Commun. 2012, **3**: 882.
- [40] Y. E. Kraus, Y. Lahini, Z. Ringel, M. Verbin, and O. Zeitun, Topological States and Adiabatic Pumping in Quasicrystals[J]. Phys. Rev. Lett. 2012, **109**: 106402.

- [41] Chandrashekar, C.M., Laflamme, R. Quantum phase transition using quantum walks in an optical lattice[J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **78**: 022314.
- [42] J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou, and R. Han, Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm[J]. *Phys. Rev. A*, 2003, **67**: 042316.
- [43] C. A. Ryan, M. Laforest, J. C. Boileau, and R. Laflamme, Experimental implementation of discrete time quantum random walk on an NMR quantum information processor[J]. *Phys. Rev. A*, 2005, **72**: 062317.
- [44] J. M. Grossman, D. Ciampini, M. D. Arcy, K. Helmerson, P. D. Lett, W. D. Phillips, A. Vaziri and S. L. Rolston, Implementation of a quantum random walk with a sodium Bose- Einstein condensate, The 35th Meeting of the Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, Tuscon, AZ, (DAMOP04), (2004).
- [45] H. B. Perets, Y. Lahini, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti and Y. Silberberg, Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2008, **100**: 170506.
- [46] B. C. Travaglione and G. J. Milburn, Implementing the quantum random walk[J]. *Phys. Rev. A* , 2002, **65**: 032310.
- [47] W. Dur' R. Raussendorf, V. M. Kendon, and H. J. Briegel, Quantum walks in optical lattice[J]. *Phys. Rev. A*, 2002, **66**: 052319.
- [48] K. Eckert, J. Mompart, G. Birkel, and M. Lewenstein, One- and two- dimensional walks in arrays of optical traps[J] *Phys. Rev. A*, 2005, **72**: 012327.
- [49] C. M. Chandrashekar. Implementing the one-dimensional quantum (Hadamard) walk using Bose-Einstein condensate[J]. *Phys. Rev. A*, 2006, **74**: 032307.
- [50] Z. Y. Ma, K. Burnett, M. A. d'Arcy, and S. A. Gardiner, Quantum random walk using quantum accelerator modes[J]. *Phys. Rev. A*, 2006, **73**: 013401.
- [51] K. Manouchehri and J. B. Wang, Quantum walks in an array of quantum dots[J]. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2008, **41**:065304.
- [52] Y. Lahini, M. Verbin, S. D. Huber, Y. Bromberg, R. Pugatch and Y. Silberberg, Quantum walk of two interacting bosons[J]. *Phys. Rev. A*, 2012, **86**: 011603.
- [53] L. Sansoni, F. Sciarrino, g. Vallone, P. Mataloni, A. Crespi, R. Ramponi and R. Osellame, Two-Particle Bosonic-Fermionic Quantum Walk via Integrated

- Photonics[J]. Phys. Rev. Lett. 2012, **108**: 010502.
- [54] Andreas Schreiber, Aurél Gábris, Peter P. Rohde, Kaisa Laiho, Martin Štefaňák, Václav Potocek , Craig Hamilton, Igor Jex, and Christine Silberhorn, A 2D Quantum Walk Simulation of Two-Particle Dynamics[J]. Science, 2012, **336**: 55.
- [55] Philipp M. Preiss, Ruichao Ma, M. Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli, Philip Zupancic, Yoav Lahini, Rajibul Islam, Markus Greiner, Strongly correlated quantum walks in optical lattices[J]. Science, 2015, **347**: 1229.
- [56] Engel, G.S. et al. Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems[J]. Nature, 2007, **446**: 782.
- [57] Mohseni, M., Rebentrost, P., Lloyd, S., and Aspuru-Guzik, A., Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer[J]. J. Chem. Phys. 2008, **129**: 174106.
- [58] B. I. Halperin, Statistics of Quasiparticles and the Hierarchy of Fractional Quantized Hall States [J]. Phys. Rev. Lett. 1984, **52**: 1583.
- [59] F. Wilczek, Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles[J]. Phys. Rev. Lett. 1982, **49**: 957.
- [60] Xi Lin, Ruirui Du and Xincheng Xie, Recent experimental progress of fractional quantum Hall effect: $5/2$ filling state and graphene National Science Review1: 564–579, 2014.
- [61] G. S. Canright and S. M. Girvin, Fractional Statistics: Quantum Possibilities in Two Dimensions[J]. Science, 1990, **247**: 1197.
- [62] F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity, Singapore, World Scientific, 1990.
- [63] F. D. M. Haldane, "Fractional Statistics" in Arbitrary Dimensions: A Generalization of the Pauli Principle[J]. Phys. Rev. Lett. 1991, **67**: 937.
- [64] A. Kundu, Exact Solution of Double d Function Bose Gas through an Interacting Anyon Gas[J]. Phys. Rev. Lett. 1999, **83**: 1275.
- [65] O. I. Pâtu, V. E. Korepin, and D. V. Averin, Correlation functions of one-dimensional Lieb–Liniger anyons[J]. J. Phys. A: Math. Theor. 2007, **40**: 14963.
- [66] M. T. Batchelor, X.-W. Guan, and J.-S. He, The Bethe ansatz for 1D interacting anyons[J]. J. Stat. Mech. (2007)P03007.

- [67] E. H. Lieb and W. Liniger, Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State[J], Phys. Rev., 1963, **130**: 1605.
- [68] E. H. Lieb, Exact Analysis of an Interacting Bose Gas.II. The Excitation Spectrum[J]. Phys. Rev., 1963, **139**: 1616.
- [69] M. T. Batchelor and X.-W. Guan, Generalized exclusion statistics and degenerate signature of strongly interacting anyons[J]. Phys. Rev. B, 2006, **74**: 195121.
- [70] M. D. Girardeau, Anyon-Fermion Mapping and Applications to Ultracold Gases in Tight Waveguides[J]. Phys. Rev. Lett. 2006, **97**: 100402.
- [71] M. D. Girardeau, Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension [J]. J.Math.Phys.(N.Y.), 1960, **1**:516.
- [72] Raoul Santachiara, Franck Stauffer, and Daniel C Cabra, Entanglement properties and momentum distributions of hard-core anyons on a ring[J]. J. Stat. Mech. (2007)L05003.
- [73] Y. Hao, Y. Zhang, and S. Chen, Ground-state properties of hard-core anyons in one-dimensional optical lattices[J]. Phys. Rev. A, 2009, **79**: 043633.
- [74] Y. Hao and S. Chen, Dynamical properties of hard-core anyons in one-dimensional optical lattices[J]. Phys. Rev. A, 2012, **86**: 043631.
- [75] Yan Li, Ground-state properties of hard-core anyons in one-dimensional periodic lattices[J]. Eur. Phys. J. Plus, 2013, **128**: 94.
- [76] Tod M. Wright, Marcos Rigol, Matthew J. Davis, and Karén V. Kheruntsyan, Nonequilibrium Dynamics of One-Dimensional Hard-Core Anyons Following a Quench: Complete Relaxation of One-Body Observables[J]. Phys. Rev. Lett. 2014, **113**: 050601.
- [77] Ovidiu I Pâtu, Correlation functions and momentum distribution of one-dimensional hard-core anyons in optical lattices[J]. J. Stat. Mech. (2015)P01004
- [78] Yaron Bromberg, Yoav Lahini, Roberto Morandotti, and Yaron Silberberg, Quantum and Classical Correlations in Waveguide Lattices[J]. Phys. Rev. Lett. 2009, **102**: 253904.
- [79] Alberto Peruzzo, Mirko Lobino, Jonathan C. F. Matthews, Nobuyuki Matsuda, Alberto Politi, Konstantinos Poullos, Xiao-Qi Zhou, Yoav Lahini, Nur Ismail, Kerstin Wörhoff, Yaron Bromberg, Yaron Silberberg, Mark G. Thompson, Jeremy L. O'Brien.

- Quantum Walks of Correlated Photons[J]. *Science*, 2010, **329**: 1500 .
- [80] J. D. A. Meinecke, K. Poullos, A. Politi, J. C. F. Matthews, A. Peruzzo, N. Ismail, K. Wörhoff, J. L. O'Brien, and M. G. Thompson, Coherent time evolution and boundary conditions of two-photon quantum walks in waveguide arrays[J]. *Phys. Rev. A*, 2013, **88**: 012308.
- [81] Y. Omar, N. Paunkovic, L. Sheridan, and S. Bose, Quantum walk on a line with two entangled particles[J]. *Phys. Rev. A*, 2006, **74**: 042304.
- [82] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, C. I. Westbrook. Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases[J]. *Science*, 2005, **310**: 648.
- [83] T. Jelts, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect and C. I. Westbrook, Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions[J]. *Nature*, 2007, **445**: 402.
- [84] X. Qin, Y. Ke, X. Guan, Z. Li, N. Andrei, and C. Lee, Statistics-dependent quantum co-walking of two particles in one-dimensional lattices with nearest-neighbor interactions[J]. *Phys. Rev. A*, 2014, **90**: 062301.
- [85] 张云波, 王丽敏, 王利, 两全同粒子在一维光晶格中的量子行走, 深圳大学学报, 2015, 36 卷 1 期, 1-7.
- [86] M. Ganahl, E. Rabel, F. H. L. Essler, and H. G. Evertz, Observation of Complex Bound States in the Spin-1/2 Heisenberg XXZ Chain Using Local Quantum Quenches[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2012, **108**: 077206.
- [87] T. Fukuhara, P. Schauß, M. Endres, S. Hild, M. Cheneau, I. Bloch, and C. Gross, Microscopic observation of magnon bound states and their dynamics[J]. *Nature*, 2013, **502**: 76.
- [88] W. Liu and N. Andrei, Quench Dynamics of the Anisotropic Heisenberg Model[J]. *Phys. Rev. Lett.* 2014, **112**: 257204.
- [89] F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin, *The One-Dimensional Hubbard Model*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 38-40.
- [90] Wang Li, Hao Yajiang, Chen Shu. Quantum dynamics of repulsively bound atom

- pairs in the Bose-Hubbard model [J]. The European Physical Journal D, 2008, **48**(2): 229.
- [91] Wang Limin, Wang Li, Zhang Yunbo, Quantum Walks of Two Interacting Anyons in 1D Optical Lattices[J]. Phys. Rev. A, 2014, **90**: 063618.
- [92] Claudia Benedetti, Fabrizio Buscemi, and Paolo Bordone, Quantum correlations in continuous-time quantum walks of two indistinguishable particles[J]. Phys. Rev. A, 2012, **85**: 042314.
- [93] Oliver Mülken and Alexander Blumen, Spacetime structures of continuous-time quantum walks[J]. Phys. Rev. E, 2005, **71**: 036128.
- [94] T. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, A. Bräuer, and F. Lederer, Optical Bloch Oscillations in Temperature Tuned Waveguide Arrays[J]. Phys. Rev. Lett. 1999, **83**: 4752.
- [95] T Hartmann, F Keck, H J Korsch and S Mossmann. Dynamics of Bloch oscillations[J]. New J. Phys. 2004, 6, 2.
- [96] K. W. Mahmud, L. Jiang, E. Tiesinga, and P. R. Johnson, Bloch oscillations and quench dynamics of interacting bosons in an optical lattice[J]. Phys. Rev. A, 2014, **89**: 023606 .
- [97] G.H.Wannier, Dynamics of Band Electrons in Electric and Magnetic Fields[J]. Rev. Mod. Phys. 1962, **34**: 64.
- [99] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg and Y. Silberberg, Experimental Observation of Linear and Nonlinear Optical Bloch Oscillations[J]. Phys. Rev. Lett. 1999, **83**: 4756.
- [99] T. Keilmann, S. Lanzmich, L. McCulloch, and M. Roncaglia, Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices[J]. Nature Commun. 2011, **2**:361.
- [100] V. G. Rousseau, D. P. Arovas, M. Rigol, F. Hébert, G. G. Batrouni, and R. T. Scalettar, Exact study of the one-dimensional boson Hubbard model with a superlattice potential[J]. Phys. Rev. B, 2006, **73**: 174516.

攻读学位期间取得的研究成果

- [1] Limin Wang, Li Wang, Yunbo Zhang, Quantum walks of two interacting anyons in one-dimensional optical lattices[J]. Phys. Rev. A, 2014, **90**: 063618.
- [2] 张云波, 王丽敏, 王利, 两全同粒子在一维光晶格中的量子行走, 深圳大学学报理工版, 第 32 卷, 第 1 期, 1-7.

致 谢

转眼之间，短暂而漫长的三年研究生生活已接近尾声，回顾其中的点点滴滴，有辛酸，有迷茫，但更多的是幸福与成长。在这三年的时光，一千多个日日夜夜里，我收获了太多太多，它不只是学识得到增长、思想得以提升，心态得到历练这样一个结果，而更多是一路走来，大家给予我的鼓励和帮助，是你们一句句暖心的话语，一双双肯定的眼神，一次次坦诚的交流让我脚下的每一步都走的特别的踏实。在此论文完成之际，请允许我，向我最尊敬的导师张云波教授表示由衷的感谢！谢谢您在我迷茫时，给予我的是鼓励而不是放弃；谢谢您以身作则，教会我们做人、做事的道理。也是您对待科研工作高度认真、负责的态度激励着我，让我在困难面前没有逃避，而是毅然决然地选择了坚持。还记得投送文章前您深夜工作留在手稿上的批注，也记得文章接受时您第一时间地分享，三年来，您在科研课题操作的各个环节倾注了太多的心血，您高尚的人格，坦荡的胸怀，我将毕生难忘。作为您的学生，我很骄傲。

其次，我要感谢理论所的各位任课教师：梁九卿老师、张素英老师、闫维贤老师姜晓庶老师，王月明老师和郭利平老师，是你们对学科问题细腻深入的讲解和对物理前沿的敏锐洞察力加深了我对物理的认知，架起了我和物理科研的桥梁。同时感谢理论所聂一行老师、李志坚老师、李卫东老师、李禄老师、崔新林老师三年来给予的帮助和指导。感谢裴建文书记、郜江瑞院长等物电学院的领导给我们创造了良好的学习环境和交流平台以及班主任刘文权老师在学习、生活、工作上的关心和帮助。

感谢郭利平、王利、尹相国、王红梅、梁成功、毛丽君、李甜甜、陈冠军、刘彦霞、陈立、白守燕、万鹏宇、王娟、李旗、刘靖鹄、王乐、刘娜、冯志强、刘聪明等各位师姐师兄师妹师弟们的友好合作，正是大家一次次的交流探讨，营造了小组良好的学习氛围，让我明白科研的团队精神。

感谢太原理工大学张万舟老师给予的指导和帮助。

感谢 2012 级的学友们三年来的陪伴和开导。

感谢我亲爱的老爸老妈，谢谢你们的默默支持和无尽的爱！

王丽敏

2015 年 3 月于山西大学理论物理研究所

个人简况及联系方式

姓名：王丽敏

性别：女

籍贯：山西省晋中市

学习经历：2012 年 9 月至 2015 年 6 月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

联系方式：18735177644

电子信箱：wlm201222601007@163.com

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日