



山西大學
Shanxi University

2018 届硕士学位论文

一维无序光晶格中硬核玻色气体的
量子相变

作者姓名	田康康
指导教师	王 利 副教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2015 年 9 月至 2018 年 6 月

二〇一八年六月

山西大学

2018 届硕士学位论文

一维无序光晶格中硬核玻色气体的 量子相变

作者姓名	田康康
指导教师	王 利 副教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2015 年 9 月至 2018 年 6 月

二〇一八年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2018

Quantum phase transition of a hard-core boson gas in
one-dimensional disordered optical lattices

Student Name	Kang-kang Tian
Supervisor	Associate Prof. Li Wang
Major	Condensed Matter Physics
Field of Research	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2015.09-2018.06

June, 2018

目 录

中文摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 晶格模型.....	1
1.1.1 玻色-爱因斯坦凝聚.....	1
1.1.2 光晶格的形成.....	2
1.2 硬核玻色气体.....	3
1.3 无序、相互作用及局域化现象.....	6
1.3.1 安德森局域化.....	7
1.3.2 安德森局域化在超冷原子系统中的实验实现.....	8
1.3.3 超流-玻色玻璃相变.....	10
1.4 论文结构安排.....	12
第二章 一维硬核玻色气体的严格求解方法.....	13
2.1 理论模型.....	13
2.2 Holstein-Primakoff 变换及 Jordan-Wigner 变换.....	14
2.3 单粒子关联函数.....	16
2.4 超流因子.....	19
2.5 计算示例.....	21
2.6 小结.....	24
第三章 非对角准无序 Aubry-André 模型中的玻色玻璃相变.....	25
3.1 理论模型及方法.....	25
3.2 超流到玻色玻璃相的量子相变.....	26
3.3 玻色玻璃相的性质.....	27
3.4 小结.....	31
第四章 总结与展望.....	33
4.1 总结.....	33
4.2 展望.....	33

参考文献.....	35
攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目	41
致 谢	43
个人简况及联系方式	45
承 诺 书.....	47
学位论文使用授权声明.....	49

Contents

Chinese Abstract	I
ABSTRACT	III
Chapter 1 Preface	1
1.1 Lattice model.....	1
1.1.1 Bose-Einstein condensate.....	1
1.1.2 The formation of optical lattice.....	2
1.2 Hard-core bosons gas.....	3
1.3 Disorder, interaction and localization.....	6
1.3.1 Anderson localization.....	7
1.3.2 Experimental realization of Anderson localization.....	8
1.3.3 The phase change of superfluid to the bose-glass.....	10
1.4 The structure of the paper.....	12
Chapter 2 Exact approach to the hard-core bose gas in one dimension	13
2.1 Theoretical model.....	13
2.2 Holstein-Primakoff and Jordan-Wigner transform.....	14
2.3 Single particle correlation function.....	16
2.4 Superfluid fraction.....	19
2.5 Calculation example.....	21
2.6 Summary.....	24
Chapter 3 Bose glass transition in off-diagonal quasirandom Aubry-André model ..	25
3.1 Theoretical model and method.....	25
3.2 The phase change of superfluid to the bose-glass.....	26
3.3 The nature of the bose glass phase.....	27
3.4 Summary.....	31
Chapter 4 Summary and Outlook	33
4.1 Summary.....	33
4.2 Outlook.....	33
References	35

Research Achievements	41
Acknowledgment	43
Personal Profiles	45
Letter of Commitment	47
Authorization Statement	49

中文摘要

超冷原子是处于极低温度状态下的原子，一般此温度接近于绝对零度。实验上通常将超冷原子体系束缚于光晶格等各种外部势场中来研究它们的物理性质。由于现代量子光学等实验技术的发展，这类系统具有了很好的可控性与多样性，可以用来模拟研究非常理想化的模型。光晶格中的超冷原子体系已经成为研究量子相变等基本物理现象的非常重要且有效的平台，比如常常被人们用来研究超流、BCS 到 BEC 的 crossover 等。目前实验上已经找到许多手段在光晶格中引入无序，并且观测到了物质波中的 Anderson 局域化等现象。因而在光晶格平台上基于超冷原子系统研究无序及杂质的物理效应逐渐成为理论和实验研究的热点问题。

在光晶格中实现无序的方式有很多，比如可以在主晶格上叠加非公度次晶格实现，也可以在超冷原子气体上照射各种奇特的激光散斑图案实现，还可以在光晶格中随机载入另一种比较重的原子实现等。非公度光晶格中超冷原子的物理性质可以通过 Aubry-André(AA)模型来描述。在此模型下人们发现，随着无序强度的不断增加，系统基态会发生从超流到玻色玻璃相的量子相变。Aubry-André(AA)模型渐渐被人们广泛研究，随之涌现出了很多该模型的变形，其中一个非有常趣的便是非对角 Aubry-André(AA)模型。在本论文中，我们重点研究了非对角 Aubry-André(AA)模型描述的一维光晶格超冷硬核玻色原子气体的物理性质。

超冷硬核玻色气体是指玻色子间的相互作用趋于无穷大的超冷玻色原子气体。这是一种非常理想化的极限情况，通常只是在理论上加以研究。然而神奇的是借助 Feshbach 共振等手段，实验上竟然真真切切地在超冷原子平台上实现了这一有趣的物理系统。本文首先介绍了晶格硬核玻色气体的严格数值处理方法，然后基于此方法对 Aubry-André(AA)模型的既有结果进行了重复和探索。接下来我们重点研究了处于一维非对角无序光晶格中超冷硬核玻色气体的量子相变，主要分析了非对角无序对硬核玻色气体的基态性质的影响。基于非对角 Aubry-André(AA)模型，采用前面介绍的严格的数值计算方法，我们给出了硬核玻色气体的多体基态波函数，计算了体系的超流因子和关联函数等物理量。研究发现，随着非对角无序强度的增加，系统

基态同样会发生从超流态到玻色玻璃相的量子相变。不过与对角无序相比，非对角无序可以更快的驱动系统发生玻色玻璃相变。

关键词：硬核玻色子；无序；超流因子；玻色玻璃相；单粒子密度矩阵

ABSTRACT

Ultracold atoms are atoms that are at very low temperatures, and this temperature is generally close to absolute zero. Experimentally, ultracold atomic systems are often confined to various external potential fields such as optical lattices to study their physical properties. Due to the development of experimental technologies such as modern quantum optics, these systems have good controllability and diversity and can be used to simulate very idealized models. The ultracold atomic system in the optical lattice has become a very important and effective platform for studying the basic physical phenomena such as quantum phase transitions. For example, it is often used to study superfluid, BCS-to-BEC crossover, and so on. At present, many methods have been found experimentally to introduce disorder into the optical lattice, and the phenomenon of Anderson localization in matter waves has been observed. Therefore, the study of disorder and impurity effects based on the ultracold atomic system on the optical lattice platform has gradually become a hot topic in both theoretical and experimental research.

There are many ways to realize disorder in the optical lattice. For example, disorder can be introduced in by superimposing an incommensurate sub-lattice on a main lattice, or by shining various exotic speckle patterns on an ultracold atomic gas, and it is also possible to load another relatively heavy atoms onto optical lattice to realize disorder and so on. The physical properties of the ultracold atoms in the incommensurate optical lattice can be described by the Aubry-André (AA) model. Based on this model, it was found that with the increase of the disorder strength, the ground state of the system will undergo a quantum phase transition from superfluid to Bose-glass phase. The Aubry-André (AA) model has gradually been studied extensively, and many variants of the model emerged. One of the most interesting is the off-diagonal Aubry-André (AA) model. In this thesis, we

focus on the physical properties of the one-dimensional hard-core Bose gas loaded into the off-diagonal Aubry-André (AA) model.

Ultracold hard-core boson gas is an ultracold Bose atomic gas in which the interaction between bosons tends to be infinite. This is a very ideal extreme situation, usually only theoretically studied. However, the magic is that with Feshbach resonance and other means, this interesting physical system was actually implemented experimentally with the ultracold atomic system. In this thesis, we first introduced the exact numerical method for the treatment of hard-core boson gases in lattices. Then, based on this technique, some of the existing results of the Aubry-André (AA) model are repeated. Next, we focus on the quantum phase transition of ultracold hard-core Bose gas in one-dimensional off-diagonal disordered optical lattices. We mainly analyze the influence of off-diagonal disorder on the ground state properties of hard-core boson gases. Based on the off-diagonal Aubry-André (AA) model, using the rigorous numerical calculation methods introduced in the previous section, we calculate the many-body ground state wave function for the hard-core boson gas, and calculate the physical quantities of the system such as the superfluid factor and the correlation functions. It is found that with the increase of off-diagonal disorder strength, the quantum phase transition from superfluid state to Bose glass phase also occurs in the system ground state. However, in contrast to diagonal disorder, off-diagonal disorder can lead to Bose glass phase transition in a faster way.

Key words: Hard-core boson; Disorder; Superfluid fraction; Bose-glass; One-particle density matrices.

第一章 绪论

量子相变是非常重要而又特别微妙的量子力学现象。它与经典热力学相变相比非常不同，经典热力学相变发生在有限温度下，相变由温度驱动，而量子相变发生在绝对零度下，由温度以外的物理参数驱动，比如磁场强度、压强、无序及杂质等。量子相变描述的是量子涨落导致的多体物理系统基态性质的突变。其内在的物理机制的研究非常复杂而困难但具有重要的基础意义，因而一直是物理学家关注的重点问题。在本文中，我们着重研究了量子系统中无序导致的量子相变现象，并细致分析了量子相变点两边的量子相各自的物理性质。本文的研究工作是基于光晶格中的超冷原子气体系统展开的。超冷原子气体系统具有非常优异的可调控性和灵活性，是进行量子模拟研究量子相变等重要物理现象重要载体和平台。为了便于后面更清晰和方便地介绍我们的研究工作，在本章中我们先来介绍一下相关的背景知识。

1.1 晶格模型

1.1.1 玻色-爱因斯坦凝聚

玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)是指玻色气体被冷却到接近绝对零度时达到的一种物质状态。处于此状态下，几乎所有的玻色子都占据到能量最低的量子态上，此时物质波的干涉现象变得非常明显。BEC 现象在实验上是通过将极低密度的稀薄气体冷却到超低温而形成的，此现象最早是由物理学家玻色和爱因斯坦在 1924 年所预言的。当时，玻色向爱因斯坦发送了一篇关于光量子统计的论文，在文中玻色导出了普朗克的量子辐射定律，而推导过程中却没有涉及经典物理学^[1]。这件事给爱因斯坦留下了非常深刻的印象。在后续的讨论过程中，玻色和爱因斯坦提出了玻色气体的概念，指出此气体遵从玻色-爱因斯坦统计，将自旋为整数的粒子都称为玻色子。爱因斯坦提出，当玻色子之间没有相互作用时，可以将玻色子冷却到非常低的温度使它们凝聚到最低的量子态上，当达到宏观数量的占据时即为玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)现象。此后，玻色-爱因斯坦凝聚态作为一种宏观量子态，被人们广泛研究^[2-4]。

最开始的时候，爱因斯坦本人对于实验上是否真的可以观察到这一奇特现象也半信半疑，也曾想象过将稀薄气体冷却到极低的温度来观察，但受限于当时实验技术的落后，最终不了了之。此后，在众多物理学家的共同努力下，经过了长达 70 年

探索，BEC 现象才最终得以在实验上实实在在地被观察到。1995 年，得益于实验上激光冷却技术、磁光阱技术的迅猛发展，美国科学家康奈尔(Cornell)、维曼(Wieman)和他们小组成功地将 ^{87}Rb 原子使用激光冷却、蒸发冷却等技术冷却到了极低的温度，在实验上首次观察到了玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)现象，这确定性地验证了爱因斯坦的预言。此后不久，麻省理工学院的凯特勒(Ketterle)小组成功地将 ^{23}Na 原子冷却到足够低的温度，也观察到了 BEC 现象。为了表彰他们卓越的成就，康奈尔、维曼和凯特勒被授予了 2001 年诺贝尔物理学奖^[5]。随后，物理学界掀起了一股 BEC 研究的热潮，一直持续到今天。BEC 现象的深入研究不仅具有非常重要的基础意义，而且在原子激光、原子钟、量子计算机等潜在应用领域也都有非常重要的价值^{[6][7]}。

1.1.2 光晶格的形成

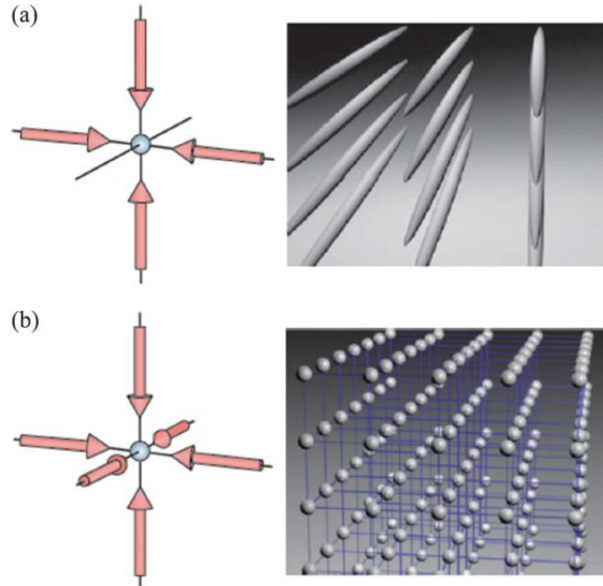
光晶格通常是基于激光原理利用对射激光束实现的一种周期势场，可以在其上载入超冷原子气体来模拟传统固体物理中的晶格系统。在现有的激光技术下，光晶格的几何形状可以通过调整生成光晶格的激光束的构型和布局来灵活设计。因而光晶格中的超冷原子系统具有非常高的可控性。比如，晶格深度的变化可以通过调节激光强度实现；晶格间距可以通过改变激光束之间的干涉角度来控制^{[8][9]}。此外，通过控制对射激光束的强度，囚禁在光晶格中的超冷原子气体的维度在实验过程中可以动态地从三维变化到一维。现如今光晶格已经变成了超冷原子物理研究中的一个主要工具，利用这个优异的平台可以实施各种重要的量子模拟，研究传统凝聚态物理中的科学难题，甚至是完全理想化的物理模型。

关于光晶格的诞生可以追溯到上世纪 80 年代末。在 1987 年，Salomon 等人利用铯原子在实验上首次实现光学晶格^[10]。后来，Dalibard 和 Cohen-Tannoudji 在理论上提出，可以通过两列相向传播的激光对打形成的驻波来囚禁冷原子^[11]，即一维光晶格。二维、三维光晶格则可以通过将不同方向传播的驻波叠加来形成，如图 1.1 所示，原子在三维晶格中所感受的势为：

$$V(x, y, z) = V_x \sin^2(kx) + V_y \sin^2(ky) + V_z \sin^2(kz) \quad (1.1)$$

此处我们已经假定驻波的波矢都相同。当 $V_x = V_y = V_z$ 时，此时的三维晶格是一个各向同性的晶格，可以用来精确形象地模拟玻色-哈伯德模型或者费米-哈伯德模型等理

想模型。当 $V_x = V_y \ll V_z$ ，粒子很难在 z 方向上跃迁，即可实现二维晶格；当 $V_x \ll V_y = V_z$ ，粒子很难在 y 和 z 两个方向上跃迁，因此可以实现一维光晶格。



1.1 二维和三维晶格示意图^[10]

光晶格中的超冷原子系统为物理学家提供了一种可以调控几乎所有物理参数的理想体系，因此可以用来研究在现实晶体中从未观测到的许多崭新的物理现象。许多物理学家认为这一重要物理系统将是实施量子信息处理的最佳“候选”平台之一^[12]。此外，利用囚禁在光晶格中的超冷原子系统可以获得不受多普勒效应和反冲影响的窄谱线，世界上最好的原子钟正基于这一核心技术实现的^[6]。

1.2 硬核玻色气体

硬核玻色气体又叫做 Tonks-Girardeau(TG)气体，由 Girardeau 在 1960 年首次在理论上提出^[13-15]。在这样的硬核玻色气体中，玻色子间的强排斥相互作用起主导作用，决定了系统的物理性质。由于玻色子间排斥相互作用非常大，所以为了降低能量，粒子只好避免占据空间中的同一位置，尽量彼此远离。这一特征类似于费米子系统的泡利不相容原理。因而硬核玻色气体表现出许多费米子系统的性质，比如空间中的粒子分布特征，这种情况通常被称为玻色子的“费米化”现象。但是，硬核玻色子系统与费米子系统还是有许多显著的差别，比如，它们的动量分布就有明显不同的特征。自从硬核玻色气体理论概念提出以后，TG 气体在实验上一直没有得到实

现，而只是停留在理论研究的层面。直到 2004 年，德国实验物理学家 Bloch 及其同事才将这一纯理论模型实现^[16]。实验中，他们利用二维光晶格且在第三个方向上附加一个弱的一维光晶格势将超冷铷原子束缚住，制备了一组一维物理系统的阵列。附加在第三个方向上非常弱的一维光晶格势可以增加超冷铷原子的有效质量，进而增强相互作用的效应，最终使量子气体进入 TG 气体区。

实验实现 TG 气体仅仅是第一步重要工作，要想在这样的系统中观测到一维玻色气体的费米化现象仍然面临着许多巨大的挑战。一维超冷原子体系就是通过限制粒子在其他两个方向上的振动行为使它们处于振动基态来实现的。实验上实现 TG 气体时所加入的额外的一维光晶格势，通过改变粒子之间的相互作用从而可以改变相互作用参数 γ 的大小。 γ 是理论上刻画玻色-爱因斯坦凝聚到 TG 气体之间的缓变的物理量，其定义为在平均场理论下相互作用能 E_{int} 与动能 E_k 的比值，即： $\gamma = E_{\text{int}}/E_k$ 。对于均匀气体， γ 可以写成如下的简洁表达式 $\gamma = mg/\rho\hbar^2$ ，其中 g 是一维相互作用的强度， ρ 为线密度， m 是原子质量， \hbar 表示普朗克常数。

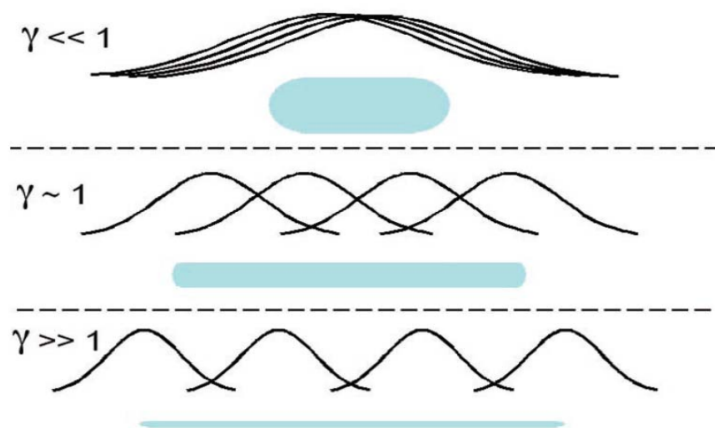


图 1.2 一维原子分布示意图^[16]。阴影部分表示的是在一维管子中的原子密度。

从图 1.2 中可以看出，当 $\gamma \ll 1$ 时，原子的波函数趋于相同，整体上表现为单粒子行为，所有的粒子由同一个宏观物质波描述，展现出许多宏观量子效应。在这个凝聚体中，多个原子可以被放置在一起，原子之间可以发生相互穿透。而当 $\gamma \gg 1$ 时，我们可以看到，玻色子趋向于费米化，表现出许多费米子的特征，粒子波函数的空间分布呈现分离状态。此时的玻色子是硬核玻色子，即多个玻色子不能同时占据同一位置，与费米子相似。当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时， N 个玻色子在极限情况下的多体基态波函数

可以表示成如下形式:

$$\psi_0(x_1, x_2, \dots, x_N) \propto \left| \det \left[\varphi_i(x_j) \right] \right|, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.2)$$

其中 \det 表示的就是著名的施莱特(Slater)行列式, $\varphi_i(x)$ 是单粒子哈密顿量的第 i 个本征态。施莱特行列式的性质保证空间中没有一个粒子占据同一个单粒子态, 同时内含了空间波函数满足的交换反对称性。前一部分性质, 符合硬核玻色子的物理性质, 而后一部分所述的交换反对称性与硬核玻色子的物理特性不符, 所以在(1.2)式中通常取绝对值来消除。波函数(1.2)式反映了一维强相互作用玻色子与无相互作用费米子之间的基本相似性, 即空间密度分布, 这相应的也意味着, 硬核玻色子系统在密度-密度关联函数或气体的熵方面与无相互作用的费米子气体具有相似性。

具体一点来讲, 考虑一维硬核玻色体系, 其哈密顿量可以写为如下形式:

$$H_{HCB} = \sum_{j=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^N V(x_j) \quad (1.3)$$

假如已知满足哈密顿量(1.3)式的费米子体系的多体波函数为 ψ^F 。由于硬核玻色子始终是玻色子, 其多体波函数应当满足粒子交换对称性, 而费米子的多体波函数需满足交换反对称性。所以, 硬核玻色子的波函数与费米子体系的波函数应当满足以下关系。

$$\psi^B = A\psi^F \quad (1.4)$$

上式中的 A 为符号函数, 它也具有交换反对称性, 其具体的表达式为:

$$A(x_1 \cdots x_N) = \prod_{j>l} \text{sgn}(x_j - x_l) \quad (1.5)$$

它正好可以用来抵消费米子多体波函数的交换反对称性。这样, (1.4)式综合了符号函数与费米子多体波函数, 既可以描述硬核玻色子费米化的特征, 又可以保留硬核玻色子原有的玻色子的对称性。(1.4)式中的符号函数与(1.2)式中的取绝对值操作效果相同。

因此, 在研究硬核玻色子气体的基态性质时, 为了计算方便, 我们可以先求解与硬核玻色体系有相同哈密顿量形式的费米子体系的基态波函数, 再通过玻色-费米映射按照(1.2)式或(1.4)式写出硬核玻色体系的多体基态波函数。这样, 有了体系的多体基态波函数就可以接着计算硬核玻色气体的关联函数、自然轨道等一些重要的物

理量。

1.3 无序、相互作用及局域化现象

无序现象及其内在的物理规律是统计物理与凝聚态物理的重要研究课题，这方面的理论及研究成果是与现实应用密切相关的输运理论和传导机制研究的重要基础。无序问题最早是由著名的美国物理学家 Anderson 在 1958 年提出的。当介质中存在随机的杂质（即无序）时，介质中原本作正常扩散运动的物质波会出现局域化。Anderson 最先指出只要随机性（无序）的强度足够强，在固体晶格势中运动的电子是会出现局域化的^[17]。这种无序导致的局域化现象随后以物理学家 Anderson 的名字命名，后人称之为安德森局域化现象。安德森局域化现象，不仅仅局限于电子传导问题，而是一种普遍的波的性质，它同样适用于电磁波、声波、量子力学中的德布罗意物质波等等。此外，众所周知，相互作用也可以导致局域化效应，比如由很强的库伦排斥相互作用导致的 Mott 绝缘体相。这种局域化现象通常被称为弱局域化现象，而安德森局域化则常被称为强局域化。无序与相互作用是导致物质波局域化现象的两种机制。这两者之间有着复杂而微妙的竞争合作关系。渐渐地，有许多研究工作将这两者综合在一起研究局域化现象及其内在物理机制。对于超冷玻色原子气体来说，如果无序足够强，系统会进入一种新的绝缘相玻色玻璃相。

无论是研究单粒子的安德森局域化现象还是研究玻色玻璃相，我们都需要在整个体系中加入无序的外势。无序产生的方式有很多种，首先可以在光晶格中加入激光散斑势，散斑势对于原来的晶格体系来讲就是无序的外势。其次在光晶格中放入两种不同的原子，一种很重，另一种比较轻。如果重的原子的粒子数密度比较低，则可以将重的原子之间的相互作用忽略，从而重的原子可以随机分布在晶格中，且重原子在晶格中不易移动，因此，通过重原子和轻原之间的相互作用，相对于轻原子来说，重原子提供的是随机分布且大小一定的随机势。上面提到的两种方法在任意维度的光晶格中都可以产生随机势。下面介绍的方法只对一维的光晶格有效。叠加两个一维的光晶格，并且两个光晶格的波矢比值是一个无理数，因而形成一个准周期的势，这样的一个势称为非公度晶格。相对于一个光晶格，由于两个光晶没有公共的周期，另一个光晶格的作用就相当于一个伪随机的外势。通过这种方法可以产生既确定，又是伪随机的外势。本文我们研究的系统就是这样的非公度光晶格。下

面我们来介绍安德森局域化现象及其实验实现，并介绍一下玻色玻璃相的有关内容。

1.3.1 安德森局域化

一维安德森无序系统，在紧束缚近似下，其哈密顿量通常写成如下形式：

$$H = \sum_{i \neq j} t_{ij} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \sum_i \varepsilon_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i \quad (1.6)$$

在上式中 \hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_j) 表示 i (j) 格点的产生湮灭算符； ε_i 表示 i 格点上独立且随机分布的能量，且 $\varepsilon_i \in [-W/2, W/2]$ ； t_{ij} 表示 i 和 j 格点的交叠积分，考虑在一般固体中，近邻格点之间的距离大致相等，因此 $t_{ij} = t_0$ 。

若考虑不含时问题，此模型下的波函数 ψ 可以做如下紧束缚展开：

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle \quad (1.7)$$

其中 $|i\rangle$ 为 i 格点的原子轨道波函数， a_i 为组合系数。若 ψ 是 (1.6) 式的本征态，则满足本征方程即：

$$H\psi = E\psi \quad (1.8)$$

根据上式的本征方程可以得到如下的表达式：

$$Ea_i = \varepsilon_i a_i + \sum_j t_{ij} a_j \quad (1.9)$$

上式即波函数展开系统满足的矩阵方程。

若是含时问题，则应考虑含时薛定谔方程： $-i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$ ，此时模型的波函数应表示为含时形式，

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i(t) |i\rangle \quad (1.10)$$

与上面不含时问题推导类似，可以得到如下表达式：

$$-i\hbar \frac{da_i(t)}{dt} = \varepsilon_i a_i(t) + \sum_j t_{ij} a_j(t) \quad (1.11)$$

这样，根据(1.11)式中的含时薛定谔方程就可以给出局域态与扩展态的定义。在热力学极限下，如果 $t=0$ 时，在格点 i 处有一个电子存在，即 $a_i(t=0)=1$ ，而对于其他格点则有 $a_j(t=0)=0$ 。经过长时间的演化后，我们观测 $a_i(t)$ 的值，若 $a_i(t \rightarrow \infty) = 0$ ，

则电子处于扩展态；若 $a_i(t \rightarrow \infty) = 1$ ，则电子处于局域态。安德森指出，当无序的强度 W 足够大时，此系统的波函数 ψ 就会出现局域化。

随后人们逐渐认识到，安德森局域化很大程度上源于多个散射路间的干涉效应，在强散射极限下，干涉效应能将波禁闭在介质中的有限区域内，从而出现局域化现象。干涉是所有波的重要属性，所以安德森局域化在波动现象中普遍存在^[18-21]。

1.3.2 安德森局域化在超冷原子系统中的实验实现

自从 Anderson 预言了电子波函数在无序晶格中的局域化现象以来，物理学家们就一直保持着对无序问题的研究热情。安德森局域化现象已经在诸多体系中被观测到，比如光波、微波、声波以及电子气等系统，但是此现象还从来没有在量子力学的物质波（不论是电子或是其它粒子的抑制）中观察到。由于超冷原子体系具有很好的调节性与可控性，因而为我们研究无序诱导局域化的内在物理机制打开了新的途径，提供了新的视野。于是，2008 年 Billy 和 Roati 两人各自所在的实验小组分别利用激光散斑势和准周期双色光晶格在无相互作用 BEC 中实现了强度可控的无序，从而在超冷原子系统中直接观测到了物质波的安德森局域化现象^{[22][23][24]}。

超冷原子构成的简并量子气体可以对凝聚态理论中的一些非常基本的模型进行实验研究，并且具有前所未有的可控性以及测量可能和精度。Billy 所在的实验小组正是基于对这种优势的充分认识，研究了超冷 ^{87}Rb 原子的物质波在人工生成的无序势中的局域化过程和行为。对于 Billy 小组的实验来说，超冷原子气体的如下优点特别关键：(1)不同维度的系统都可以在实验上制备；(2)量子气体内原子间的相互作用可以调控，实现途径是调控量子气体内粒子密度或者借助于 Feshbach 共振机制；(3)可以完美地在其中实现可控的且无声子的无序势；(4)可以通过直接成像手段来观测量子气体的粒子密度。虽然在实验上一维 BEC 扩散的抑制此前已经被观察到^[25]，但是那里讨论的是强无序和强相互作用体系。Billy 小组则在弱无序情形下实现了安德森局域化，且原子间的相互作用可以忽略。他们在实验上实现无序势的手段是利用激光散斑势照射 BEC。激光散斑是通过让激光照射到一个漫反射板后得到的。实验中他们首先在一个各向异性的磁光复合势阱中制备出一个原子数约为 1.7×10^4 个的 ^{87}Rb 原子 BEC，然后在 $t = 0$ 时刻突然撤掉磁阱，观察 BEC 在光阱中的扩散。实验

中可以很明显的观察到安德森局域化，局域密度随时间的变化图像也说明粒子处于安德森局域态。如图 1.3 所示，(a)为复合磁光势阱中的 BEC，复合磁光势阱由水平方向上的光学波导和纵向的磁阱势构成，水平方向的光学波导用于实现横向的紧束缚，形成一维雪茄状系统。图中紫色部分激光散斑势，用以给系统加上弱的无序；(b)为撤掉纵向的弱磁阱势之后 BEC 的扩散过程，可以看到激光散斑产生的弱无序使得由势阱中释放出来的 BEC 不再扩散，而是出现了具有指数行为的局域；(c)给出了由纵向弱束缚势中释放出来的 BEC 在三个不同时刻的粒子数密度分布。将这个图形用指数函数拟合就可以得到局域化长度的值。

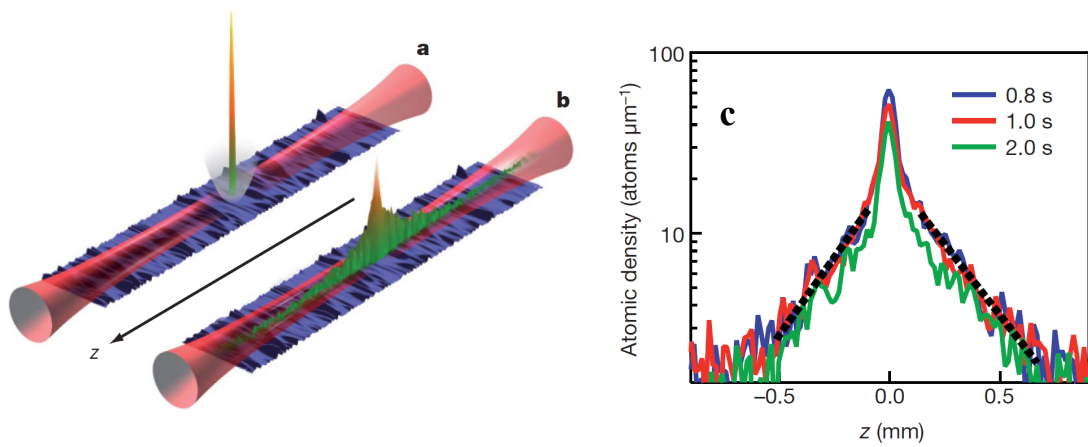


图 1.3 一维无序光阱中的安德森局域化^[22]

(a)磁光混合势阱中的 BEC；(b)BEC 的扩散和局域；(c) 不同时刻的 BEC 局域密度分布图。

而 Roati 小组则采用了一种不同的无序实现手段在实验中观测到了安德森局域化现象。而且与 Billy 小组不同，他们研究的是处于晶格中的系统。在实验中，他们先制备出一个一维晶格系统，然后在主晶格上再加一个弱一点的非公度的晶格。这样的一个晶格系统实际上是无相互作用的 Harper 模型或者说是 Aubry-André 模型在实验上的首次实现。两套晶格叠加在一起构成了一个准周期的新晶格，如图 1.4(a)所示，其中 J 表示主晶格中不同格点间的隧穿能量， 2Δ 表示由次晶格引起的格点能量的最大偏移，这种准周期性意味着晶格格点势是一种准无序的分布。他们将超冷 ^{39}K 原子 BEC 载入到这样的准周期光晶格中。初始时刻，BEC 被束缚在一个简谐势阱中，BEC 的大小可以通过简谐势阱来调节。然后将简谐势突然撤掉，在不同的无序强度下观测 BEC 随时间的扩散过程，如图 1.4(b)所示。可以发现，当 $\Delta/J=0$ ，即不存在无序时的正常晶格中，BEC 可以扩展到整个晶格，随着无序强度的逐渐增大，则可以

发现粒子慢慢趋向于局域化。在无序强度很大， $\Delta/J \geq 7$ 时，则观察不到任何扩散，凝聚态可以被描述为局域本征态的叠加，即发生了安德森局域化。

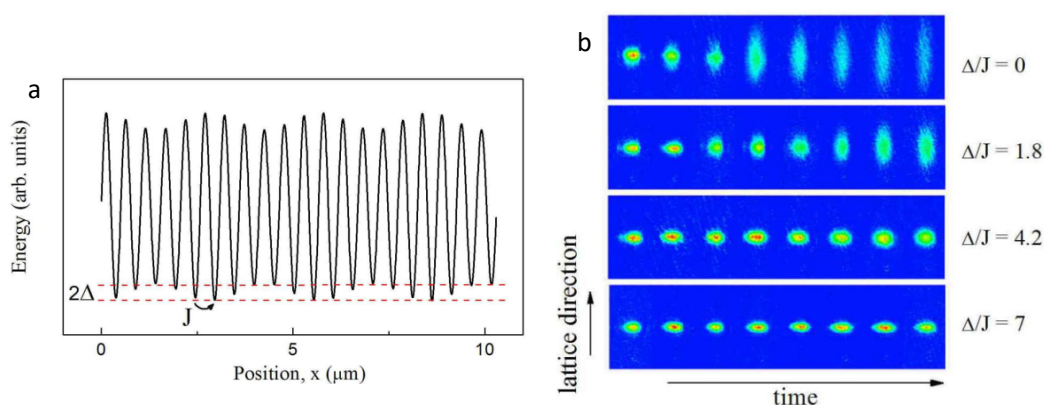


图 1.4 一维双色光晶格中的安德森局域化^[23]

(a)实验上实现双色光晶格的示意图 (b)不同时刻 BEC 在光晶格中的扩散。

1.3.3 超流-玻色玻璃相变

众所周知，在自然界中所有物质，随着其温度的不断低时，最终几乎都会变成固态。但对于氦的两种同位素(氦-3 和氦-4)，当将它们冷却到极低温时却依然处于液态。其原因是氦原子之间的相互作用很弱，属于惰性气体，且在惰性气体中质量最小。这些就导致氦原子有很大的零点能，以至它不可能固定在一个地方，因此不能形成固态。

超流体不具有粘滞性，因此在介质中流动时而不损失动能。超流现象最初是由 Kapitsa 和 Allen 在液氦中发现的。随后，物理学家们逐步从唯象理论和微观理论两方面对它进行了解释。在液氦-4 中，超流会在比氦-3 高得多的温度下发生；氦-4 原子为玻色子，其自旋数为整数；而氦-3 原子是费米子，其自旋为半整数，它只能通过更低的温度下与自身配对来形成玻色子^[26]。氦-3 超流体的发现是 1996 年诺贝尔物理学奖的基础，这个过程类似于超导电子的配对机制。超冷费米原子气体中的超流性由 Ketterle 和他的团队在麻省理工学院于 2005 年 4 月在温度为 50 nK 的 ^6Li 中观测到的量子涡旋实验来证明^[27]。文献^[28]之前在 2000 年使用 ^{87}Rb 的超低温玻色子气体以及最近在二维气体中观察到这种旋涡^[29]。

已有的研究表明，粒子之间的相互作用也可以产生局域效应。比如，零温下，在晶格玻色子系统中出现的 Mott 绝缘相，就是由强相互作用导致的粒子的局域化。随着相互作用的增强，Mott 绝缘相替代了超流相(SF)，晶格上形成了具有整数填充

的绝缘“固体”。后来人们对存在相互作用的无序系统进行了大量研究，分析了无序与相互作用这两种导致局域化的因素间的相互关系与共同作用。存在相互作用时，如果无序足够大，这些系统将进入一种新的绝缘状态，即文献^[28]中所预言的玻色玻璃相(BG)，其显著特征为无能隙激发谱和有限的压缩率^[30-34]。

光晶格中具有相互作用的超冷玻色子系统的多体物理性质可以通过玻色-哈伯德模型描述，其哈密顿量可写为：

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,j' \rangle} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) + \sum_j \varepsilon_j \hat{n}_j \quad (1.12)$$

上式中 \hat{b}_j (\hat{b}_j^\dagger) 表示在格点 j 位置处的湮灭(产生)算符； $\hat{n}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$ 表示在 j 格点上的粒子数算符； $\langle j,j' \rangle$ 表示对最近邻格点的求和。系统总的能量由三部分组成， J 是跃迁能，与相邻格点之间的隧穿概率成比例； U 是相互作用能，是指同一格点上的粒子间的相互作用(对于 ^{87}Rb 是排斥相互作用， $U > 0$)； ε_j 是依赖于位置的格点势，可以用以描述不均匀的外势。

当 $\varepsilon_j = 0$ 时，(1.12)式为普通的玻色-哈伯德模型，系统基态仅由 J 和 U 两个参数决定。当 $U \ll J$ 时，系统处于超流态，玻色子的波函数是扩展的，而且格点间的隧穿保证了系统的长程相干性。相反，当 $U \gg J$ 时，系统是局域的 Mott 绝缘态，粒子之间的相干性消失。这种从超流到 Mott 绝缘相的量子相变已经在超冷原子实验中观测到^[34,35]。

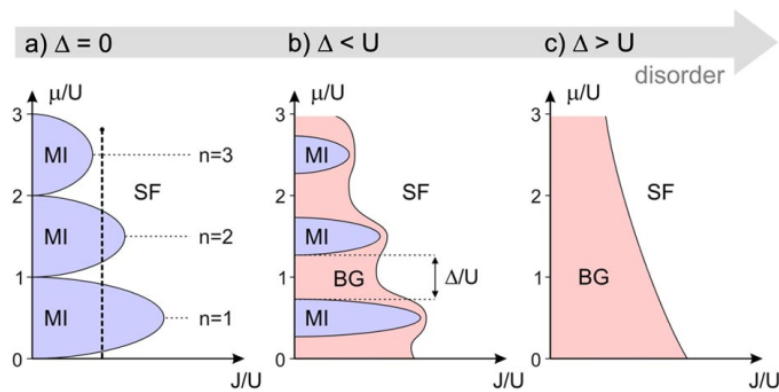


图 1.5 无序相互作用下玻色子的相图^[36]。

其中 J 表示跃迁能， U 表示相互作用能， Δ 表示无序强度

在存在相互作用的基础上，如果继续引入无序的因素。即(1.4)式中的格点势不

再为零，而是一个局限于一定取值范围内的随机数，即 $\varepsilon_j \in [-\Delta/2, \Delta/2]$ 。 Δ 实际表征了无序的强度。对于弱无序，即 $\Delta < U$ ，Mott 绝缘区域会逐渐收缩，并且会出现一个新的相玻色玻璃相(BG)，如图 1.5(b)所示。当 $\Delta > U$ 时，Mott 绝缘相最终消失，完全变成了 BG 相。

1.4 论文结构安排

基于以上介绍的背景和理论基础，我们将本文的组织结构安排如下：第二章主要介绍一维硬核玻色气体的一种严格数值求解方法，通过以具有对角无序的 Aubry-André(AA)模型为例，详细介绍硬核玻色系统到无自旋费米系统特殊的 Bose-Fermi 映射的过程，以及相应的重要物理量的具体计算方法；然后我们具体计算了单粒子关联函数和超流因子等物理量，严格重复出了文献中既有结果。在第三章中，我们则尝试拓展了第二章中介绍的方法来试探研究具有非对角无序的 Aubry-André(AA)模型的基态物理性质。首先详细介绍了非对角 Aubry-André(AA)模型，然后通过计算发现此系统中具有超流到玻色玻璃相的量子相变，并确定出了相变点，具体分析了超流相和玻色玻璃相的不同性质。最后，在第四章我们对本文的所有工作做了一个总结，并对下一步要做的工作进行了初步的展望。

第二章 一维硬核玻色气体的严格求解方法

强关联量子体系具有非常丰富和有趣的物理现象和性质，因而一直是人们在理论和实验上研究的重点。然而，具有强关联的多体量子系统求解起来十分困难，仅有少量物理体系可以找到严格的解析方法，比如一维量子可积系统的 Bethe-Ansatz 方法等，除此之外，大部分是通过近似方法或数值手段进行处理。如果在这样的量子多体物理系统中引入无序、杂质等因素，则会变得更加难以严格求解。但这里面有一个特例就是一维硬核玻色气体系统。这个物理系统描述的是具有强相互作用的玻色子系统，而且在这样的系统中可以引入无序。因而可以研究相互作用与无序两个因素共存时的竞争合作关系。更为重要的是，这样一个物理系统不仅是当前超冷原子物理实验技术能够具体实验的，而且它是可以通过一种基于 Jordan-Wigner 变换的严格的方法进行求解的。基于此种方法给出的严格的基态波函数，可以对一些重要的物理量进行严格的计算。此外，在这样的系统中可以具有任意的束缚势，从而可以分析各种束缚势的物理效应，从中发现新奇和有价值的物理现象。对于强相互作用的超冷原子系统，无序和相互作用的研究也受到了非常高的关注。本章内容将以处于一种无序势的硬核玻色气体，即对角无序 Aubry-André(AA)模型中的硬核玻色气体为例，详细介绍这种硬核玻色气体的严格求解方法。本章是下一章具体研究工作的方法基础。

2.1 理论模型

在开始具体介绍硬核玻色气体的这种严格求解方法的一整套流程之前，我们首先介绍一下用以介绍此方法的具体模型，即具有对角无序的 Aubry-André(AA)模型。在单带紧束缚近似下，处于一维非公度光晶格 L 中 N 个硬核玻色子构成的体系的哈密顿量可以写为：

$$H = -t \sum_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + H.c.) + V \sum_i \cos(2\pi a i + \delta) \hat{n}_i^b \quad (2.1)$$

在上式中 t 表示跃迁强度，将其设置为能量单元， $\hat{b}_i^\dagger (\hat{b}_{i+1})$ 表示在 $i(i+1)$ 格点上硬核玻色子的产生（湮灭）算符，它们在同一格点满足反对易关系即： $\{\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i\} = 1$ ， $\{\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i^\dagger\} = 0$ ， $\{\hat{b}_i, \hat{b}_i\} = 0$ ，这实际上是硬核条件；而在不同格点它们则满足通常的玻

色子之间的对易关系： $[\hat{b}_j, \hat{b}_i^\dagger] = 0$ ， $[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0$ ， $[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = 0 (i \neq j)$ ； $H.c$ 表示厄米共轭项； V 表示非公度势的强度； α 为无理数，它是此模型中无序的来源； \hat{n}_i^b 表示硬核玻色子的粒子数算符。下面，我们则基于此具体的物理模型来详细介绍一维光晶格中硬核玻色气体物理性质的具体研究方法。此方法的核心是 Jordan-Wigner (JW) 变换和 Holstein-Primakoff (HP) 变换的结合。根据之前的背景介绍可知求解这样的硬核玻色系统，需要借助 Jordan-Wigner 变换将其映射到无自旋的费米子系统才能严格求解。接下来我们详细介绍这一方法的思路与过程。

2.2 Holstein-Primakoff 变换及 Jordan-Wigner 变换

Holstein-Primakoff 变换^[37]是玻色算符与自旋算符之间的对应关系，即：

$$\hat{b}_i^\dagger \sqrt{1 - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i} = \hat{\sigma}_i^+ , \sqrt{1 - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i} \hat{b}_i = \hat{\sigma}_i^- \quad (2.2)$$

当玻色子为硬核玻色子时，则会存在：

$$\hat{b}_i^\dagger = \hat{\sigma}_i^+ , \hat{b}_i = \hat{\sigma}_i^- \quad (2.3)$$

为了建立硬核玻色子算符与费米子算符之间的映射关系，我们还需要借助另一个变换-Jordan-Wigner(JW)变换^[38]。Jordan-Wigner(JW)变换是一种将自旋算符映射到费米子的产生、湮灭算符的一种操作，此变换最早是由 Jordan 和 Wigner 针对一维自旋链模型提出的，后来逐步推广到了二维模型。JW 变换经常用来严格求解一维自旋链系统，例如 Ising 模型、XY 模型等，此方法先将自旋算符转化为费米子算符，然后利用费米子体系的方法和已知结果来研究自旋系统的性质。此变换实际指明了自旋为1/2的粒子与费米子间的内在联系，此关系甚至可推广至任意维度的系统。

下面，我们来回顾一下 Jordan-Wigner 变换提出的历史及具体过程。最初，人们注意到，一维自旋1/2链的算符 $\hat{\sigma}_j^+$ ， $\hat{\sigma}_j^-$ 恰好满足反对易关系 $\{\hat{\sigma}_j^-, \hat{\sigma}_j^+\} = 1$ ，于是尝试提出了一种自旋与费米子间的变换：

$$\hat{\sigma}_j^+ = (\hat{\sigma}_j^x + i\hat{\sigma}_j^y) / 2 = \hat{f}_j^\dagger \quad (2.4)$$

$$\hat{\sigma}_j^- = (\hat{\sigma}_j^x - i\hat{\sigma}_j^y) / 2 = \hat{f}_j \quad (2.5)$$

$$\hat{\sigma}_j^z = 2\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_j - 1 \quad (2.6)$$

但是人们很快发现，这一变换存在严重的问题。虽然以上变换中，用自旋算符表示的费米子算符在同格点上能满足反对易关系，但对于不同格点来说，反对易关系并不存在。即，按照以上变换， $j \neq k$ 时， $\{\hat{f}_j, \hat{f}_k^\dagger\} = \{\hat{\sigma}_j^-, \hat{\sigma}_k^+\} = 2\hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_k^+ \neq 0$ ，这样给出的费米算符实际满足的是对易关系， $[\hat{f}_j, \hat{f}_k^\dagger] = [\hat{\sigma}_j^-, \hat{\sigma}_k^+] = 0$ 。因而以上变换(2.4-2.6)是不成功的。最终 Jordan 和 Wigner 在 1928 年找到完美的补救办法，这就是我们今天看到的 Jordan-Wigner 变换。此变换给出了自旋算符与费米子算符之间具体的映射关系，为：

$$\hat{\sigma}_j^+ = e^{-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k} \hat{f}_j^\dagger \quad (2.7)$$

$$\hat{\sigma}_j^- = e^{+i\pi \sum_{k=1}^{j-1} \hat{f}_k^\dagger \hat{f}_k} \hat{f}_j \quad (2.8)$$

这样的变换既能保证用自旋算符表示出来的费米子算符满足费米子所有的反对易关系，又能保证用费米子算符表示出来的自旋算符满足自旋算符应有的对易关系。从而，Jordan-Wigner 变换给出了自旋算符与费米子算符间的明确的自洽的对应关系。

结合(2.3)、(2.7)和(2.8)式，最终我们可以得到硬核玻色子与费米子算符之间的映射关系，即：

$$\hat{b}_j^\dagger = \hat{f}_j^\dagger \prod_{\beta=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta}, \quad \hat{b}_j = \prod_{\beta=1}^{j-1} e^{+i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_j \quad (2.9)$$

根据此映射，(2.1)式经变换可变为以下无自旋的费米子系统的哈密顿量：

$$\begin{aligned} \hat{H}_{HCB} &= -t \sum_i \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + H.c \right) + V \sum_i \cos(2\pi\alpha i + \delta) \hat{n}_i^b \\ &= -t \sum_i \left(\hat{f}_i^\dagger \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \prod_{\gamma=1}^i e^{+i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \hat{f}_{i+1} + H.c \right) \\ &\quad + V \sum_i \cos(2\pi\alpha i + \delta) \hat{f}_i^\dagger \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{+i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_i \\ &= -t \sum_i \left(\hat{f}_i^\dagger (1 - 2\hat{f}_i^\dagger \hat{f}_i) \hat{f}_{i+1} + H.c \right) + V \sum_i \cos(2\pi\alpha i + \delta) \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_i \\ &= -t \sum_i \left(\hat{f}_i^\dagger \hat{f}_{i+1} + H.c \right) + V \sum_i \cos(2\pi\alpha i + \delta) \hat{n}_i^f \\ &= \hat{H}_F \end{aligned} \quad (2.10)$$

在(2.10)式中 \hat{f}_i^\dagger (\hat{f}_{i+1}) 表示 i 和 $i+1$ 格点上费米子的产生湮灭算符； \hat{n}_i^f 为费米子的粒子数算符。比较(2.1)和(2.10)式我们可以看出，硬核玻色子的哈密顿量与费米子的哈密

顿量具有完全相同的形式，这就意味着硬核玻色子和费米子有着精确相同的能谱，其非平庸的性质表现在非对角项上^[39]。要具体理解和刻画硬核玻色体系的物理性质，我们将会用到一个非常重要的物理量即单粒子关联函数。此后，通过单粒子关联函数我们还可以得到体系的密度分布、动量分布等。因此下面我们来具体介绍单粒子关联函数的求解方法。

2.3 单粒子关联函数

单粒子关联函数也叫作单粒子密度矩阵，根据其随距离的衰减行为可以判断系统处于超流或者是绝缘相。首先我们求解硬核玻色子的单粒子格林函数，其形式可写作^[39]：

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \langle \psi_{HCB}^G | \hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger | \psi_{HCB}^G \rangle \\ &= \langle \psi_F^G | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_i \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} | \psi_F^G \rangle \\ &= \langle \psi_F^A | \psi_F^B \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $|\psi_{HCB}^G\rangle$ 表示硬核玻色子的基态波函数， $|\psi_F^G\rangle$ 表示等价的费米子的基态波函数。

除此之外，(2.11)中的 $\langle \psi_F^A |$ 和 $|\psi_F^B\rangle$ 分别表示为：

$$\begin{aligned} \langle \psi_F^A | &= \langle \psi_F^G | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} \hat{f}_i \\ |\psi_F^B\rangle &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} | \psi_F^G \rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

等价的费米子的哈密顿量的基态波函数可以通过将(2.10)式对角化得到，可写作如下形式：

$$|\psi_F^G\rangle = \prod_{n=1}^N \sum_{i=1}^L P_{in} \hat{f}_i^\dagger |0\rangle \quad (2.13)$$

其中 N 表示费米子的数目，与玻色子的数目相等； L 表示晶格总的格点数。 P_{in} 表示第 n 个粒子在 i 位置的几率幅； P 是由哈密顿量(2.10)对应的 N 个单粒子态组成的矩阵，写作如下形式：

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{L1} & P_{L2} & \cdots & P_{LN} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

为了计算 $|\psi_F^A\rangle$ 和 $|\psi_F^B\rangle$ ，需要用到如下公式：

$$\prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} = \prod_{\gamma=1}^{j-1} [1 - 2\hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma] \quad (2.15)$$

$\prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma}$ 作用在费米子基态上使得 P 矩阵的第 $j-1$ 行之前的符号发生变化；且产生

算符作用在位置 j 上使得 P 矩阵增加一列元素， $P_{j,N+1}=1$ 其余的值为 0，具体计算为：

$$\begin{aligned} |\psi_F^B\rangle &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} |\psi_F^G\rangle \\ &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \prod_{n=1}^N \sum_{l=1}^L P_{nl} f_l^\dagger |0\rangle \\ &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \prod_{n=1}^N (P_{Ln} f_L^\dagger + \cdots + P_{2n} f_2^\dagger + P_{1n} f_1^\dagger) |0\rangle \\ &= \hat{f}_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} (P_{L1} f_L^\dagger + \cdots + P_{21} f_2^\dagger + P_{11} f_1^\dagger) \cdots (P_{LN} f_L^\dagger + \cdots + P_{2N} f_2^\dagger + P_{1N} f_1^\dagger) |0\rangle \\ &= \left[\hat{f}_j^\dagger \left(P_{L1} f_L^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \cdots P_{j1} f_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - \cdots - P_{21} f_2^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - P_{11} f_1^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \right) \cdots \right. \\ &\quad \left. (P_{LN} f_L^\dagger + \cdots + P_{2N} f_2^\dagger + P_{1N} f_1^\dagger) |0\rangle \right] \\ &= \left[\hat{f}_j^\dagger (P_{L1} f_L^\dagger \cdots P_{j1} f_j^\dagger - \cdots - P_{21} f_2^\dagger - P_{11} f_1^\dagger) \cdots \right. \\ &\quad \left. (P_{LN} f_L^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} \cdots + P_{jN} f_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - \cdots - P_{2N} f_2^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} - P_{1N} f_1^\dagger) |0\rangle \right] \\ &= \left[(P_{L,N+1} f_L^\dagger + \cdots + P_{j+1,N+1} f_{j+1}^\dagger + P_{j,N+1} f_j^\dagger - P_{j-1,N+1} f_{j-1}^\dagger - \cdots - P_{1,N+1} f_1^\dagger) \right. \\ &\quad \left. (P_{L1} f_L^\dagger \cdots P_{j1} f_j^\dagger - \cdots - P_{21} f_2^\dagger - P_{11} f_1^\dagger) \cdots (P_{LN} f_L^\dagger \cdots P_{jN} f_j^\dagger - \cdots - P_{2N} f_2^\dagger - P_{1N} f_1^\dagger) |0\rangle \right] \\ &= \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{l=1}^L P_{nl}^B f_l^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

同理可求得 $|\psi_F^A\rangle$ ，即：

$$|\psi_F^A\rangle = \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{l'=1}^L P_{l'n}^A \hat{f}_{l'}^\dagger |0\rangle \quad (2.17)$$

在(2.16)和(2.17)式中 P^A 和 P^B 与 P 矩阵形式相似, 当 $l \leq j-1$, $P_{ln}^B = -P_{ln}$; 当 $l \geq j$ 时, $P_{ln}^B = P_{ln}$ 且 $n \leq N$ 。最后一列为, $P_{j,N+1}^B = 1$ 和 $P_{l,N+1}^B = 0 (l \neq j)$ 。同理我们也可以求得 P^A 。则(2.11)式的格林函数可以化简为:

$$\begin{aligned}
 G_{ij} &= \langle \psi_F^A | \psi_F^B \rangle \\
 &= \langle 0 | \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{l=1}^L P_{ln}^A \hat{f}_l \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{l=1}^L P_{ln}^B \hat{f}_l^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \sum_{\substack{l_1 \dots l_{N+1} \\ l_1 \dots l_{N+1}}} P_{l_1 1}^A \dots P_{l_{N+1} N+1}^A P_{l_1 1}^B \dots P_{l_{N+1} N+1}^B \times \langle 0 | \hat{f}_{l_1} \dots \hat{f}_{l_{N+1}} \hat{f}_{l_{N+1}}^\dagger \dots \hat{f}_{l_1}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \det \left[\left(P^A \right)^\dagger P^B \right]
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

在上式中用到了公式:

$$\langle 0 | \hat{f}_{l_1} \dots \hat{f}_{l_{N+1}} \hat{f}_{l_{N+1}}^\dagger \dots \hat{f}_{l_1}^\dagger | 0 \rangle = \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}} \delta_{l_1 \lambda_1} \dots \delta_{l_{N+1} \lambda_{N+1}} \tag{2.19}$$

其中 $\varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}}$ 是 $N+1$ 维度下 Levi-Civita 符号^[40], λ 的值是 1 到 $N+1$ 中的任意值。

单粒子密度矩阵为:

$$\begin{aligned}
 \rho_{ij} &= \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle = \langle \psi_{HCB}^G | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j | \psi_{HCB}^G \rangle \\
 &= G_{ij}^* + \delta_{ij} (1 - 2G_{ii})
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

通过密度矩阵我们可以计算自然轨道数和占据数, 占据数为单粒子密度矩阵的本征值, 自然轨道数为单粒子密度矩阵的本征函数^[39], 即:

$$\sum_j \rho_{ij} \phi_j^\eta = \lambda_\eta \phi_i^\eta \tag{2.21}$$

通过以上介绍的这些物理量, 在下面 2.5 小结的计算结果中可以通过数值模拟的图像来表征硬核玻色系统的物理性质。在第一章的背景介绍中我们知道无序能够引起波函数的局域化, 系统会发生由无序相互作用引起的超流到玻色玻璃相的量子相变。在研究其相变的过程中, 超流因子可以直观描述体系处于超流态或者是非超流态, 因而是一个非常重要的物理量。则接下来我们对超流因子的背景和计算方法进行详细介绍。

2.4 超流因子

超流性的宏观和微观定义都与系统流动性质有关。在宏观上，系统所表现的超流性通常采用双流体模型来描述。超流体和正常流体的区别通常通过存在移动的边界的不同性质来体现。例如，在一个边界可以移动的狭窄通道中，当边界移动时，只有正常流体与边界一起被拖动，而超流体保持静止，不随着边界一起运动。

类似于简单的超流性的宏观概念，我们可以构建超流性的微观定义。首先考虑广义的凝聚波函数 $\chi(\bar{x}) = e^{i\theta(\bar{x})} |\chi(\bar{x})\rangle$ ， $|\chi(\bar{x})\rangle$ 为单粒子密度矩阵的本征态^[41]。凝聚波函数空间变化的相位 $\theta(\bar{x})$ 与一个速度场有关，即： $\vec{v}_s(\bar{x}) = (\hbar/m)\vec{\nabla}\theta(\bar{x})$ ^[42]。这个速度场所描述的流是无损耗且无旋的，符合超流性的宏观性质。这个速度因此被定义为超流的速度^[42]。正如在宏观情况下，我们通过考虑系统的总能量总可以找到一个明确的超流因子的表示。为了简单起见，考虑在一维情况下，假定在长度为 L 的系统上强加一个总相位大小为 Θ 的线性扭转角。则存在关系： $\theta(\bar{x}) = \Theta x / L$ 。为了实现这样的系统，可在多体波函数上强加一个扭曲边界条件，即如下形式：

$$\psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + L\vec{e}_1, \dots) = e^{i\Theta} \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots) \quad (2.22)$$

强加的相梯度产生速度为： $\vec{v}_s(\bar{x}) = \Theta\hbar/mL$ 的流。这部分流，被称为超流。流的存在将会增加系统的总能量。只要其他的激发态不存在，也就是说，只要施加的相位梯度很小，总能量的增加完全可以归因于超流的动能：

$$E_\Theta - E_0 = T_s = \frac{1}{2} M_s \vec{v}_s^2 \quad (2.23)$$

其中 $M_s = mNf_s$ (f_s 表示超流因子) 是超流部分的总质量； E_0 表示不加相扭转角时的系统的基态能量； E_Θ 为强加了扭转角之后的系统的基态能量。将 $\vec{v}_s(\bar{x}) = \Theta\hbar/mL$ 代入 (2.23) 式即可以得到超流因子的基本关系^{[43][44]}，即：

$$f_s = \frac{2mL^2}{\hbar^2 N} \frac{E_\Theta - E_0}{\Theta^2} \quad (2.24)$$

因此，超流因子可以理解为物理系统在相位扰动下的刚性(stiffness)。这表明超流体不是静态的基态性质，而是系统对外部扰动的响应^[45]。在玻色-哈伯德模型中，超流因子可以得到很好的求解，玻色-哈伯德模型的哈密顿量为：

$$\hat{H}_0 = -J \sum_{i=1}^L (\hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i + H.c.) + \sum_{i=1}^L \varepsilon_i \hat{n}_i + \frac{V}{2} \sum_{i=1}^L \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \quad (2.25)$$

为了计算强加了扭曲边界条件后的系统基态能量，对(2.25)式的哈密顿量做局部分么正变换，其中么正算符为： $\hat{U}_\Theta = \prod_{k=1}^N \exp(i\Theta \hat{x}_k / L)$ [46][47]，则变换后的哈密顿量为：

$$\hat{H}_\Theta = -J \sum_{i=1}^L (e^{-i\Theta/L} \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i + H.c.) + \sum_{i=1}^L \varepsilon_i \hat{n}_i + \frac{V}{2} \sum_{i=1}^L \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \quad (2.26)$$

比较(2.25)和(2.26)式可以看出，哈密顿量的形式基本一致，只是(2.25)式的哈密顿量在跃迁项处产生一个相因子，叫做 Peierls 相因子[46]。在周期性边界条件下，通过扭转哈密顿量可以求出系统的基态能量 E_Θ 。依据 (2.24)式，可知通过求解基态能量差，来求解出超流因子。

对于求解本征值问题，除了直接求解的方法，我们还可以通过微扰法来求解能量差 $E_\Theta - E_0$ 。因为(2.24)式中的超流因子是在 Θ 角非常小的情况下得出的，因此使用微扰法来求解不会引入额外的近似[48][49]。(2.26)式的哈密顿量可以化简为：

$$\hat{H}_\Theta \approx \hat{H}_0 + \frac{\Theta}{J} \hat{J} - \frac{\Theta^2}{2I^2} \hat{T} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{pert} \quad (2.27)$$

在(2.27)式中， \hat{J} 叫做流算符， \hat{T} 叫做跃迁算符，其形式如下：

$$\begin{aligned} \hat{J} &= iJ \sum_{i=1}^L (\hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i - H.c.) \\ \hat{T} &= -J \sum_{i=1}^L (\hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i + H.c.) \end{aligned} \quad (2.28)$$

在化简的过程中用到如下公式：

$$\begin{aligned} e^{-i\Theta/L} &= 1 - i \frac{\Theta}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Theta^2}{L^2} + i \frac{1}{6} \frac{\Theta^3}{L^3} + \dots \\ e^{i\Theta/L} &= 1 + i \frac{\Theta}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Theta^2}{L^2} - i \frac{1}{6} \frac{\Theta^3}{L^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

我们可以通过二阶微扰理论求解出能量差，得到超流因子的表达式如下[49]：

$$\begin{aligned}
f_s &= f_s^{(1)} - f_s^2 \\
&= \frac{1}{NJ} \left(-\frac{1}{2} \langle \psi_0 | T | \psi_0 \rangle - \sum_{\nu \neq 0} \frac{|\langle \psi_\nu | J | \psi_0 \rangle|^2}{E_\nu - E_0} \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

其中 $|\psi_\nu\rangle (\nu=0,1,\dots)$ 是 \hat{H}_0 的本征态。跃迁算符的基态的期望值描述了超流因子的一阶项 $f_s^{(1)}$ 。超流因子的二阶项 $f_s^{(2)}$ 由流算符关于基态和激发态的内积和组成。对于处于一维光晶格(L)中的 N 个硬核玻色体系, 我们将(2.30)式化简可以得到超流因子的一般表达式^[50]:

$$\begin{aligned}
f_s^N &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^N [\psi_n^*(i) \psi_n(i+1) + c.c.] \\
&\quad - \frac{J}{N} \sum_{n=N+1}^L \sum_{m=1}^N \frac{1}{E_n - E_m} \left| \sum_{i=1}^L [\psi_n^*(i) \psi_m(i+1) - \psi_n^*(i+1) \psi_m(i)] \right|^2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

其中 $\psi_n(L+1) = (-1)^{N+1} \psi_n(1)$, ψ_n 为第 n 个单粒子态, E_n 为第 n 个单粒子态所对应的能量。在下面的数值计算结果中, 我们可以从超流因子随无序强度的变化图像上非常直观地观察到超流因子的变化, 从而客观地体现系统发生的相变。

2.5 计算示例

根据之前介绍的求解方法, 通过数值模拟, 利用图形更加形象的展示出了我们的计算结果。对于(2.31)式, 我们可以将其转化为2.3小结中 P 矩阵的形式^[51], 如下:

$$\begin{aligned}
f_s^N &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^N [P_{i,n}^* P_{i+1,n} + c.c.] \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^L \sum_{m=1}^N \frac{1}{E_n - E_m} \left| \sum_{i=1}^L [P_{i,n}^* P_{i+1,m} - P_{i+1,n}^* P_{i,m}] \right|^2
\end{aligned} \tag{2.32}$$

在(2.32)式中, P 矩阵为(2.10)式的哈密顿量对角化之后得到的单粒子态的排列, E_n 为 P 矩阵中第 n 列所对应的单粒子态的能量且 P 矩阵所对应的粒子的能量从左到右依次增加。 P 矩阵中需满足 $P_{L+1,n} = (-1)^{N+1} P_{1,n}$ 。我们得到的超流因子随着非公度势强度的变化图如图 2.1 所示:

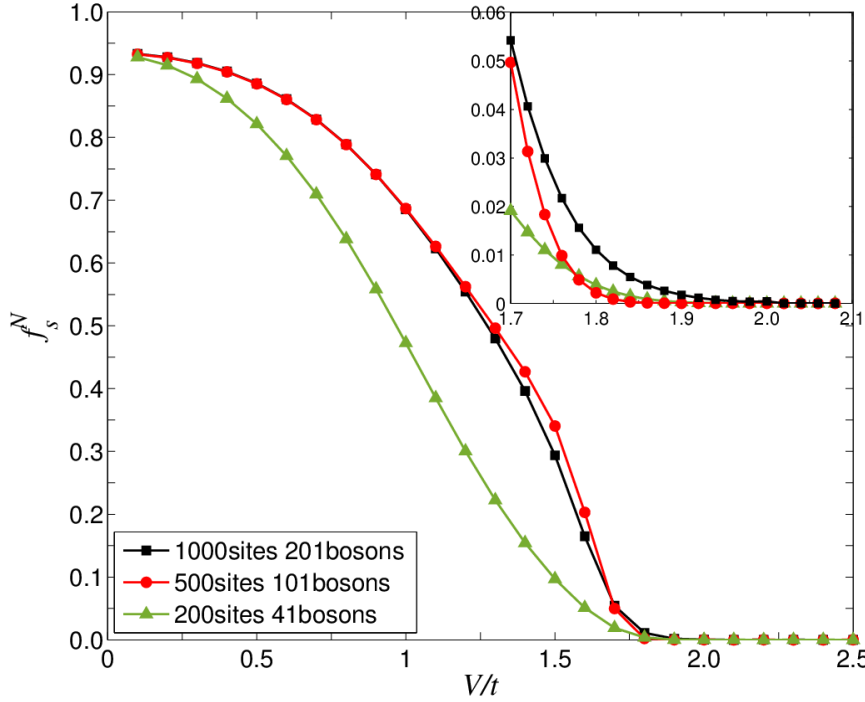


图 2.1 三种不同的晶格尺寸和粒子数填充下，超流因子随非公度势强度的变化。插图为关键点处的放大图，取 $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ 。此计算结果与文献 PRA.81.023626 中的图 1 严格吻合。

此处我们考虑周期性边界条件，如图 2.1 所示可以看出在三种不同的晶格尺寸和粒子数填充下，超流因子随着非公度势的变化情况。可以发现，当非公度势很小时，超流因子不等于 0，几乎所有的硬核玻色子都处于超流相中。随着非公度势强度 V 的持续增加，使得玻色子很难在格点上跳跃，因而粒子流动性不断减弱，超流因子逐渐减小。当 $V \approx 2t$ 时，超流因子的大小趋于 0，此时硬核玻色子趋于局域化，系统处于非超流相。

从图 2.1 中可知，随着非公度势强度的增加超流因子的衰减速度越来越快。对于非超流相的部分，我们通过求解单粒子关联函数来体现。根据已有的结果表明当非公度势强度为 0 时，单粒子密度矩阵随着距离呈现幂指数衰减。但是当加入非公度势后，图像上会出现很多的震荡，因此我们需借助平均的单粒子密度矩阵图像来刻画系统非超流相的性质，平均的单粒子密度矩阵的定义为：

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{L} \sum_i^L \rho_{j,j+i-1}$$

观察图 2.2 可得当非公度势强度 $V < 1.1t$ 时，其单粒子密度矩阵的图像与 $V = 1.1t$ 时的图像重合。随着非公度势强度的不断增加，平均单粒子密度矩阵依然为幂函数衰减，只是指数小于 $-1/2$ ，从非公度势强度 $V = 1.1t$ 的拟合方程也可以看出。当 V 继续增加且

超过转变点 $V = 2t$ 时, 平均的单粒子密度矩阵的衰减越来越快。为了进一步观察其行
为我们在插图中给出 $V = 2.1t$ 线性-坐标图, 并对其进行拟合, 拟合方程为:

$\ln \bar{\rho}_i = -5.697 - 0.055i$, 我们可以看出平均的单粒子密度矩阵呈现指数衰减行为, 此

特点为体系处于玻色玻璃相的特征。

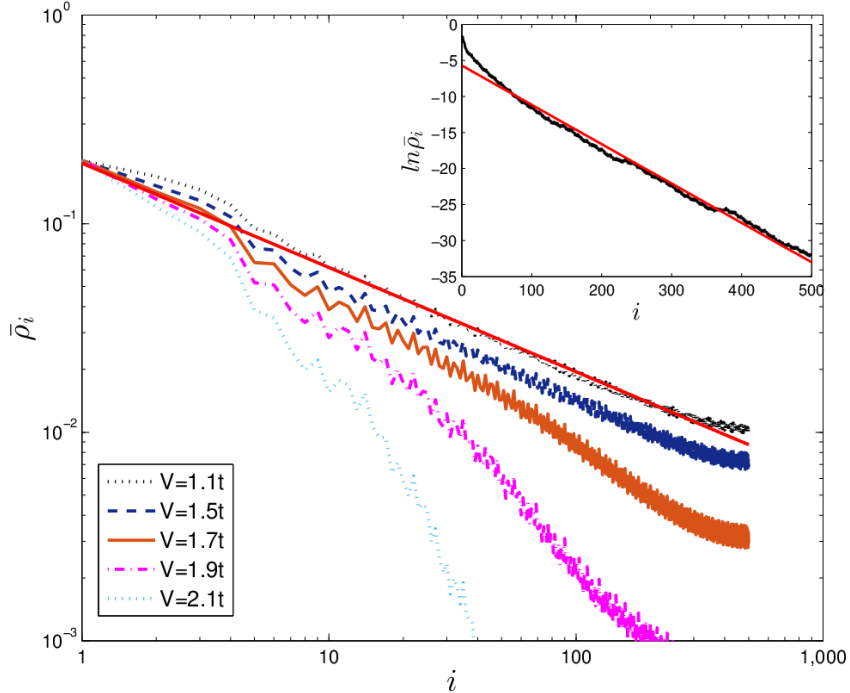


图 2.2 不同的非公度势强度下, 平均单粒子密度矩阵的对数-对数图。系统的粒子数为 201; 格点数为 1000, 取 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$, 其中红色的实线是对 $V = 1.1t$ 的拟合且拟合方程为 $\bar{\rho}_i = 0.195/\sqrt{i}$ 。

插图为平均单粒子密度矩阵的对数线性图。红色实线为对 $V = 2.1t$ 的拟合, 拟合方程为:

$\ln \bar{\rho}_i = -5.697 - 0.055i$ 。此计算结果与文献 PRA.81.023626 中的图 2 严格吻合。

接下来我们展示非公度势强度对自然轨道的影响, 即如图 2.3 所示。从图像上可以看出当非公度势强度 $V = 0t$ 时, 晶格是周期的且自然轨道为平面波, 波函数可以扩展到整个晶格空间。随着非公度势强度 V 的增加但是依然小于 $2t$, 自然轨道依然可以扩展到整个晶格, 波函数为扩展态, 只是从图中我们可以看出在自然轨道图像上出现了很多震荡, 这是由于非公度势引起的。当非公度势强度大于 $2t$ 时, 我们看到自然轨道不能扩展到整个晶格, 波函数变得局域化, 如图 2.3(e,f)所示。此时, 系统发生了相变进入玻色玻璃相。

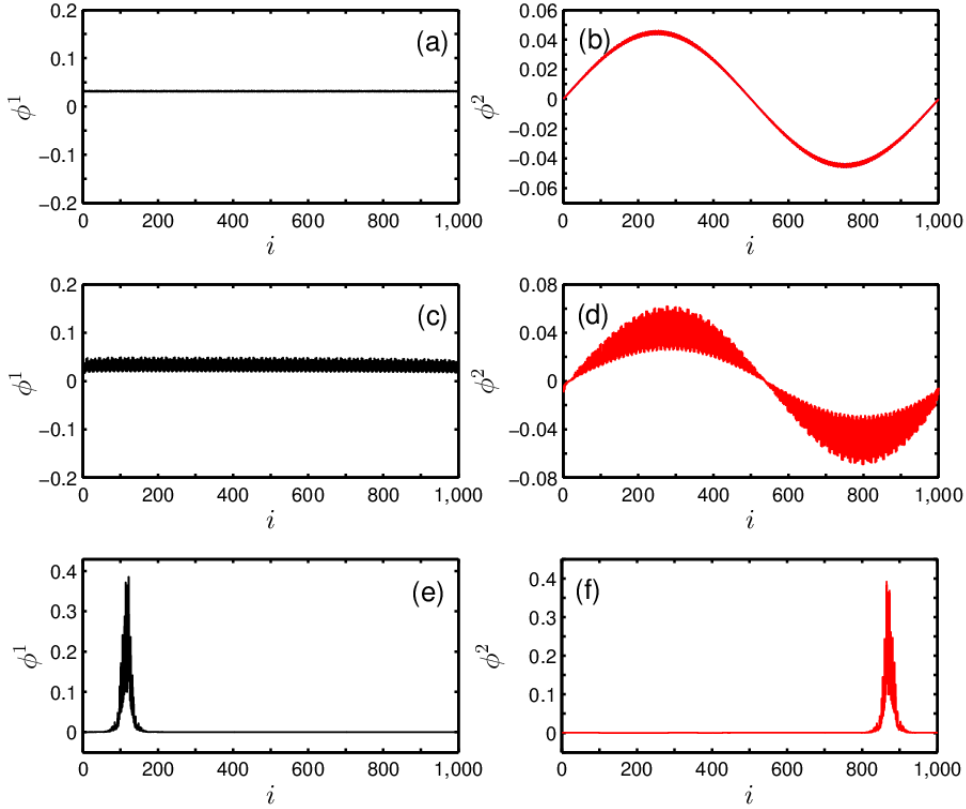


图 2.3 不同的非公度势强度下,两个最低自然轨道的分布图。体系的粒子数为 201, 格点数为 1000, 取 $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ 。图中 (a)(b) $V = 0t$, (c)(d) $V = 1.5t$, (e)(f) $V = 2.3t$ 。此计算结果与文献 PRA.81.023626 中的图 6 严格吻合。

2.6 小结

本章我们研究了对角无序的 Aubry-André(AA)模型, 发现了处于非公度势中硬核玻色体系的一些物理特性。首先介绍了 Jordan-Wigner 变换、单粒子关联函数、然后介绍了超流因子的研究背景和计算方法。最后通过数值模拟展示了其结果, 从研究结果来看, 发现非公度势可以引起系统的局域化且非公度势强度 $V = 2t$ 为系统超流-绝缘相的转变点。我们的计算结果也与蔡小明^[51]等人的结论完全吻合。下一章我们将尝试将本章所介绍的这种严格的数值方法拓展到非对角 Aubry-André(AA)模型中继续研究其物理性质。

第三章 非对角无序 Aubry-André 模型中的玻色玻璃相变

在无序系统中，传统的 Aubry-André 模型已经被人们广泛研究，既有的研究结果表明随着非公度势强度的增加，系统能够发生扩展态到局域态的转变。由于其丰富的物理性质，因而出现了很多与之相关的变形，其中较为热门的即为公度和非公度跃迁调制的非对角 Aubry-André 模型^{[52][53]}。由于其模型下有趣和新颖的物理现象，吸引了人们对此模型的广泛关注。在这样的模型下人们观察到了传统的 Aubry-André 模型中观察不到的 Majorana 零能模并且还发现了重要的非平庸零能拓扑边缘态^[54-56]等。接下来本章我们将重点探究非对角无序 Aubry-André 模型中的量子相变。

3.1 理论模型及方法

考虑非对角无序对体系的影响，在一维光晶格中 N 个硬核玻色子的哈密顿量可以写成如下形式：

$$\hat{H} = -\sum_i^L J_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + H.c.) + \mu \sum_i^L \hat{n}_i^b \quad (3.1)$$

我们这里只考虑最近邻格点间的跃迁， $\hat{b}_i^\dagger (\hat{b}_{i+1})$ 分别表示第 i 和 $i+1$ 格点上硬核玻色子的产生(湮灭)算符， L 表示晶格的长度。其中 $J_i = t[1 + \lambda_{od} \cos(2\pi\alpha i + \phi)]$ ， t 跃迁强度，同样将其设为能量单元， λ_{od} 表示非对角无序的强度， α 为无理数，它使得硬核玻色原子在格点间的跃迁具有类似无序系统的性质。 ϕ 为任意的相位，不失一般性，在计算过程中我们取 $\phi = 0$ 。 μ 为化学势，在计算过程中我们取 $\mu = 0$ 。根据 Jordan-Wigner 变换^[38]，可以得到对应的 N 个无自旋的费米子的哈密顿量，可写作：

$$\hat{H} = -\sum_i^L J_i (\hat{f}_i^\dagger \hat{f}_{i+1} + H.c.) + \mu \sum_i^L \hat{n}_i^f \quad (3.2)$$

在上式中 $\hat{f}_i^\dagger (\hat{f}_{i+1})$ 分别表示的是在位置 $i(i+1)$ 处的费米子的产生湮灭算符。我们将 (3.2) 式对角化可以得到体系的基态波函数：

$$|\Psi_F^G\rangle = \prod_{n=1}^N \sum_{i=1}^L P_{in} \hat{f}_i^\dagger |0\rangle \quad (3.3)$$

在上式中， N 表示费米子的数目与体系的硬核玻色子的数目相同； P_{in} 表示第 n 个粒子处于位置 i 处单粒子波函数的振幅。 P 矩阵由(3.2)式的哈密顿量对角化后的 N 个单粒子态组成且从左到右对应的本征能依次增大，其具体的形式如下：

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{L1} & P_{L2} & \cdots & P_{LN} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 超流到玻色玻璃相的量子相变

当不存在非对角无序即 $\lambda_{od} = 0$ 时，硬核玻色气体处于超流态。根据之前的介绍我们已经知道超流因子(superfluid fraction)是可以表征量子体系是否处于超流相的一个物理量，它反映了超流体在被施加某种相位扰动时的响应。如果超流因子 f_s^N 为非零值，则表明系统处于超流相。根据第二章我们所介绍的超流因子的计算方法可知：通过在哈密顿量(3.1)式中引入Peierls相位因子，即做替换 $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} \rightarrow \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} e^{i\varphi}$ ，可求得 f_s^N 。我们计算的结果如图3.1所示。

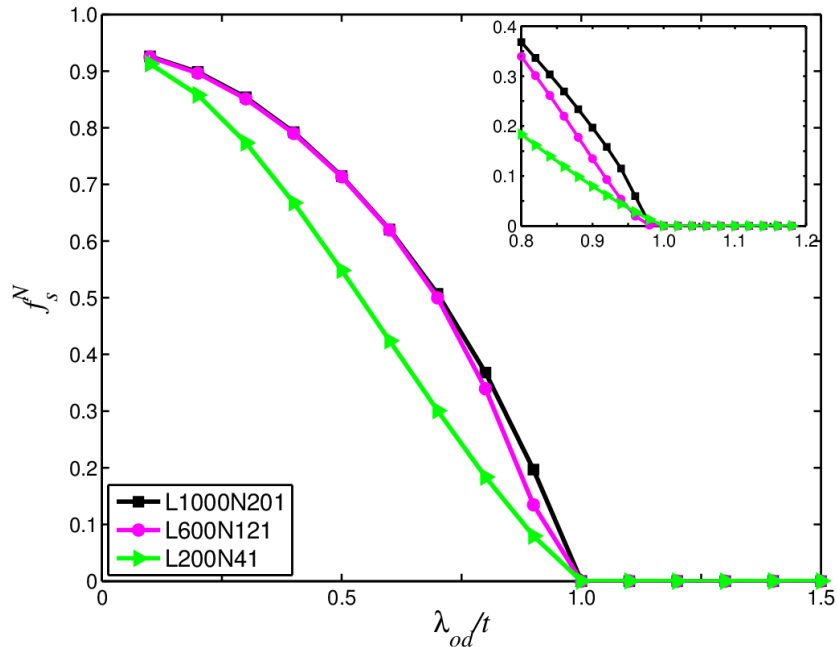


图3.1为在三种不同的晶格尺寸及粒子数填充下，系统的超流因子随着非对角无序强度 λ_{od} 的变化。插图是临界点处的放大图。在三种不同的情况下，都取 $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ 。

我们所计算的超流因子的数值结果如图3.1所示。我们在计算的过程中选取奇数个粒子且采用周期性边界条件。在图3.1中我们给出三种不同的晶格尺寸下超流因子随着非公度势强度的变化图。从图中可以看出当非公度势强度 λ_{od} 比较小时，超流因子不为零，整个体系处于超流态。随着非对角无序强度 λ_{od} 的逐渐增加，硬核玻色子很难在格点上跃迁，此时，体系的超流性减弱，慢慢趋向于局域化。当非对角无序强度 $\lambda_{od} > 1t$ 时，我们可以看到三种情况下，超流因子都趋于零，可知体系不在处于超流相。由此可以看出，非对角无序可以使硬核玻色气体更快地进入非超流相，从第二章我们知道对角无序则要达到跃迁强度的2倍才能破坏掉系统的超流态。

3.3 玻色玻璃相的性质

接下来我们讨论在 $\lambda_{od} > 1t$ 时，体系处于非超流相的性质。在既有的工作中，我们知道超流相的单粒子关联函数是随距离幂函数衰减的，而玻色玻璃相是指数衰减的。下面我们来计算非对角无序光晶格上硬核玻色气体的单粒子密度矩阵，也即单粒子关联函数。

根据第二章的研究方法可知，处于一维光晶格中 N 个硬核玻色体系的格林函数可以写为如下形式：

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \langle \psi_{HCB}^G | \hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger | \psi_{HCB}^G \rangle \\ &= \langle \psi^A | \psi^B \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

上式中， $|\psi_{HCB}^G\rangle$ 为硬核玻色子的基态波函数，且

$$\begin{aligned} |\psi^A\rangle &= f_i^\dagger \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi \hat{f}_\beta^\dagger \hat{f}_\beta} |\Psi_F^G\rangle \\ |\psi^B\rangle &= f_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\gamma} |\Psi_F^G\rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

根据第二章的推导可知：

$$|\psi^B\rangle = \prod_{n=1}^{N+1} \sum_{l=1}^L P_{ln}^B \hat{f}_l^\dagger |0\rangle \quad (3.7)$$

其中， P^B 矩阵是在 P 矩阵基础上变化而得到，有 $N+1$ 列。对于 $n \leq N$ ，当 $l \leq j-1$ ，

$P_{ln}^B = -P_{ln}$; 当 $l \geq j$ 时, $P_{ln}^B = P_{ln}$ 。最后一列为, $P_{j,N+1}^B = 1$ 和 $P_{l,N+1}^B = 0 (l \neq j)$ 。同理也可以得到 P^A 。于是格林函数可以表示为:

$$G_{ij} = \langle \psi^A | \psi^B \rangle = \det \left[(P^A)^\dagger P^B \right] \quad (3.8)$$

则单粒子密度矩阵可以表示为:

$$\rho_{ij} = \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle = G_{ij}^* + \delta_{ij} (1 - 2G_{ii}) \quad (3.9)$$

由于存在非对角无序, 单粒子密度矩阵与距离的函数曲线不再是光滑的, 而是存在许多毛刺。为了便于看到清晰的物理性质, 我们同样需要求解平均单粒子密度矩阵, 其定义为:

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \rho_{j,j+i-1} \quad (3.10)$$

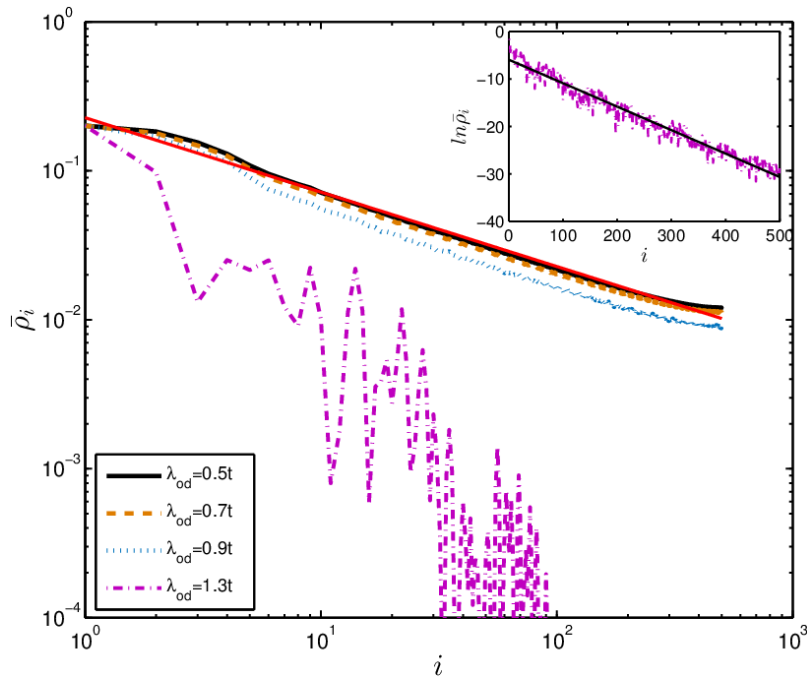


图 3.2 不同的非对角无序强度下的平均的约化单粒子密度矩阵的对数-对数坐标图。系统中有 201 个玻色子, 1000 个格点。插图表示平均单粒子密度矩阵的对数-线性图。

在图 3.2 中我们给出平均单粒子密度矩阵的对数-对数图像用来刻画体系处于超流和非超流的性质。我们可以看出当 $\lambda_{od} < 1t$ 时, 平均的单粒子密度矩阵随着距离呈现出幂函数衰减的行为。因我们选取的坐标为对数-对数坐标, 则图 3.2 中的数据分布接近于直线。当 $\lambda_{od} = 0.5t$ 时, 通过数值拟合得到的幂指数为 $-1/2$ 。拟合直线为图

中红色（实线）直线所示且拟合方程为 $\bar{\rho}_i = 0.2275 \times i^{-0.5}$ 。随着非公度势 λ_{od} 的增加，但是只要 $\lambda_{od} < 1t$ ，平均的单粒密度矩阵就一直是幂函数行为衰减，只是幂指数会小于 $-1/2$ ，衰减速度变快。但是当 $\lambda_{od} > 1t$ 时，平均的单粒子密度矩阵的行为开始变得非常不同，从图中我们可以看到，此时的衰减速度变得非常快。我们为了更清楚的去观察其物理行为，将对数-对数坐标变换为对数-线性坐标，如图 3.2 中的插图所示。我们给出了 $\lambda_{od} = 1.3t$ 时的计算结果，并对数据进行了拟合且拟合方程为 $\ln(\bar{\rho}_i) = -0.05i - 5.955$ 。在线性-对数坐标系中可作线性描述，所以在 $\lambda_{od} > 1t$ 区间，平均的单粒子密度矩阵衰减行为符合指数函数行为，这是玻色玻璃相的特性。

我们继续分析非对角无序光晶格中硬核玻色气体单粒子密度矩阵的性质。单粒子密度矩阵的本征态 φ^η 称为自然轨道，可以看成是有效的单粒子态，它能反映粒子在晶格上分布的物理性质。单粒子矩阵的本征值 o_η 则称为自然轨道的占据数，可以等效地看成是单粒子态的占据数。它们满足如下关系，

$$\sum_{j=1}^L \rho_{ij} \varphi_j^\eta = o_\eta \varphi_i^\eta \quad (3.11)$$

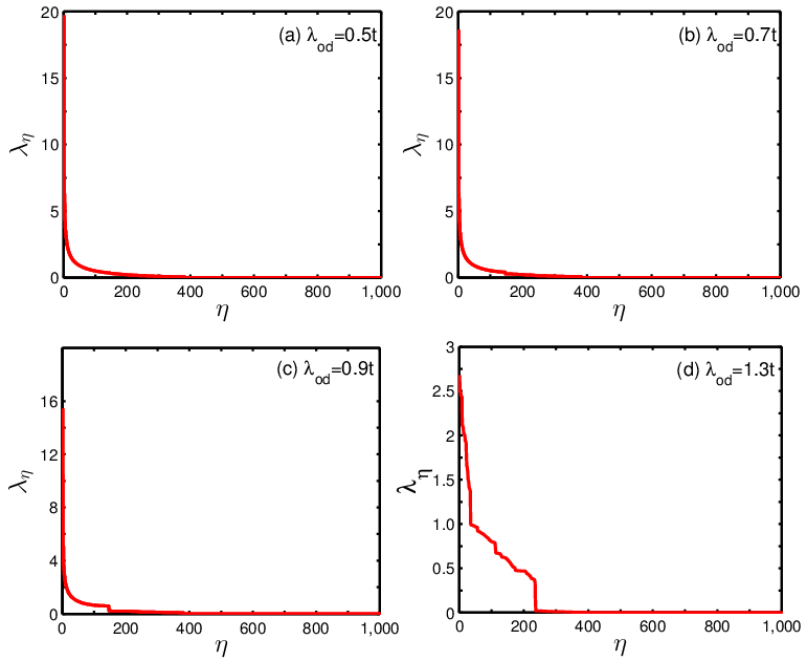


图 3.3 在不同的非对角无序强度下，硬核玻色气体自然轨道的占据情况。

(a) $\lambda_{od} = 0.5t$, (b) $\lambda_{od} = 0.7t$, (c) $\lambda_{od} = 0.9t$, (d) $\lambda_{od} = 1.3t$ 。

图 3.3 中，我们给出了硬核玻色气体的自然轨道占据数的分布情况。从图中我们可以看出当 $\lambda_{od} < 1t$ 时，我们可以看到粒子在自然轨道上的占据具有明显的峰值。在最低的自然轨道上占据数出现峰值，这是硬核玻色气体处于玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)相的标志。随着非对角无序强度 λ_{od} 变大，最低的自然轨道的占据会出现缓慢的减少，这是无序的效应。而当 $\lambda_{od} > 1t$ 时，粒子在最低的自然轨道上的占据会明显减少，不再是对比明显的峰。此外，从图 3.3 中，还可以看到一个明显的特征，当 $\lambda_{od} < 1t$ 时，自然轨道的分布函数是一个光滑的分布函数，而 $\lambda_{od} > 1t$ 以后，自然轨道的占据则出现许多明显的跃变。

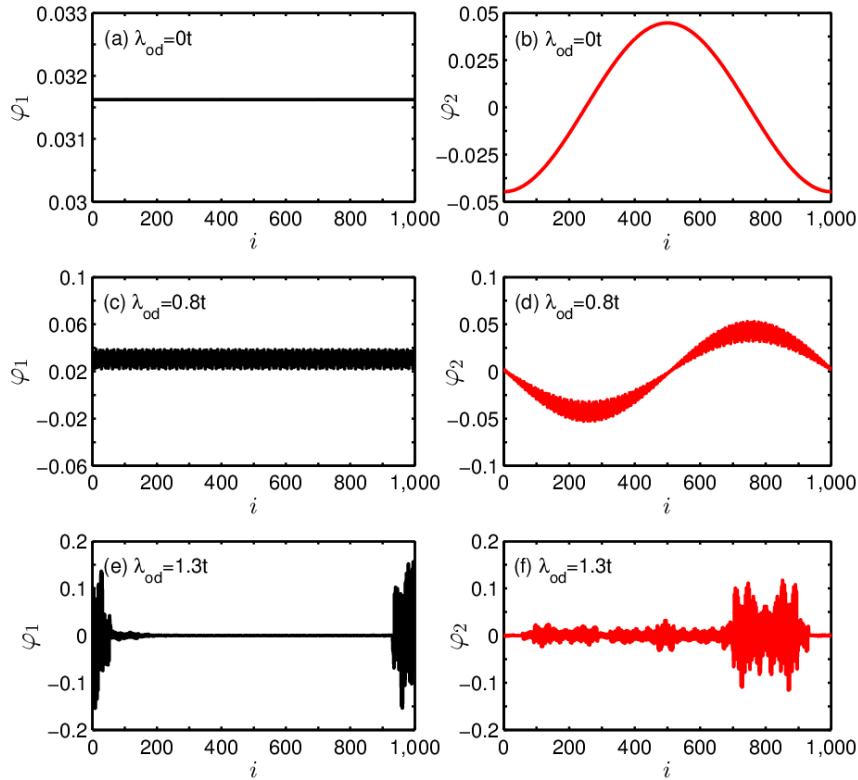


图 3.4 不同的非对角无序强度下，硬核玻色气体最低的两个自然轨道的形状。体系的粒子数为 201，格点数为 1000，取 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ 。图中(a, b) $\lambda_{od} = 0t$ ，(c, d) $\lambda_{od} = 0.8t$ ，(e, f) $\lambda_{od} = 1.3t$ 。

接着我们又研究了在不同的非对角无序强度下，系统的有效单粒子态即自然轨道的性质，考察一下非对角无序的物理效应。图 3.4 中，我们画出了硬核玻色气体最低的两个自然轨道的轮廓，每一行对应不同的非对角无序强度。当 $\lambda_{od} = 0t$ 时，晶格是严格周期性的，自然轨道是平面波，是标准的扩展态。当非对角无序逐渐增强时，

系统的自然轨道仍然是扩展的，但是与原来的波函数轮廓相比，会发现有许多杂乱的毛刺，这是晶格中存在的无序的物理效应，但此时无序强度仍无法破坏周期晶格的效应，系统的波函数仍然是扩展的，见图 3.4 中第二行 $\lambda_{od} = 0.8t$ 。但是当 $\lambda_{od} > 1t$ 时，周期晶格的效应消失，波函数的轮廓变得杂乱无章，而且粒子的分布会出现明显的局域化，见图 3.4 第三行 $\lambda_{od} = 1.3t$ 。

最后我们考虑非公度势对凝聚因子的影响，在非公度光晶格体系中，凝聚因子也是体现系统处于超流到绝缘的重要参数，且其定义为： $f_1 = \lambda_1/N$ 。从图 3.5 可以看出随着无序强度的不断增加，凝聚因子逐渐在减小，且 $\lambda_{od} = 1t$ 为相变点。当 $\lambda_{od} > 1t$ 时，我们可以看出凝聚因子趋于零，说明此时的体系处于绝缘相；当 $\lambda_{od} < 1t$ 时，凝聚因子不为零，体系处于超流态，从而体系也实现了超流到玻色玻璃相的转变。

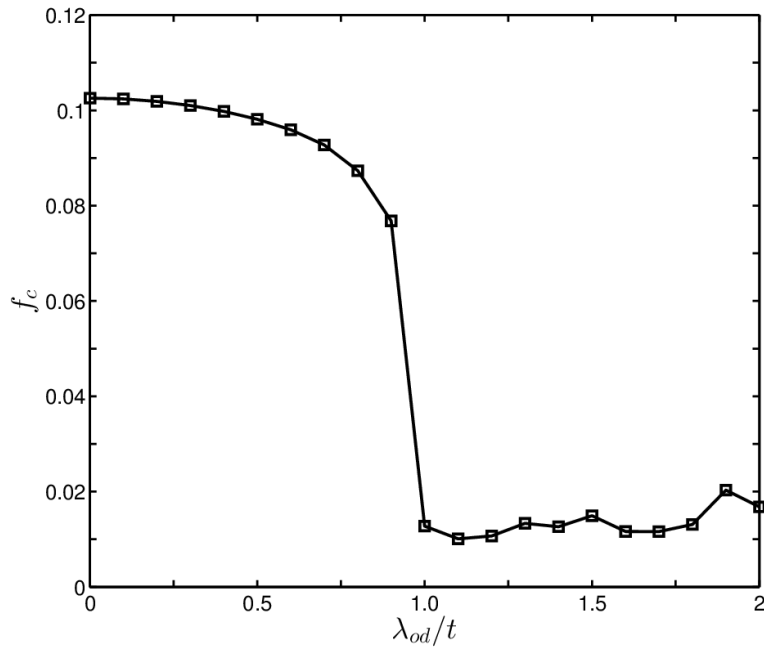


图 3.5 凝聚因子随着非公度势强度 λ_{od} 的变化。

3.4 小结

在本章中，我们研究了处于非对角无序光晶格中的具有强排斥相互作用的玻色原子气体的基态性质。在硬核极限下，利用严格的玻色-费米映射，我们给出了系统严格的基态波函数。在此基础上利用数值计算方法，我们严格计算了系统的超流因子，发现当非对角无序强度 $\lambda_{od} > 1t$ 时，超流因子会消失，表明系统进入了非超流相。

此外，我们还严格计算了单粒子关联函数、系统的有限单粒子态及其占据数。图 3.1 到 3.5 的计算结果都表明，处于非对角无序光晶格中的具有强排斥的玻色原子气体在无序作用的驱动下，发生了从超流到玻色玻璃相的基态量子相变。

第四章 总结与展望

4.1 总结

本文的研究背景基于晶格中的超冷原子气体展开，简单介绍了玻色-爱因斯坦凝聚以及光晶格的形成；阐述了硬核玻色气体的性质；并对本文研究的无序系统、局域化现象及由无序引起的系统的相变做了详细的说明。接着通过 Aubry-André(AA)模型，我们研究了一维周期光晶格中硬核玻色气体的严格数值解法。详细计算了超流因子、单粒子密度矩阵以及自然轨道等。通过数值模拟的图像我们发现随着非公势强度 V 的增加，体系能够发生超流相到玻色玻璃相的量子相变。且 $V = 2t$ 为体系的相变点，当非公度势强度 $V < 2t$ 时，所有的粒子都处于扩展态，系统处于超流相；当 $V > 2t$ 时，粒子的所有态都是局域态，体系处于一个新的绝缘相-玻色玻璃相。

在对角无序 Aubry-André(AA)模型的基础上，在第三章我们重点探究了非对角 Aubry-André(AA)模型的物理性质，同样采用严格的数值计算方法。计算了超流因子，从其结果来看发现，随着无序强度的增加，系统基态会发生从超流态到玻色玻璃相的量子相变。接着，我们又计算了单粒子密度矩阵、自然轨道及其占据数等物理量来进一步刻画系统基态量子相的性质。我们可以发现当非对角无序强度 $\lambda_{od} = 1t$ 时为超流到玻色玻璃相的转变点。当 $\lambda_{od} > 1t$ 时，结果表明，粒子的所有态都是局域态，体系进入绝缘相；当 $\lambda_{od} < 1t$ 时，粒子的所有态都处于扩展态，体系处于超流相。

通过对 Aubry-André(AA)模型与非对角 Aubry-André(AA)模型比较，我们可以发现非对角无序强度 $\lambda_{od} = 1t$ 为系统的相变点，而对角无序强度需要达到 $V = 2t$ ，系统才能发生相变，即非对角无序能够更快的驱动体系发生从超流到玻色玻璃相的量子相变。

4.2 展望

1、对于我们所研究的非对角 Aubry-André(AA)模型，我们只计算了超流因子、单粒子关联函数、自然轨道以及其占据数。除此之外，可以计算体系的动量分布、迁移率边等来进一步刻画体系的物理性质。

2、在此体系中引入简谐势阱，可以计算体系的密度分布、动量分布以及关联函数等来进一步探究体系的物理性质；将简谐势阱撤掉之后，还可以计算其动力学演化、动力学相变等。

3、可以考虑加入 p 波后的情形，通过计算 IPR、边缘态等物理量来探究系统的拓扑性质。

总之，无序系统一直是人们研究和关注的重点，其系统新奇的物理现象等待着人们不断的探索。

参考文献

- [1] S. Bose, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, and M. R. Matthews, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, *Science* **269**, 198 (1995).
- [3] B. E. Condensate, Bose-Einstein condensate, Alphascript Publishing, **40**, 243 (1997).
- [4] N. R. Claussen, E. A. Donley, and S. T. Thompson, Microscopic dynamics in a strongly interacting Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 010401 (2002).
- [5] B. G. Levi, Cornell, Ketterle, and Wieman share Nobel prize for Bose-Einstein condensates, *Phys. Today*, **54**, 14 (2001).
- [6] A. Derevianko and H. Katori, Colloquium: Physics of optical lattice clocks. *Rev. Mod. Phys.* **83**, 2015 (2010).
- [7] F. Yin, P. Sompet, and M. Andersen, Single Atoms Preparation Using Light-Assisted Collisions, *Technol.* **4**, 1 (2016).
- [8] J. H. Huckans, Optical Lattices and Quantum Degenerate ^{87}Rb in Reduced Dimensions, *Dissertations and Theses - Gradworks*, (2006).
- [9] C. Fort, J. E. Lye, and L. Fallani, Bose-Einstein condensate in an optical lattice with tunable spacing: transport and static properties, *Opt. Express*, **13**, 4303 (2005).
- [10] C. Salomon, J. Dalibard, and A. Aspect, Channeling atoms in a laser standing wave, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1659 (1987).
- [11] G. A. Goldin, R. Menikoff, and D. H. Sharp, Representations of a local current algebra in nonsimply connected space and the Aharonov–Bohm effect, *J. Math. Phys.* **22**, 1664 (1981).
- [12] G. K. Brennen and C. M. Caves, Quantum Logic Gates in Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1060 (1998).
- [13] M. Girardeau, Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension, *J. Math. Phys.* **1**, 516 (2004).
- [14] E. H. Lieb and W. Liniger, Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State, *Math. Phys.* **130**, 404 (1966).

- [15] M. D. Girardeau and A. Minguzzi, Bosonization, Pairing, and Superconductivity of the Fermionic Tonks-Girardeau Gas, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 080404 (2006).
- [16] B. Paredes, A. Widera, and V. Murg, Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice, *Nature*, **429**, 277 (2004).
- [17] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [18] S. Aubry and G. André, Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, *Annales De L'institut Henri Poincaré*, **40**, 197 (1980).
- [19] X. Cai, L. J. Lang, and S. Chen, Topological superconductor to Anderson localization transition in one-dimensional incommensurate lattices, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 176403 (2013).
- [20] S. S. Das, S. He, and X. C. Xie, Localization, mobility edges, and metal-insulator transition in a class of one-dimensional slowly varying deterministic potentials, *Phys. Rev. B* **41**, 5544 (1990).
- [21] S. S. Das, S. He, and X. C. Xie, Mobility edge in a model one-dimensional potential, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2144 (1988).
- [22] J. Billy, V. Josse, and Z. Zuo, Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder, *Nature*, **453**, 891 (2008).
- [23] G. Roati, C. D. Errico, and L. Fallani, Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate, *Nature*, **453**, 895 (2008).
- [24] J. Chabé, G. Lemarié, and B. Grémaud, Experimental observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 255702 (2008).
- [25] A. A. Chabanov, M. Stoytchev, and A. Z. Genack, Statistical signatures of photon localization, *Nature*, **404**, 850 (2000). R. L. Weaver, Anderson localization of ultrasound, *Wave Motion*, **12**, 129 (1990).
- [26] M. C. Cha, M. P. A. Fisher, S. M. Girvin, M. Wallin, and A. P. Young, Universal conductivity of two-dimensional films at the superconductor-insulator transition, *Phys. Rev. B* **44**, 6883 (1991).

-
- [27]R. Grimm, Low-temperature physics: a quantum revolution, *Nature*, **435**, 1035 (2005).
- [28]K. Burnett, Atomic physics: Cold gases venture into Flatland, *Nature*, **3**, 589 (2007).
- [29]K.W. Madison, F. Chevy, and W. Wohlleben, Vortex formation in a stirred Bose–Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2715 (2000).
- [30]M. P. A. Fisher, Boson localization and the superfluid-insulator transition, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [31]R. T. Scalettar, G. G. Batrouni, and G. T. Zimanyi, Localization in interacting, disordered, Bose systems, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3144 (1991).
- [32]W. Krauth, N. Trivedi, and D. Ceperley, Superfluid-insulator transition in disordered boson systems, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2307 (1992).
- [33]R. Roth and K. Burnett, Phase diagram of bosonic atoms in two-color superlattices, *Phys. Rev. A* **68**, 92 (2003).
- [34]B. Damski, J. Zakrzewski, and L. Santos, Atomic Bose and Anderson glasses in optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080403 (2003).
- [35]M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature*, **415**, 39 (2002).
- [36]L. Fallani, J. E. Lye, and V. Guarrera, Ultracold atoms in a disordered crystal of light: towards a bose glass, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 130404 (2007).
- [37]T. Holstein and H. Primakoff, Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
- [38]P. Jordan and E. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot, *Z. Phys.* **47**, 631 (1928).
- [39]M. Rigol and A. Muramatsu, Ground-state properties of hard-core bosons confined on one-dimensional optical lattices, *Phys. Rev. A* **72**, 013604 (2005).
- [40]马中骥, 物理学中的群论, 科学出版社, (2006).
- [41]O. Penrose and L. Onsager, Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).

- [42]E. L. Pollock and D. M. Ceperley, Path-integral computation of superfluid densities, *Phys. Rev. A* **36**, 8343 (1987). A. J. Leggett, Superfluidity, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S318 (1999).
- [43]W. Krauth, Bethe ansatz for the one-dimensional boson Hubbard model, *Phys. Rev. B* **44**, 9772 (1991).
- [44]M. E. Fisher, M. N. Barber, and D. Jasnow, Helicity Modulus, Superfluidity, and Scaling in Isotropic Systems, *Phys. Rev. A* **8**, 1111 (1973).
- [45]M. Aizenman, E. H. Lieb, and R. Seiringer, Bose-Einstein Quantum Phase Transition in an Optical Lattice Model, *Phys. Rev. A* **70**, 0236121 (2004).
- [46]D. Poilblanc, Twisted boundary conditions in cluster calculations of the optical conductivity in two-dimensional lattice models, *Phys. Rev. B* **44**, 9562 (1991).
- [47]B. S. Shastry and B. Sutherland, Twisted boundary conditions and effective mass in Heisenberg-Ising and Hubbard rings, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 243 (1990).
- [48]R. Roth and K. Burnett, Phase diagram of bosonic atoms in two-color superlattices, *Phys. Rev. A* **68**, 023604 (2003).
- [49]R. Roth and K. Burnett, Superfluidity and interference pattern of ultracold bosons in optical lattices, *Phys. Rev. A* **67**, 030602 (2002).
- [50]K. V. Krutitsky, M. Thorwart, and R. Egger, Ultracold bosons in lattices with binary disorder, *Phys. Rev. A* **77**, 053629 (2008).
- [51]X. Cai, C. Shu, and Y. Wang, Superfluid to Bose-glass transition of hard core bosons in one-dimensional incommensurate optical lattice, *Phys. Rev. A* **81**, 023626 (2010).
- [52]L. Tong, W. Pei, and C. Shu, Phase diagram of a generalized off-diagonal Aubry-André model with p-wave pairing, arXiv:1705.03783.
- [53]T. Liu, X. Gao, and S. Chen, Localization and mobility edges in the off-diagonal quasiperiodic model with slowly varying potentials, arXiv:1706.07222.
- [54]S. Ganeshan, K. Sun, and S. S. Das, Topological zero-energy modes in gapless commensurate Aubry-André-Harper models, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 180403(2013).
- [55]L. Wang, N. Liu, and S. Chen, Quantum walks in the commensurate off-diagonal Aubry-André-Harper model, *Phys. Rev. A* **95**, 013619 (2017).

- [56]F. Liu, S. Ghosh, and Y. D. Chong, Localization and adiabatic pumping in a generalized Aubry-André-Harper model, *Phys. Rev. B* **91**, 014108 (2015).

攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目

田康康, 王利, 张云波, 一维准无序光晶格中硬核玻色气体的量子相变, 山西大学学报(自然科学版).

致 谢

研究生三年的时光转瞬即逝，我们每个人都经历了从感性的年轻到理性的长大。原来的不成熟、原来的孩子气也在我们身上慢慢褪去，然而学到更多的是要去感恩经历的这一切，感谢遇到的每一个人！

首先我要感谢我的导师王利老师。论文定题到写作定稿，倾注了王老师很多的心血。在研究生期间，学习上深深受益于王老师的帮助、爱护和谆谆教导。即使是非常简单的问题，王老师也会非常有耐心的给我讲解。我从中学习到很多东西。我是一个特别爱玩的人，但是王老师总会及时的督促我学习，让我这三年没有白白浪费。在生活上，王老师也非常关心我们，会处处为我们的安全着想，让我们在学校感受到了家人的温暖。在王老师的身上，我看到了‘责任’两个字，看到了他对家庭的责任；对工作的责任；对学生的责任。在今后的学习中，我也会让我自己去做一个有责任感的人！

其次我要感谢张云波老师，张老师是一个对待工作非常认真、严谨的人。他几乎从来都不会缺席我们的组会，并且在组会上他回给我们提出很多的建议，让我们能够做的更完美。对于张老师，我心里也充满了感激与感谢，感谢他这三年来对我们几个的历练，我们成长了，成熟了。

特别感谢一直默默支持我的爸爸和妈妈，是您们让我没有后顾之忧的在学校念书；是您们在我遇到困难、迷失方向的时候，陪着我一起走出困难，做更好的选择；是您们在我伤心难过的时候给我最温暖的呵护。我特别感谢您们，您们伴我长大，我会陪你们到老！

最后我感谢我们CAT小组里面帮助过我的老师：徐志浩老师，尹相国老师和郭利平老师，感谢你们在王老师出国期间对我的指导和鼓励。还要感谢CAT小组里面的所有的师兄师姐师弟师妹们：毛丽君，李甜甜，陈立，刘彦霞，刘敬鹤，高春平、陆展鹏、刘娜、刘聪明、冯志强、张奋华、皇甫宏丽、薛雅婷、郭敏、武瑾楠、游慧敏、渠天涛、昌茂林以及我的三个小伙伴胡蕊、王凤梅、张瑞江。感谢2015级所有的同学和参加阅读和答辩的各位评审专家和教授。

田康康

2018年3月于山西大学理论物理研究所

个人简况及联系方式

姓名：田康康

性别：女

籍贯：山西省高平市

学习经历：2015年9月至2018年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位

联系方式：15735175254

电子邮箱：1203736261@qq.com

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日

