

山西大学

2017 届博士学位论文

冷原子物理中一维少体系统的研究

作者姓名	刘彦霞
指导教师	张云波 教授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2013 年 9 月至 2017 年 6 月

二〇一七年六月

Thesis for Doctor's Degree, Shanxi University, 2017

Few-body problems in one-dimensional ultracold atomic
gases

Student Name	Yanxia Liu
Supervisor	Prof. Yunbo Zhang
Major	Condensed Matter Physics
Specialty	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2013.09-2017.06

June, 2017

目 录

中文摘要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪论	1
1.1 一维精确可解模型简介	1
1.2 一维冷原子少体实验	3
1.2.1 单粒子隧穿	4
1.2.2 原子的配对隧穿	5
1.2.3 双阱中的两个费米子	7
1.2.4 少体到多体：观察费米海的形成	9
1.2.5 一维势阱中的反铁磁 Heisenberg 自旋链	10
1.3 本文内容	11
第二章 研究背景和理论基础	13
2.1 量子少体物理介绍	13
2.2 量子隧穿理论 WKB 近似方法	15
2.3 自旋链模型介绍	19
2.3.1 $S=1/2$ 自旋链模型	19
2.3.2 $S=1$ 自旋链模型	21
第三章 双原子在亚稳态势阱的隧穿	23
3.1 模型介绍	23
3.2 双原子在谐振子势阱中的解	24
3.2.1 解析解	24
3.2.2 变分法	26
3.3 准粒子隧穿理论	32
3.4 小结	35
第四章 双原子在双阱中的隧穿动力学	37
4.1 N 个原子的严格解	37
4.2 两个粒子的情况	43

4.3	布居数及隧穿动力学的研究.....	47
4.4	小结.....	51
第五章	强相互作用系统的等效自旋链	53
5.1	玻色费米映射.....	53
5.2	自旋 1/2 的等效自旋链	54
5.3	自旋 1 的等效自旋链.....	57
	5.3.1 能级排布.....	58
	5.3.2 动力学.....	63
5.4	小结.....	66
第六章	费米子 SU(n) 对称系统能级的精确排布	67
6.1	Lieb-Mattis 定理.....	67
6.2	SU(n) 对称性系统的能级排布.....	69
	6.2.1 均匀系统.....	69
	6.2.2 非均匀系统.....	75
6.3	小结.....	75
第七章	总结与展望	77
	参 考 文 献	79
	攻读学位期间取得的研究成果	93
	致 谢	94
	个人简况及联系方式	95
	承 诺 书	96
	学位论文使用授权声明	97

Contents

Abstract in Chinese	I
ABSTRACT	III
Chapter1 Introduction	1
1.1 1D exactly solvable model	1
1.2 few-body experiments of 1D ultracold gases	3
1.2.1 Single-particle tunneling	4
1.2.2 Pair tunneling.....	5
1.2.3 Two fermions in a double well	7
1.2.4 From few to many: form a Fermi sea	9
1.2.5 Antiferromagnetic Heisenberg spin chain in a 1D trap.....	10
1.3 An outline of this Thesis.....	11
Chapter 2 The research background and theoretical basis	13
2.1 The introduction of quantum few-body physics.....	13
2.2 Quantum theory of tunneling: WKB approximation method.....	15
2.3 The introduction of spin chain models	19
2.3.1 $S=1/2$ spin chain model	19
2.3.2 $S=1$ spin chain model	21
Chapter 3 The tunneling of two interacting atoms out of a metastable state trap	23
3.1 Introduction of model.....	23
3.2 Two-atom problem in a harmonic trap	24
3.2.1 Exact solution	24
3.2.2 Result of variation method	26
3.3 Tunneling theory of quasiparticle.....	32
3.4 Summary.....	35
Chapter 4 The tunneling dynamics of two atoms in double well	37

4.1	Exact solution of N atoms.....	37
4.2	Two-particle case.....	43
4.3	Occupation probability and tunneling dynamics.....	47
4.4	Summary.....	51
Chapter 5 The effective spin chain of strongly interacting system		53
5.1	Bose-Fermi Mapping.....	53
5.2	Effective spin chain of spin 1/2 system.....	54
5.3	Effective spin chain of spin 1 system.....	57
5.3.1	Ordering of energy levels	58
5.3.2	Spin-mixing and state transfer dynamics	63
5.4	Summary.....	66
Chapter 6 Exact ordering of levels for Fermi gases with SU(n) symmetry.....		67
6.1	Lieb-Mattis theorem	67
6.2	Ordering of energy levels for the system with SU(n) symmetry.....	69
6.2.1	Uniform system	69
6.2.2	Trapped system.....	75
6.3	Summary.....	75
Chapter 7 Conclusion and perspective		77
Bibliography.....		79
Research achievements		93
Acknowledgment		94
Personal profiles		95
Letter of commitment.....		96
Authorization statement		97

中文摘要

由于冷原子实验的飞速发展，精确控制准一维系统中的原子数目为研究少体问题提供了必要的条件。少体是多体系统研究的基石，近年来少体问题得到了很多冷原子实验小组的关注，使得少体研究成为近期的一个热点。本文我们主要研究一维少体系统，内容包括少体系统的波函数、能谱、隧穿动力学、自旋交换动力学和强相互作用下的一些特殊性质。

首先，在亚稳态势阱的隧穿理论和隧穿率的计算的基础上，针对处于一维谐振子势阱中的双粒子系统给出了更合理的基态试探波函数。在相对坐标系中，空间划分成三个区域，在区域边界处波函数及其一阶导数都是连续的。准动量可以根据包含两个参数的约束条件来确定。将哈密顿量作用到试探波函数上，通过变分法得到基态能量。结果和精确解的结果符合的非常好。

其次，利用 **Bethe ansatz** 方法给出了束缚在 δ 势垒双阱中 N 个玻色子的严格解，并且重点研究了两个粒子的情况。通过求解两个粒子的奇宇称态的占据几率，发现严格解得到的结果和传统的双模近似得到的结果有很大的差别。结果可以为实验上探测激发态提供理论依据。研究了初态为无限高势垒的 **NOON** 态时的动力学演化。通过观察双占据几率和单占据几率的相互转换，发现单粒子隧穿导致在相同阱的双占据几率和在不同阱的单占据几率的转变。

再次，研究了一维强相互作用自旋 1 的玻色子气体。该系统可以很好的用等效自旋链模型来描述。通过求解等效自旋链，我们给出了偏离能级高度简并的 $SU(3)$ 可积点的能级排布的规律，以及在强相互作用情况下波函数的对称性。研究发现两个通道相互作用强度的比值在系统的自旋混合动力学中起着关键作用。而有效自旋链的态传递要比 **Heisenberg** 双边双二次型的自旋链更好。

最后，通过严格解研究了一维具有 $SU(n)$ 对称性的费米气体系统，并给出了所有不同对称性分类中最低能量态的排序。不同的对称性分类可以用 **Bethe ansatz** 方程中的量子数唯一标定。我们的结果超越了 **Lieb-Mattis** 定理中仅能给出通过 **pouring** 原则比较不同对称性类能级的排布规律。在强相互作用区域，我们给出了有效交换自旋模型的排布规律，并将结果扩展到非均匀外势谐振子势阱的情况。有待在冷原子实验中验证。

关键词：Bethe ansatz 方程；少体系统；强相互作用；等效自旋链

ABSTRACT

Because of the rapid advance of ultra-cold atomic experiments, the high control and tunability of ultracold atomic systems offer the possibility to study the few-body problem. Study of the few-body system is the building blocks of many-body problem. Recently ultra-cold atomic few-body systems have drawn a lot of focus of experiment research, which is becoming a hot topic. This thesis mainly studies the few-body properties of one-dimensional atomic gases, including the wavefunctions, energy spectrum, tunneling dynamics, spin-mixing dynamics and the quantum magnetism of strongly correlated quantum system.

Firstly, a more reasonable trial ground state wave function is proposed for the relative motion of an interacting two-fermion system in a one-dimensional (1D) metastable trap. The relative coordinate space is divided into three regions. At the boundaries both the wave function and its first derivative are continuous and the quasi-momentum is determined by a more practical constraint condition which associates two variational parameters. The ground state energy is obtained by applying the variational principle to the expectation value of the Hamiltonian of relative motion on the trial wave function. The resulted energy and wave function show better agreement with the analytical solution than the original proposal.

Secondly, we present the Bethe-ansatz type exact solution for N interacting bosonic atoms in the δ -split double well and focus specially on the two-particle case. The occupation probability of the two-atom odd-parity eigenstate shows evident dependence on the interaction, distinct from the result of traditional two-mode model. The tunneling dynamics of two atoms starting from the NOON state with infinite barrier height can be derived from the exactly solved model of a δ -barrier split double well based on a Bethe ansatz type hypothesis of the wave functions. We find that the single-particle tunneling shifts between the probability of double occupancy in the same

well and that of single occupancy in different wells.

Thirdly, we consider a one-dimensional trapped gas of strongly interacting few spin-1 atoms which can be described by an effective spin chain Hamiltonian. Away from the $SU(3)$ integrable point, where the energy spectrum is highly degenerate, the rules of ordering and crossing of the energy levels and the symmetry of the eigenstates in the regime of large but finite repulsion have been elucidated. We study the spin-mixing dynamics which is shown to be very sensitive to the ratio between the two channel interactions g_0/g_2 and the effective spin chain transfers the quantum states more perfectly than the Heisenberg bilinear-biquadratic spin chain.

Finally, based on the exact solution of one-dimensional Fermi gas systems with $SU(n)$ symmetry, we demonstrate that it is possible to sort the ordering the lowest energy eigenvalues of states with all allowed permutation symmetries, which can be solely marked by certain quantum numbers in the Bethe ansatz equations. Our results go beyond the generalized Lieb-Mattis theorem, which can only compare the ordering of energy levels of states belonging to different symmetry classes if they are comparable according to the pouring principle. In the strongly interacting regime, we show that the ordering rule can be determined by an effective spin-exchange model and extend our results to the non-uniform system trapped in the harmonic potential. Our results provide a rule for ordering the high-spin $SU(n)$ symmetric systems.

Key words: Bethe ansatz equation; Few-body system; Strongly interacting system; Effective spin chain

第一章 绪论

量子少体问题长期以来一直是原子分子理论，核物理和粒子物理领域的一项重要研究内容，少体体系涉及到的粒子数目比较少，研究的方法及技术相对简单，但是研究内容比较深入，在物理上对于定量的理论研究非常重要。少体研究可以揭示系统的基本性质及规律，为研究更复杂的体系提供了必要的基础，经过实验验证的理论也可以推广到多体问题中。近年来随着超冷原子系统实验的迅速发展以及对原子、分子的精确操控，使少体物理在冷原子领域得到越来越多的关注，成为实验和理论研究的一大热点[1-8]。本章中我们首先介绍一些一维精确可解模型及其主要理论。然后介绍一维少体实验的主要进展。最后简要介绍本文的概貌和结构。

1.1 一维精确可解模型简介

在量子力学中我们知道，可数的单粒子问题是可以严格求解的，考虑相互作用的两体问题可精确求解的则更少，例如：氢原子问题，谐振子势阱中的两粒子问题[9]等。对于考虑相互作用的多体问题，Bethe ansatz (BA) 提供了一种行之有效的方法给出一些一维系统的精确结果[10]。该方法是 Bethe 在 1931 年最早提出的，成功的求解了一维各向同性的铁磁 Heisenberg 自旋链。1963 年，Lieb 和 Liniger 将这个办法应用到一维排斥性 δ 相互作用无自旋的均匀玻色子系统中[11]。随后，McGuire、Gaudin、杨振宁等人将该方法推广到了多分量费米子、玻色子以及玻色费米混合系统中[12]-[14]。Lieb 和 Wu 将该方法应用到 Hubbard 模型，得到了基态能量，波动方程以及化学势[15]。Bethe ansatz 方法在凝聚态物理，强关联体系，以及数学领域中都有很广泛的应用[16]-[21]。下面我们主要介绍 Bethe ansatz 方法的基本思路。

对于满足周期性边界的可积系统，波函数满足

$$\Psi(\dots, x_j = 0, \dots) = \Psi(\dots, x_j = L, \dots), \quad (1.1.1)$$

同时系统的波函数可以假设成平面波叠加的形式

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{Q, P} \theta(x_{Q_1} < \dots < x_{Q_N}) A(Q, P) e^{i \sum_{l=1}^N k_l x_{Q_l}}, \quad (1.1.2)$$

这里 $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ 和 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是 $(1, 2, \dots, N)$ 的两个排序， k_i 是准动量， $\theta(x_{Q_1} < \dots < x_{Q_N})$ 是阶梯函数表示当 $x_{Q_1} < \dots < x_{Q_N}$ 时，等于 1，否则为 0， A 是系

数。根据波函数在 $x = x_i - x_j = 0$ 的连续性和其一阶导数的不连续性条件可以得到散射矩阵 S 。对于无自旋的系统，所有的 S 矩阵都是 c 数，再结合周期性边界条件就可以得到 BA 方程，形式如下：

$$e^{ik_j L} = \prod_{l \neq j}^N S_{l,j}(k_j - k_l). \quad (1.1.3)$$

在描述单分量玻色子的 Lieb-Liniger 模型中，

$$S_{l,j}(k_j - k_l) = \frac{k_j - k_l + ic}{k_j - k_l - ic}. \quad (1.1.4)$$

c 为粒子间的相互作用强度。

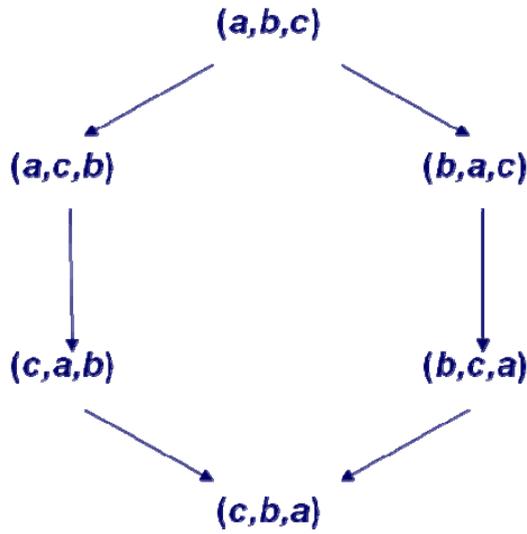


图 1.1 从初态 (a, b, c) 到末态 (c, b, a) 的两种等价的散射过程

对于多组分系统，粒子具有内部自旋自由度， S 矩阵通常是算符，但是满足 Yang-Baxter 方程

$$\begin{aligned} & S_{ab}(k_b - k_a) S_{ac}(k_c - k_a) S_{bc}(k_c - k_b) \\ &= S_{bc}(k_c - k_b) S_{ac}(k_c - k_a) S_{ab}(k_b - k_a). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

该方程是杨振宁和 Baxter 在研究一维 δ 势费米气体模型和二维格子统计模型时分别提出的。其表示的含义是系统从初态 (a, b, c) 到末态 (c, b, a) 有两种途径，这两种散射过程是等价的，如图 1.1 所示。方程 (1.1.5) 是周期性边界条件系统可积的条件。根据 Yang-Baxter 方程，得到转移矩阵

$$t(u) = \text{tr}_0 T_0(u), \quad (1.1.6)$$

这里

$$T_0(u) = L_{0,N}(u)L_{0,N-1}(u)\cdots L_{0,1}(u) \quad (1.1.7)$$

为单值矩阵, $L_{0,n}(u)$ 是 Lax 算符, 形式与散射矩阵相同。系统的哈密顿量与转移矩阵 $t(u)$ 是对易的。通过得到转移矩阵的本征值和本征态, 就可以得到相应的哈密顿量的本征值和本征态。将转移矩阵作用到本征态上结合周期性边界条件就可以得到

$$t(k_j)|\psi\rangle = e^{ik_jL}|\psi\rangle. \quad (1.1.8)$$

其中, $|\psi\rangle$ 是转移矩阵的本征态。这个方程可通过代数 Bethe Ansatz 方法计算, 从而得到 Bethe Ansatz 方程。这就是 Bethe Ansatz 方法的基本思路。对于两分量费米子的 Gaudin-Yang 模型, Bethe Ansatz 方程为

$$e^{ik_jL} = \prod_{\alpha=1}^M \frac{i(k_j - \Lambda_\alpha) - c/2}{i(k_j - \Lambda_\alpha) + c/2}, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (1.1.9)$$

$$-\prod_{j=1}^N \frac{i(k_j - \Lambda_\alpha) - c/2}{i(k_j - \Lambda_\alpha) + c/2} = \prod_{\beta=1}^M \frac{i(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta) + c}{i(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta) - c} \quad \alpha=1,2,\dots,M.$$

其中, Λ 是自旋快度, N 是粒子数, M 是单个分量的粒子数目。

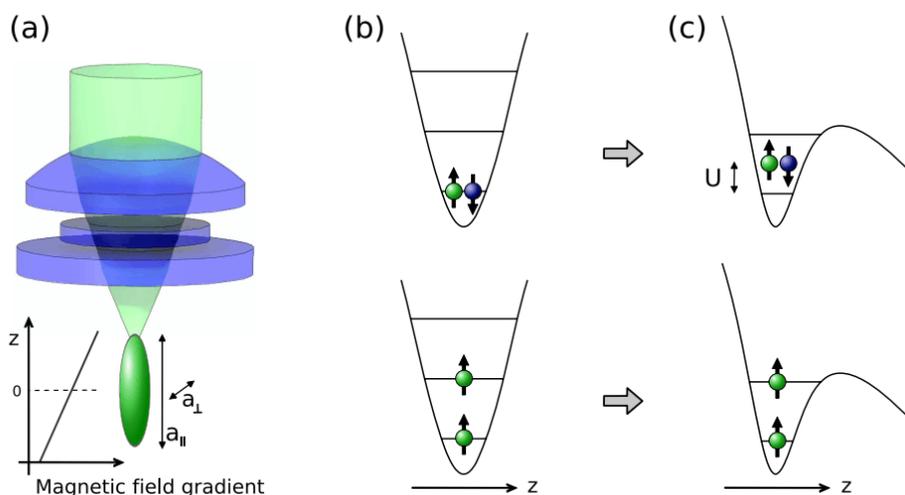


图 1.2 (a)通过一束激光和一个沿 z 方向的磁场梯度形成的光阱。(b)囚禁在光阱基态的两个粒子。(c)加上磁场梯度后, 形成一个势垒, 粒子便可以隧穿出去[2]

1.2 一维冷原子少体实验

目前超冷气体的研究大部分关注的是多体系统的性质, 在热力学极限下粒子数的涨落和散粒噪声一样不会明显的改变热力学量, 例如, 温度, 压强。与此相反,

少体系统非常依赖于粒子的数目。当然，目前的实验技术已经可以很精确的控制少体系统中粒子的个数。海德堡 Jochim 实验小组在 2011 年[2]用光偶极阱和磁场梯度将两个 ${}^6\text{Li}$ 费米原子制备到基态，精确度可以达到 $(93 \pm 2)\%$ 。粒子囚禁在纵横比为 1:10 的三维雪茄状的势阱中，各方向可近似认为是谐振子势阱，其纵向的角频率为 $\omega_{\parallel} = 2\pi \times (1.234 \pm 0.012) \text{ kHz}$ ，横向的角频率为 $\omega_{\perp} = 2\pi \times (11.88 \pm 0.22) \text{ kHz}$ ，此系统是一个准一维的系统，可以当做一维系统来处理。一维形式的光势阱和磁势阱的形式为

$$V_{r=0}(z) = pV_0 \left(1 - \frac{1}{1 + (z/z_r)^2}\right) - \mu_m B' z, \quad (1.2.1)$$

这里 $V_0 = k_B 3.326 \mu\text{K}$ 是光势阱的初始深度， p 是以初始光阱深度为单位的光阱深度， $z_r = \pi\omega_0^2 / \lambda$ 是最小腰宽为 $\omega_0 = 1.838 \mu\text{m}$ 、波长为 $\lambda = 1064 \text{ nm}$ 光势阱光波的 Rayleigh 长度， μ_m 是原子磁矩， $B' = 18.92 \text{ G/cm}$ 是磁场梯度的强度。光阱主要是形成一个势阱，加上梯度磁场可以将势阱的一边打开形成一个亚稳态势阱，如图 1.2 所示。亚稳态势阱是研究隧穿动力学的重要模型之一。

系统的相互作用可以通过 Feshbach 共振[22]和束缚诱导共振[23]来实现。一维的耦合常数 g 可以通过三维散射长度 a_{3D} 和横向谐振子势的特征长度 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar / \mu\omega_{\perp}}$ 来确定。这里 \hbar 是普朗克常数， $\mu = m/2$ 是两个质量为 m 的原子的约化质量。耦合常数为

$$g = \frac{2\hbar^2 a_{3D}}{\mu a_{\perp}^2} \frac{1}{1 - C a_{3D} / a_{\perp}}, \quad (1.2.2)$$

这里常数 $C = \zeta(1/2) = 1.46$ ， ζ 是 Riemann zeta 函数。当 $a_{3D} / a_{\perp} = 1/C$ 时，一维耦合常数发散，三维散射长度是有限值时就可以表现出共振散射的特点。

1.2.1 单粒子隧穿

实验上将两个 ${}^6\text{Li}$ 费米子制备到最低的两个 Zeeman 子能级的超精细态 $|F=1/2, m_F=1/2\rangle$ 和 $|F=1/2, m_F=-1/2\rangle$ 。对于费米化的实验首先将原子制备到超精细态上，对于可区分粒子系统和全同系统分别用 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 表示，这里 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 分别表示自旋 1/2 系统的两个自旋分量。由于费米子的反对称性，全同系统感受不到 s 波相互，对于可区分粒子系统的相互作用于则可以通过磁 Feshbach 共振来调节。实验上可以测量其中一个原子隧穿出势阱的时间 τ 随相互作用强度 g 的变化规律。结果发现在相互作用强度 $g = \infty$ 时， $|\uparrow\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 态的隧穿时间 τ 是相同的，也就是说，这

两个态的能量，波函数的密度分布 $|\psi_{\uparrow\downarrow}(x_1, x_2)|^2 = |\psi_{\uparrow\uparrow}(x_1, x_2)|^2$ 是相同的。文献[24]通过 WKB 近似给出了隧穿的准粒子理论，很好的解释了实验的数据点，揭示了波函数的费米化特点。

1.2.2 原子的配对隧穿

对于费米化的研究，是将两个可区分的原子制备到排斥相互作用区域，系统中的粒子只会出现单粒子隧穿。当原子处在吸引相互作用区域时，这时会发生两个原子同时隧穿的现象[3]。下面我们介绍一下测量过程：首先将两个原子制备到基态，一个原子处在 $|\downarrow\rangle$ 态，另一个处在 $|\uparrow\rangle$ 态，然后突然加上磁场梯度，使势阱的一边倾斜形成势垒，这时粒子会跑出去，在固定的某一个时间迅速去掉磁场梯度，将势阱恢复，然后测量势阱里面的原子的个数，重复多次，计算某一时刻的势阱出现两个原子，一个原子，以及 0 个原子的几率 $P_2(t)$ ， $P_1(t)$ 和 $P_0(t)$ 。通过这些几率可以得到平均粒子数 $\bar{N}(t) = 2P_2(t) + 1P_1(t)$ 随时间的演化。

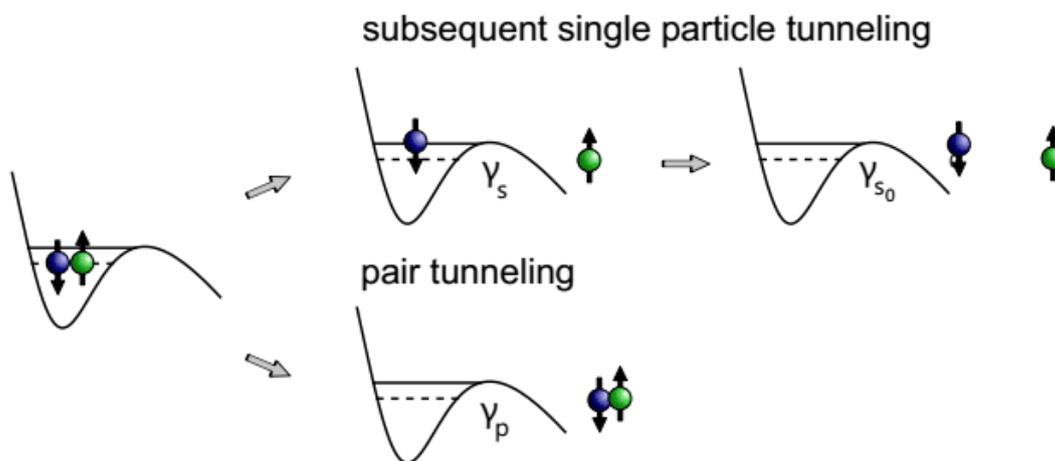


图 1.3 两个原子的两种隧穿过程，上面箭头的过程指的是原子一个接着一个的隧穿出去。下面箭头的过程指的是两个原子同时隧穿出去[3]

为了描述两个粒子的配对隧穿，实验中用一个简单的模型来描述，对于两个原子的隧穿有两个过程，如图 1.3。第一个过程是配对隧穿，即两个原子同时离开势阱，发生这个过程的速率记成 γ_p 。第二个过程是单个原子一个接着一个离开势阱，第一个粒子先离开势阱，第二个粒子处在势阱的非微扰的基态，这个过程第一个粒子隧穿的速率记成 γ_s 。这个速率主要由隧穿势垒的高度决定的，同时依赖于两个原子的相互作用能。对于第二个原子没有相互作用的影响，因此离开势阱的速率是无相互作用系统的 γ_{s_0} 。

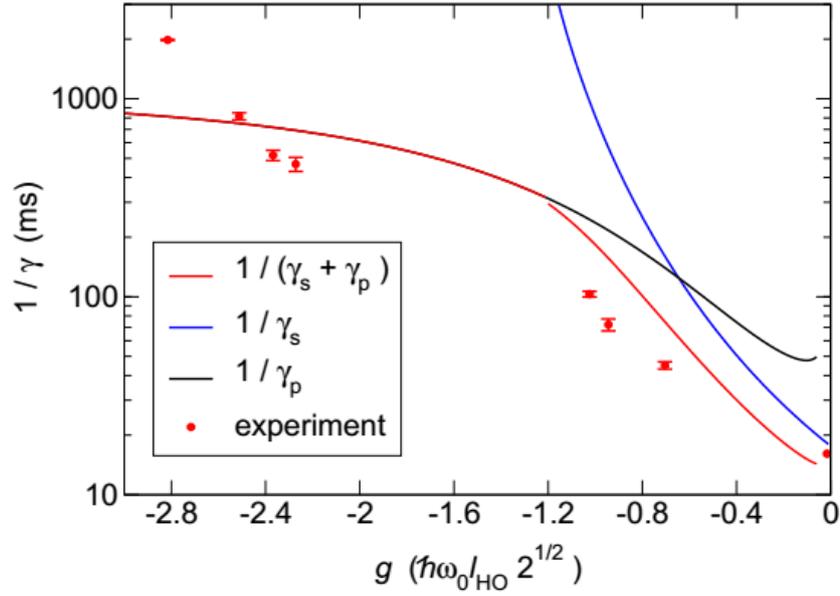


图 1.4 隧穿率的倒数随相互作用的变化图[3]

将这些速率与实验上测得随时间变化的几率 $P_i(t)$ 联系到一起。发现两个原子在阱中的几率以单粒子隧穿和配对隧穿速率之和减小：

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\gamma_p + \gamma_s)P_2(t). \quad (1.2.3)$$

这个速率方程很容易求解，两粒子的几率以指数方式衰减：

$$P_2(t) = e^{-(\gamma_p + \gamma_s)t}. \quad (1.2.4)$$

对于几率 $P_1(t)$ 的速率方程为：

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \gamma_s P_2(t) - \gamma_{s_0} P_1(t), \quad (1.2.5)$$

这里两个原子系统变成一个原子的速率为 γ_s ，然后以速率 γ_{s_0} 衰减成零原子系统。假设初始的制备是非常完美的。上面方程的初始条件可以认为是 $P_2(0)=1$ ， $P_1(0)=P_0(0)=0$ ，可以得到发现单个粒子在势阱中的几率

$$P_1(t) = \frac{\gamma_s}{\gamma_s + \gamma_p - \gamma_{s_0}} \left[e^{-\gamma_{s_0}t} - e^{-(\gamma_s + \gamma_p)t} \right] \quad (1.2.6)$$

在实验中要考虑两个额外的效应。第一个是有限的准备精确度 $0 \leq f \leq 1$ ， f 是初始的制备几率。第二个是通过改变磁场调节相互作用强度会影响原子自旋的取向。这就导致倾斜势的形状随着磁场改变，并且依赖于原子状态。因此考虑实验的这些实际

情况隧穿速率可以修正成为一个依赖于自旋的结果

$$P_2(t) = fe^{-(\gamma_p + \gamma_{s\downarrow} + \gamma_{s\uparrow})t} = fe^{-\gamma_2 t}, \quad (1.2.7)$$

$$P_1(t) = f\left(\frac{\gamma_{s\uparrow}}{\gamma_2 - \gamma_{s_0\downarrow}}[e^{-\gamma_{s_0\downarrow}t} - e^{-\gamma_2 t}] + \frac{\gamma_{s\downarrow}}{\gamma_2 - \gamma_{s_0\uparrow}}[e^{-\gamma_{s_0\uparrow}t} - e^{-\gamma_2 t}]\right) + \frac{1-f}{2}(e^{-\gamma_{s_0\uparrow}t} - e^{-\gamma_{s_0\downarrow}t}) \quad (1.2.8)$$

上面包含了依赖于自旋的速率 $\gamma_{s\uparrow}, \gamma_{s\downarrow}, \gamma_{s_0\downarrow}$ 和 $\gamma_{s_0\uparrow}$ 。(1.2.8) 式的第一项和第二项分别对应第一个隧穿的原子为 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ ，最后一项对应的是单个原子的体系。通过测量单粒子的隧穿过程，可以得到 $\gamma_{s_0\downarrow}$ 和 $\gamma_{s_0\uparrow}$ ，这两个隧穿速率是依赖原子状态 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 的。为了减少参数，由于 $\gamma_{s\uparrow}$ 和 $\gamma_{s\downarrow}$ 是依赖于外势的，可以通过 $\gamma_{s_0\downarrow}$ 和 $\gamma_{s_0\uparrow}$ 的测量推测出 $\gamma_{s\uparrow}$ 和 $\gamma_{s\downarrow}$ 的依赖关系。这样就只有两个独立的参量了。实验上直接可以测量的是单个粒子和两个粒子在阱中的几率，根据 (1.2.7) 和 (1.2.8) 就可以逆推得到单粒子和配对粒子隧穿的速率，从而分析系统的隧穿特性。实验结果表明在相互作用强度 $g > -0.59$ 时是没有配对隧穿的。在强吸引相互作用区域 $g < -0.64$ ，配对粒子隧穿占主导地位，单粒子的隧穿速率很小，可以认为两个粒子绑在一起形成了束缚态，相互作用可看做是其内部的自由度。文献[25]通过 WKB 近似理论计算给出了隧穿率 γ_s 和 γ_p 随相互作用强度的变化，如图 1.4。

1.2.3 双阱中的两个费米子

实验上双阱可以由两束激光通过高分辨率的物镜聚焦产生，如图 1.5[3]。通过声光偏转器独立的控制两束激光的强度和位置，可以调节双阱的隧穿耦合系数 J 和两阱之间的偏差 Δ 。众所周知，双阱是构成光晶格的基本单元。实验上可以实现制备半满费米 Hubbard 模型。在 Hubbard 模型体系，两个粒子的空间波函数可以由基矢 $\{|LL\rangle, |LR\rangle, |RL\rangle, |RR\rangle\}$ 展开。其中 $|L\rangle$ 和 $|R\rangle$ 分别表示单粒子在左阱和右阱的基态。在这样的基矢下哈密顿量可以写成：

$$H = \begin{pmatrix} U + 2\Delta & -J & -J & 0 \\ -J & 0 & 0 & -J \\ -J & 0 & 0 & -J \\ 0 & -J & -J & U - 2\Delta \end{pmatrix}. \quad (1.2.9)$$

这里 J 是隧穿能， U 是同一格点的相互作用能，双阱间能量偏移为 2Δ 。

为了研究两个粒子在双阱的隧穿动力学。实验上首先将两个原子制备到 $|LL\rangle$ 态，然后迅速将势垒降低到可以使原子在双阱中来回隧穿。为了观察动力学的结果，演化到不同的时刻，迅速增加势垒的高度使原子在双阱中的空间分布锁定，然后通过它们的荧光计测量每个阱中的原子的个数。重复测量多次得到每一时刻的占据几率。实验可以给出不同参数下，占据几率随时间的振荡图像。实验上也可以将原子制备到系统的本征态，如基态，激发态，探测两个粒子在不同阱的几率 $P_1 = |\langle \Psi | LR \rangle|^2 + |\langle \Psi | RL \rangle|^2$ 和两个粒子在同一个阱的几率 $P_2 = |\langle \Psi | LL \rangle|^2 + |\langle \Psi | RR \rangle|^2$ ，得到相互作用强度对双势阱的本征态以及占据几率的影响。

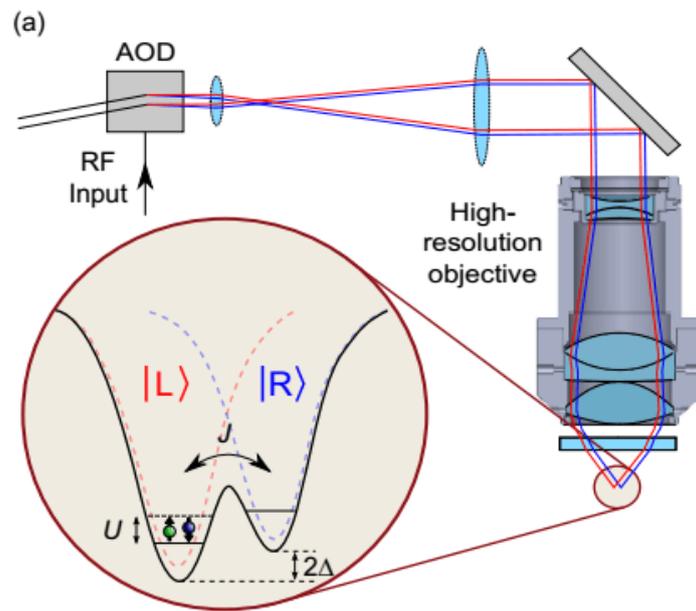


图 1.5 形成双阱的实验装置图[3]

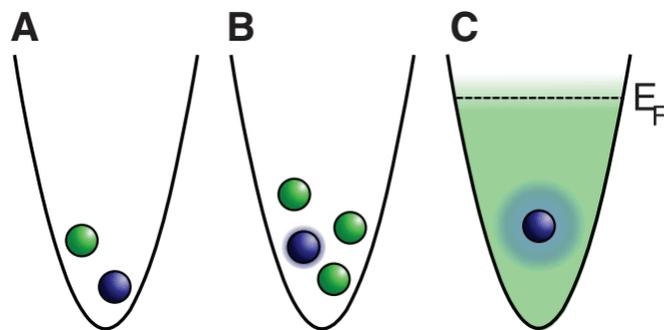


图 1.6 从少到多。谐振子势阱中一个单杂质原子（蓝色）和一个，少个，多个全同费米子相互作用。在多体的情况，主要的分量可以可以看做是费米能为 E_F 的费米海。[5]

1.2.4 少体到多体：观察费米海的形成

知道一个物理体系什么时候可以具有宏观特性并且可以用多体理论很好的描述是非常困难的。一维冷原子的少体实验通过精确控制单杂质系统中全同费米子的数目来研究从少体到多体的跨越。首先制备一个 $N+1$ 个粒子的系统，其中包括一个杂质粒子和 N 个囚禁在细长光偶极阱基态的多数粒子，如图 1.6。实验上将超冷费米子 ${}^6\text{Li}$ 原子制备到两个精细态来实现这样的系统，这里少数粒子处在 $|\downarrow\rangle$ 态，多数粒子处在 $|\uparrow\rangle$ 态。系统可以由哈密顿量

$$H = \sum_{i=0}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 x_i^2 \right) + g \sum_{i=1}^N \delta(x_i - x_0) \quad (1.2.10)$$

描述，这里 x_0 是与 N 个同一分量原子相互作用的单个杂质粒子的坐标。 x_1 到 x_N 表示多数原子的坐标， m 是 ${}^6\text{Li}$ 原子的质量， ω_{\parallel} 是轴向谐振子势阱的角频率。这个哈密顿量在两种情况下可以精确求解，一种是 $N=1$ 的情况[9]，一种是多数粒子的个数为无穷的均匀系统，即 $\omega_{\parallel} = 0$ [26]。

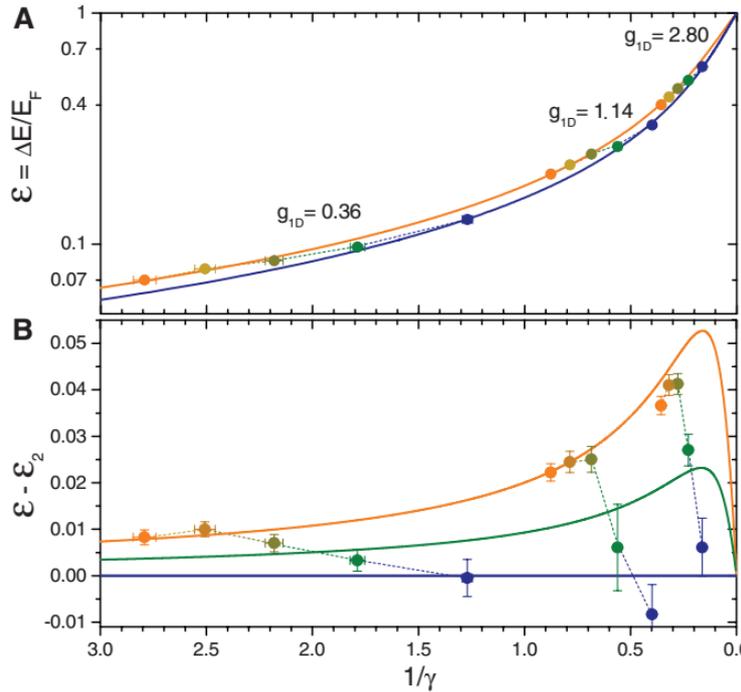


图 1.7 (A) 无量纲相互作用能随相互作用 γ 的变化。实线表示 $N=1$ (蓝色)、 $N=2$ (绿色)、 $N \rightarrow \infty$ (橘色)的理论计算的结果。颜色的点表示 $N=1$ 到 5 实验测量的结果。(B) 相互作用能和 $N=1$ 的相互作用能的差值。对于 $N \geq 4$ 的这些能量就已经接近多体极限了，这表明费米海的形成[5]

为了探测这个系统，实验上主要测量杂质和多数粒子间的相互作用能

$\Delta E_N = E(N, N_\downarrow = 1) - E(N, N_\downarrow = 0)$ 随多数粒子数的变化。相互作用能的测量可以通过 RF 脉冲改变杂质粒子的内态来实现。如果没有多数粒子的存在, 转变发生在频率 ν_0 , 对应杂质粒子初末态超精细能级差。对于有 N 个多数粒子存在的情况, 杂质粒子和多数粒子之间的相互作用引起一个 $\Delta\nu(N)$ 的频率移动。对于给定的相互作用强度, 相互作用能为 $E = \hbar\Delta\nu(N)$ 。

每个多数粒子的添加都会增加与杂质粒子相互作用的原子数目, 因此随着粒子数的增加, 相互作用能是增加的。对于弱相互作用, 满足 $\Delta E \propto \sqrt{N}$ 。当 $N \rightarrow \infty$ 时, ΔE 是发散的。因此, 通过自然能量标度重新定义相互作用能, 无量纲的相互作用能为 $E = \Delta E / E_F$, 这里 E_F 是多数原子的费米能。由于只考虑相互作用能, 因此忽略零点动能, 这意味着对于谐振子的情况 $E_F = N\hbar\omega_{\parallel}$ 。为了补偿由于增加粒子数引起的密度的改变, 定义无量纲的相互作用参数 $\gamma = (\pi m / \hbar^2) g / k_F$, 这里 $k_F = \sqrt{2mE_F} / \hbar$ 。为了判断系统是否达到多体极限, 实验的数据要和两种极限情况比较, 一种是 $N = 1$ 的情况, 另一种是 $N = \infty$ 的情况。前一种情况的相互作用能为 $\varepsilon_2 = \Delta E_2 / E_F$, 如图 1.7 的蓝色线。后一种情况是多粒子极限, 单个杂质粒子浸入到无穷多个粒子形成的费米中。一维均匀系统多粒子极限情况的相互作用能为[26]

$$\varepsilon_\infty = \frac{\Delta E_\infty}{E_F} = \frac{\gamma}{\pi^2} \left[1 - \frac{\gamma}{4} + \left(\frac{\gamma}{2\pi} + \frac{2\pi}{\gamma} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) \right], \quad (1.2.11)$$

如图 1.7 中的橘色线。对于 $\gamma = 0$, 相互作用能为 0。对于 $\gamma \rightarrow \infty$, 系统达到费米化极限, 杂质粒子和 N 个多数费米子相互作用的能量与 $N+1$ 个没有相互作用的全同粒子的能量相同, 因此这种情况的相互作用能与费米能量 E_F 是相同的。 $N = 1$ 和 $N = \infty$ 两种极限情况在 $\gamma \rightarrow \infty$ 时结果是一致的, 如图 1.7 (B)。比较理论和实验的结果, 可以发现 $N \geq 4$ 时的相互作用能和无穷多个粒子情况保持一致, 也就是 $N \geq 4$ 时, 就已经体现了多体的特性。

1.2.5 一维势阱中的反铁磁 Heisenberg 自旋链

在实验[8]中, 介绍了 N_\uparrow 个自旋向上的粒子和 N_\downarrow 个自旋向下的粒子如何实现 Heisenberg 自旋链。实验中研究的系统有 $(N_\uparrow, N_\downarrow) = (2, 1), (3, 1), (2, 2)$ 。这些体系的基态在强相互作用区域都表现出反铁磁态的特征。那么实验上是如何判断其是反铁磁态的呢? 在实验上通过两个独立的测量就可以确定。第一, 利用隧穿技术去探测自旋链最外边粒子自旋的方向。第二, 利用波函数在单粒子能级的投影, 探测自旋向下粒子在 $(2, 1), (3, 1)$ 体系中的空间波函数。

图 1.8 最右边的原子以能量 E 隧穿前后三个粒子的密度分布情况[8]

在准一维的系统中可以通过磁 Feshbach 共振和束缚诱导共振，将不同组分间的一维相互作用强度调到共振区域，即费米化区域。相同自旋组分的散射是被禁止的。在费米化区域，原子之间是不可穿透的，因此原子在势阱的纵轴方向的排序是固定。这样就可以通过隧穿确定最外边原子的自旋方向。如图 1.8，倾斜势阱最外边的原子会隧穿出去。通过探测势阱中剩余自旋向上原子的个数，来判断隧穿出去的原子的自旋，重复多次测量，计算几率，与理论结果比较。例如，对于 (2,1) 系统，其基态为

$$|AFM_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - 2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \quad (1.2.12)$$

自旋向下粒子隧穿出去的几率为

$$P_{\downarrow} = \left| \langle \uparrow\uparrow\downarrow | AFM_3 \rangle \right|^2. \quad (1.2.13)$$

这里我们仅仅是举一个简单的例子，在实验中由于要加磁场梯度，因此，实际实验计算结果要考虑外加磁场梯度使外势不对称引起的变化。通过以上的测量计算就可以判断是否处在反铁磁态。

对于强相互作用系统，相对坐标在 $x = x_i - x_j = 0$ 的地方会产生一个尖峰，这个尖峰会导导致更高能量的能级占据。一个态空间波函数越对称，尖峰就会越多。因此单粒子的能级占据数的分布直接反应了系统自旋的结构。不引入外势的情况下，两分量间的强相互作用就可以使自旋链达到稳定，这使得在非格点模型中制备自旋链成为可能，也为磁学性质的研究提供了一个新的平台。

1.3 本文内容

在本章中，我们已经对本文所涉及的少体实验进行简单的概述，在接下来的几章，我们主要介绍双原子在亚稳态势阱和双阱中的量子隧穿问题以及在强相互作用

下通过等效自旋模型，给出系统的能级排布和动力学特性。

论文的结构和布局如下：

第二章介绍了本工作涉及到的知识背景和理论基础。主要介绍了少体问题的一些主要方法，量子隧穿理论 WKB 近似方法和自旋链模型。

第三章介绍了两个相互作用粒子在亚稳势阱中的隧穿问题。根据 WKB 近似，分区域给出波函数，来计算隧穿率，在势阱区域可以近似认为是谐振子势阱。对于谐振子势阱，除了精确解，用变分法同样可以得到的基态的能量和试探波函数。

第四章给出了双原子在双阱中的精确解，并且基于精确解的结果，研究了少体系统中的隧穿动力学。

第五章，通过 s -波相互作用和 p -波相互作用的映射结合微扰论，得到强相互作用系统的等效自旋链，在此基础上，给出了自旋 1 系统的能级排布以及系统的对称性，研究了此系统的自旋交换动力学，以及态传递动力学。

第六章，通过求解 BA 方程，研究了一维 $SU(n)$ 费米子均匀系统的能级排布。在强相互作用时，通过将等效自旋链模型，给出了具有 $SU(n)$ 对称性谐振子系统的能级排布。

第七章是对本论文的总结以及对未来工作的展望。

第二章 研究背景和理论基础

在这一章主要介绍一些与本论文相关的背景知识及理论基础，为理解后面几章的理论研究打下坚实的基础。在研究双原子在亚稳态势阱的隧穿时，需用到 WKB 近似方法给出单粒子隧穿的几率。在研究强相互作用系统的等效自旋链时，将连续模型转换成等效自旋链模型给出系统的能谱及排序等。下面我们主要介绍量子隧穿的 WKB 近似方法和自旋链模型的相变及分类。

2.1 量子少体物理介绍

尽管少体物理几乎所有的物理分支都起着重要的作用，但是少体现象通常只会被简单的描述，即使有，也仅出现在本科或者研究生的基础课程中。一般在教科书上的少体问题会有哪些呢？这里我们举两个例子，天体力学中的三体开普勒问题，以及量子力学中把氦原子中的核子看做是质点的三体问题。一般情况下，三体问题很难退化到一个有效的单体问题。这一节，我们简单介绍一些囚禁在势阱中的玻色子或费米子的少体问题，这些都是研究少体物理的理想模型。这些系统中有很多是可以解析处理的，尽管存在很强的相互作用和很多的自由度，但是在某些情况下，可以转换成单体问题来求解。

如今，简并的玻色和费米气体在世界各地的实验室都可以产生。大多数的实验小组都以碱金属原子作为研究对象，如 Li, Na, K, Rb, Cs，这些原子的共同特点是最外层只有一个价电子。在超冷温度 T ，即两体相互作用的有效力程 r_0 远小于德布罗意波长 λ_{dB} 时，原子间的相互作用主要是以各向同性的 s 波碰撞为主。s 波碰撞的效应可以通过 s 波散射长度 a_s 参数化。在很多情况下散射长度是唯一的微观参数用来描述大的系统[27][28]。一个经典的例子就是平均场 Gross-Pitaevskii 方程[29]-[32]，只依赖于粒子数 N 和 s 波散射长度 a_s 。Gross-Pitaevskii 方程将多体问题转换成一个有效的单体问题描述弱相互作用稀薄玻色凝聚体的特性，其准确性在实验上也得到了验证。除了碱金属原子，实验上也可以实现更复杂价电子结构原子的凝聚，如 Ca, He, Cr, Yb, Sr。例如，两个 Cr 原子间的碰撞是各向异性长程的[33][34]。这些特性会引起超出 s 波的物理，两原子间的相互作用除了依赖 s 波散射长度还依赖于偶极动量的强度。

粒子与粒子之间的相互作用与外势的几何结构会导致囚禁系统能谱的量子化。

事实上，外部的束缚势可以看作是量子化连续自由系统的条件。实验上，单个囚禁的少体系统可以通过所谓的微势阱囚禁少个粒子来实现[35]。一系列的少体系统可以通过将多个原子囚禁在很深的光晶格中来实现，其中不同格点间的隧穿被抑制，近邻相互作用可以忽略[36][37]。

对于冷原子系统，一个鲜明特征是原子间的相互作用可以通过外磁场在 Fano-Feshbach 共振附近调节[22]。这个现象可以用两通道模型解释。两个原子最外面的两个电子的相互作用可以由一个比较浅的三重态和一个比较深的单态的 Born-Oppenheimer 势能曲线来描述。超精细相互作用将单态和三重态的势能耦合形成一个闭通道和一个开通道。当闭通道的束缚能量和开通道入口处的能量一样时就发生 Fano-Feshbach 共振。Fano-Feshbach 共振在 1998 年第一次在超冷原子气体中观察到[38]-[40]。它们的存在为理论和实验对比铺平了道路。

一个特别有趣的少体现象是 Efimov 效应。早在 1970 年，俄罗斯核物理学家 Efimov 就发现在无穷大 s 波散射长度时，自由空间的两体系统只存在一个零能束缚态，没有其它弱的束缚态。但是当加入第三个粒子以后，就会出现令人惊讶的结果，相应的三体系统会出现无穷多个弱的束缚三体态，且束缚能有分立标度不变性[41]-[43]（这里假设只有两体相互作用）。Efimov 预言，即 Efimov 效应，激发了很多理论和实验的研究，直到现在仍然是少体物理中的重要研究课题。在氦的三聚物，核物理，还有其它系统中都有三体 Efimov 效应和关联的 Efimov 共振的研究。然而，它的第一个实验验证则是 2006 年由 Innsbruck 小组在铯原子气体中完成的[44]。从更广的范围看，Efimov 态是 Borromean 环的一种，这一类物态的标志特征是只有三个粒子会形成束缚态（环链），而其中任意两个都不互相束缚。这是一个纯粹由量子力学导致的效应，有丰富而深刻的物理内涵。自从 Efimov 效应提出以后，研究者们还关心一个问题，那就是 Efimov 效应是否可以推广到大系统中。尽管已经有很多进展，但这仍然是一个开放问题。 N 体系统 ($N>3$) 的能谱是如何依赖于三体参数的？在自由空间或者有外势的情况，四体，五体和更多体系统的研究可能会给出答案。

近年来超冷原子实验在准一维少体系统中也有突破性的进展。海德堡 Jochim 实验小组首先将两个费米子囚禁在光势阱中，研究了强相互作用下费米子的费米化，通过加一个磁场梯度，在排斥相互作用下研究了单粒子的隧穿[2]，在吸引相互作用下研究了配对粒子的隧穿[3]。然后通过精确的一个一个的增加原子的个数，观察到了费米海的形成。实验上通过测量单个杂质粒子与背景气体的相互作用能来研究从少体到多体跨越，发现当原子数目达到五个的时候，在某些特征上已经呈现出多体

的性质。双势阱可以认为是构成 Hubbard 模型的基本单元，通过双势阱的研究可以对 Hubbard 模型有更深刻的理解。该实验组接着实现了两个原子在双势阱间的量子隧穿，可以得到相互作用强度对双势阱的本征态以及占据几率的影响[3]。近期该实验组在一维的谐振子势阱中准确的制备由自旋 1/2 费米子构成的反铁磁海森堡自旋链[8]。Regal 小组用光镊子将单个原子冷却到它的振动基态[45]，随后扩展实验技术将两个原子冷却到双阱的基态，通过两个粒子的干涉观察粒子的统计效应[46]。用这样的方法也可以扩展到更多粒子的情况[47]。

2.2 量子隧穿理论 WKB 近似方法

量子隧穿效应是一种量子特性，是电子，原子等微观粒子能够穿过它们本来无法通过的“墙壁”的现象。早在 1928 年，Gamov 运用量子隧穿效应解释了原子核的 α 衰变。在经典力学里，粒子被牢牢地束缚在原子核内，主要是因为粒子需要很多的能量，才能逃出原子核非常强的位势。所以，经典力学无法解释 α 衰变。在量子力学里，粒子不需要拥有比位势还强的能量，就能逃出原子核，粒子具有波动性，有一定的几率可以穿透位势，逃出原子核位势的束缚。

隧穿效应的数学解析有一个特别问题。对于简单的外势，如，长方形势垒，通过求解薛定谔方程，很容易给出解析解，得到隧穿概率，即穿透系数。这一类计算可以清楚的表明隧穿效应的物理内涵。但是，如果考虑实际的物理隧穿效应，真实情况势垒对应的薛定谔方程，大多数时候是没有解析解的。很早以前，数学物理学家就已经对此问题进行研究。他们研究出一些特别的方法来近似地求解这些方程。在物理学里，这些特别方法被称为半经典方法。一个常见的半经典方法是 WKB 近似[48]-[51]。下面我们主要介绍这一方法以及其适用条件[52]。

WKB 近似方法主要是用来求解一维问题，当然通过不同方式的修正也可以求解二维或者三维的隧穿问题。这里我们只介绍一维的情况。假设要近似求解的薛定谔方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V(x)\psi = E\psi, \quad (2.2.1)$$

令

$$\psi(x) = \exp[iS(x)/\hbar], \quad (2.2.2)$$

将 (2.2.2) 式带入 (2.2.1) 式得到

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2m} \frac{d^2 S}{dx^2} = E - V(x), \quad (2.2.3)$$

当 $\hbar \rightarrow 0$ 时, 上式的形式上与经典力学中的 Jacobi-Hamilton 方程相同, S 对应于经典力学的作用量。WKB 近似的核心在于, 把 $S(x)$ 按照 \hbar 做幂级数展开, 然后逐渐近似求解, 令

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 S_2 + \dots \quad (2.2.4)$$

带入 (2.2.3) 式得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} S_0'^2 + \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2m} (S_0'' + 2S_0' S_1') \\ & + \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{1}{2m} (S_1'^2 + 2S_0' S_2' + S_1'') + \dots = E - V(x), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

比较 \hbar 的同幂次项, 可以得到

$$\frac{1}{2m} S_0'^2 = E - V(x), \quad (2.2.6)$$

$$S_0'' + 2S_0' S_1' = 0 \quad (2.2.7)$$

$$S_1'^2 + 2S_0' S_2' + S_1'' = 0 \quad (2.2.8)$$

从 (2.2.6) 式, 可以得到零级近似解

$$S_0(x) = \pm \int^x k dx \quad (2.2.9)$$

其中

$$k = \sqrt{2m(E - V(x))}, \quad (2.2.10)$$

在经典极限下, k 是粒子的动量, S_0 为作用量。将 (2.2.9) 代入 (2.2.7), 可以得到

$$S_1' = -\frac{1}{2} \frac{S_0''}{S_0'} = -\frac{1}{2} \frac{k'}{k} = \left(\ln k^{-1/2} \right)' \quad (2.2.11)$$

积分, 得到一级修正

$$S_1 = \ln k^{-1/2} + \text{常数} \quad (2.2.12)$$

下面分两种情况给出薛定谔方程一级近似解

(1) $V(x) < E$, 经典允许区, $k(x)$ 为实

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{C_1}{\sqrt{k}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int^x k dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{k}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int^x k dx\right) \\ &= \frac{C}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int^x k dx + \alpha\right)\end{aligned}\quad (2.2.13)$$

这里的 C_1 和 C_2 或者 C 和 α 由具体问题的边界条件及归一化条件确定。

(2) $V(x) > E$, 经典禁区, $k(x)$ 为纯虚

$$\psi(x) = \frac{C'_1}{\sqrt{|k|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int^x |k| dx\right) + \frac{C'_2}{\sqrt{|k|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int^x |k| dx\right) \quad (2.2.14)$$

式中 C'_1 和 C'_2 也是由边界条件来确定。

下面讨论一级近似的适用条件: 从 (2.2.5) 式可以看出, 一级近似解 (2.2.13) 和 (2.2.14) 成立的条件是

$$\hbar |S_0''| \ll |S_0'^2| \quad (2.2.15)$$

$$2\hbar |S_0' S_1'| \ll |S_0'^2| \quad (2.2.16)$$

结合 (2.2.9) 和 (2.2.11), 式 (2.2.15) 可以化成

$$\hbar |k'| \ll k^2 \quad (2.2.17)$$

式 (2.2.14) 化成

$$\hbar \left| \frac{k'}{k} \right| \ll |k|. \quad (2.2.18)$$

概括起来可以表示成

$$\left| \frac{\hbar}{k^2} \frac{dk}{dx} \right| = \left| \hbar \frac{d}{dx} k^{-1} \right| \ll 1, \quad (2.2.19)$$

也可以表示成

$$\frac{\hbar}{k} \frac{1}{2[E - V(x)]} \frac{dV}{dx} \ll 1. \quad (2.2.20)$$

由此可以看出, 一级近似解成立的条件是, (1) 外势 $V(x)$ 的变化足够缓慢, 即在粒子的 deBroglie 波长范围内, $V(x)$ 的变化 $\hbar V_x / p$ 比粒子的动能 $E - V(x)$ 小得多。(2) 显然, 在“转折点”附近, $p \approx 0$, 近似条件不成立, 因而一级近似解在转折点邻近区域是不适用的。

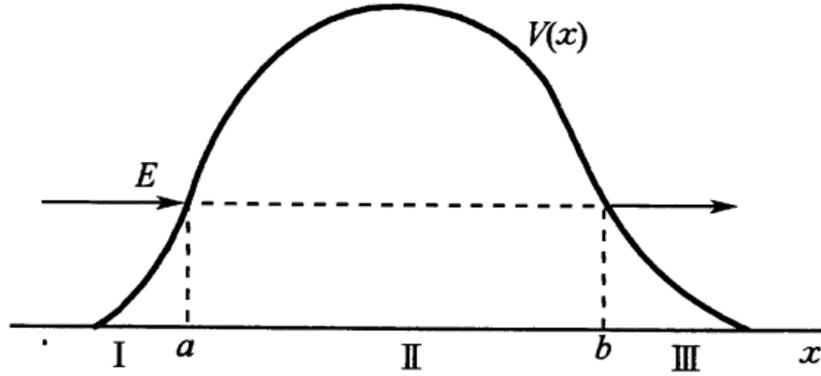


图 2.1 势垒隧穿示意图

下面我们给出势垒隧穿问题的 WKB 近似解。如图 2.1，假设在区域 I， $x < a$ ，WKB 近似波函数的表达式为

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{2}{\sqrt{v}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a k dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{v}} \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^a k dx + \frac{i\pi}{4}\right) - \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^a k dx - \frac{i\pi}{4}\right) \right]\end{aligned}\quad (2.2.21)$$

式 (2.2.21) 中的相位 $\pi/4$ 可以根据在 $x \approx a$ 邻近的严格解的渐近表达式与 $x < a$ 区域 WKB 给出的解作比较得到。 $v = k/m$ 表示入射粒子的速度。上式第一项和第二项分别是入射波和反射波，且强度相同，流密度均为 1，只有当穿透概率 $T \ll 1$ 时，这才是一个很好的近似。

在区域 II， $a < x < b$ 中，WKB 波函数取负指数函数形式。能够将区域 I 和区域 II 的波函数光滑地衔接起来的波函数如下

$$\frac{2}{\sqrt{v}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a k dx + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |k| dx\right) \quad (2.2.22)$$

$x < a$ $x > a$

在 $x > a$ 区域 $k = i\sqrt{2m(V(x) - E)} = i|k|$ 为纯虚数，上式右边可以改写成

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |k| dx\right) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |k| dx\right) \quad (2.2.23)$$

除了前面的常数因子，波函数的形式为

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |k| dx\right) \quad (2.2.24)$$

此波函数在势垒内部，且远离转折点 a 和 b 的地方适用。

根据波函数延伸到势阱外的连接条件

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |k| dx\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x k dx + \frac{i\pi}{4}\right) \quad (2.2.25)$$

$(x < b)$ $(x > b)$

可以得到在 $x > b$ 区域中 WKB 波函数为

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |k| dx\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x k dx + \frac{i\pi}{4}\right) \quad (2.2.26)$$

所以透射流密度为

$$j_t = \rho v = v |\psi|^2 = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |k| dx\right) \quad (2.2.27)$$

考虑到入射流密度为 1，所以透射系数就是

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |k| dx\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(E - V(x))} dx\right) \quad (2.2.28)$$

这就是势垒透射概率公式。只要势垒满足一级近似成立的条件要求，隧穿几率总能写成上式的形式。

这里只考虑了一级近似的结果，当考虑 \hbar 的高阶关联，如二阶项 \hbar^2 ，这些关联对于处理隧穿能量接近于势垒顶端的情况非常重要。当然半经典近似的方法除了 WKB 近似，还有其它方法，如 Miller-Good 方法[53]。

2.3 自旋链模型介绍

自旋系统是凝聚态物理中的一个重要研究领域。许多著名的自旋模型对于理解多体物理及量子磁现象都扮演着重要的角色。此外，还有很多自旋链模型都是可以严格求解的，比如，Ising 模型[54]，2D 经典 Ising 模型[55]，一维海森堡自旋链模型[56]等等。这些严格解模型也为数值或其它解析的方法求解更复杂的自旋链模型提供了判断依据。下面主要介绍 $S=1/2$ 和 1 的两种自旋链系统。

2.3.1 $S=1/2$ 自旋链模型

对于 $S=1/2$ 的自旋链，每个格点都有一个自旋 $s_i = \sigma_i / 2$ ，其中， σ_i 是 Pauli 矩阵。自旋的三个分量 s^x, s^y, s^z 满足如下对易关系

$$[s^\alpha, s^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s^\gamma, \quad (2.3.1)$$

其中, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 是完全的反对称张量。自旋算符在不同的格点是对易的。只考虑最近邻格点的相互作用的自旋链模型是

$$H = -\sum_i (J_x S_{i+1}^x S_i^x + J_y S_{i+1}^y S_i^y + J_z S_{i+1}^z S_i^z), \quad (2.3.2)$$

这里 J_x , J_y , J_z 是耦合常数。上面的哈密顿量就是 XYZ 模型, 对于这样的系统总是可以用 Bethe Ansatz 方法严格求解。当保留了 xy 平面的旋转对称性, xy 平面的交换系数和 z 轴方向的不同, 即 $J_x = J_y \neq J_z$, 系统就退化到熟悉的 XXZ 模型的哈密顿量。如果 $J_z = J_y = J_x$ 自旋间的相互作用在全空间都是旋转对称的, 这就是著名的 Heisenberg 哈密顿量 XXX 模型。令 $J_{xy} = J_x = J_y$, 做如下变换

$$\begin{aligned} S_i^x &\rightarrow (-1)^i S_i^x; \\ S_i^y &\rightarrow (-1)^i S_i^y; \\ S_i^z &\rightarrow S_i^z, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

将引起耦合系数的改变 $J_{xy} \rightarrow -J_{xy}$, $J_z \rightarrow J_z$ 。忽略耦合系数的符号, 仅考虑 $J_{xy} > 0$ 已足够。当 $J_z = J_{xy}$ 时, 容易发现系统是各向同性的反铁磁链。当 $J_z = -J_{xy}$ 时, 系统是一个各向同性的铁磁链。 $J_z = 0$ 时, 是一个纯的 XY 模型。图 2.2 给出了不同区域随 J_z 的变化。

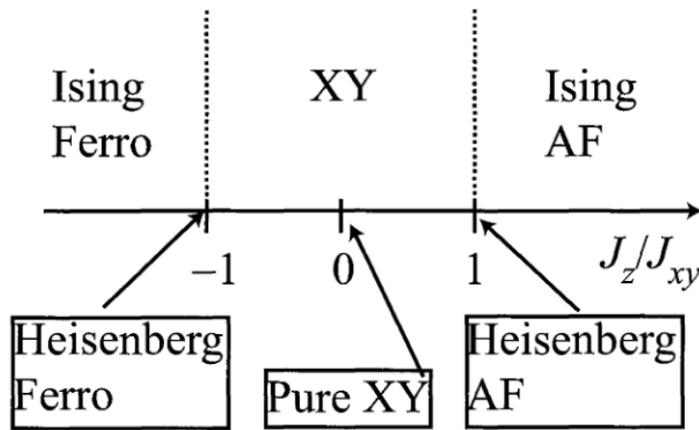


图 2.2 随着 J_z 改变对应的不同自旋链模型

前面提到的模型都是可以用 Bethe Ansatz 方法严格求解的, 对于基态和元激发也可以给出一个很好的结果。基于弦假设, 在热力学极限的情况, 也给出了这些模型在有限温度情况下的特性[57]。

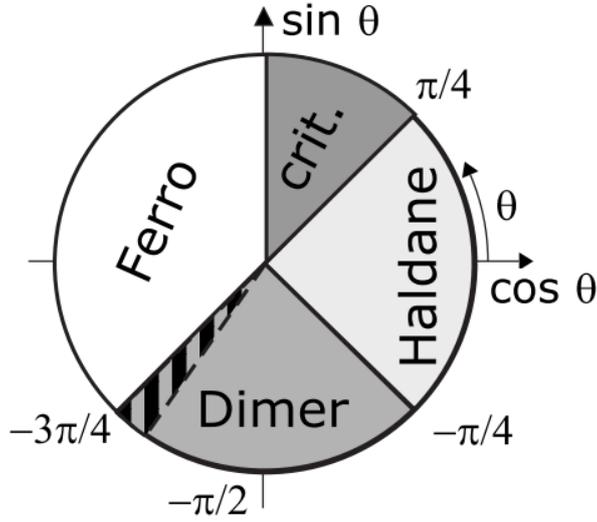


图 2.3 自旋 1 的量子相图

2.3.2 S=1 自旋链模型

对于自旋 1 的系统，自旋有三个分量，比自旋 1/2 的系统要复杂。自旋为 1 系统的哈密顿量的一般形式是

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{j=1}^N \left[J_1 \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_{j+1} + J_2 (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_{j+1})^2 \right] \\
 &= J \sum_{j=1}^N \left[\cos \theta \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_{j+1} + \sin \theta (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_{j+1})^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

其中 $\mathbf{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ 是第 j 个格点上自旋为 1 的算符

$$s^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad s^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.3.5}$$

J_1 和 J_2 是耦合系数， $J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2}$ 和 θ 与 J_1 、 J_2 是一一对应的。系统的基态和激发态的性质可以由角度 θ 确定。系统的基态可以通过 Monte Carlo 方法、精确对角化、级数展开等数值方法求解。对于少个格点的自旋链模型总是可以求解的，选取自旋的 Fock 态作为基矢，对哈密顿量做对角化就可以得到系统的本征态和本征值。系统

(2.3.4) 只有在特殊的一些参数 θ 的取值才有严格解，大部分情况是没有的。图 2.3 给出了 θ 取不同值所对应的不同量子相。在 $-3\pi/4 < \theta < \pi/2$ 的整个区域，基态是一个反铁磁态，其特点是磁化消失， $\bar{M} = \langle \sum_i \bar{S}_i \rangle = 0$ 。其中 $-\pi/4 < \theta < \pi/4$ 区域是 Haldane 相区，此系统的基态是无序态，关联函数指数发散，元激发有一个能隙。在 Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki (AKLT) 点，即 $\tan \theta = 1/3$ 点，已被严格求解，证明有

能隙存在[58]。在 $\theta = \pi/4$ (Uimin-Lai-Sutherland 点[59]) 系统进入一个元激发无能隙的临界相 ($\pi/4 < \theta < \pi/2$), 系统处在三聚化相。这里需要说明 $\theta = \pi/4$ 是一个无穷阶相变。在这一相变点, 系统具有 $SU(3)$ 对称性并且是可积的。在 $\theta = -\pi/4$ 时, 能隙消失[60]。但是在 $\theta < -\pi/4$ 时能隙重新打开, 进入到一个有能隙的二聚化相。由于 Z_2 对称性, 基态是二重简并的自旋单态, 序参量是 dimer-dimer 关联函数。在严格可解点 $\theta = -3\pi/4$ 作为边界标志着系统进入铁磁相, 特点是 $\vec{M} \neq 0$, 并且是一个阶相变。在二聚化相和 $\theta = -3\pi/4$ 之间存在着一个小的自旋向列区域[61]。

第三章 双原子在亚稳态势阱的隧穿

由于冷原子少体实验的准确制备，使得在少体系统中研究隧穿问题成为可能。隧穿理论的两个主要模型：一个是亚稳态势阱，另一个是双势阱。在这两种势阱中研究隧穿已有很长的历史，最新进展包括隧穿的干涉效应以及共振隧穿[2]-[4][62][63]。亚稳态势阱的量子隧穿衰变是早已熟知的量子现象，如核衰变、量子成核等。这些都是单粒子问题。这一章我们主要研究相互作用的双原子体系在亚稳态势阱的隧穿问题。

3.1 模型介绍

对于两个质量为 m 的粒子囚禁在一个亚稳态势阱中的系统，其哈密顿量形式为

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx_i^2} + V(x_i) \right] + g\delta(x_1 - x_2), \quad (3.1.1)$$

这里 m 是粒子的质量， $V(x)$ 的具体形式是 (1.2.1) 式，图 3.1 给出了外势的形状。这里不考虑两个原子在势阱外面的相互作用。如图 3.1 所示，将这样一个外势分成三个区域：势阱 (I)，势垒 (II) 和真空 (III)。边界是依赖于能量的经典隧穿点 x_a 和 x_b ，因此第二个区域的范围是从 x_a 到 x_b ($0 < x_a < x_b$)。这里有两种单粒子态：

(i) 真空区域 (III) 的波函数 $\chi_\varepsilon(x)$ 可以看做在势垒的地方反射，能量为 ε 的平面波，并且在势阱区域以指数衰减。这个区域的能量是连续的。在 WKB 近似下，波函数可以写成

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(x) &= Ck(x)^{-1/2} \cos\left(\int_{x_b}^x k(x')dx' - \pi/4\right), x > x_b \\ \chi_\varepsilon(x) &= \frac{C}{2} k(x)^{-1/2} \exp\left(-\int_x^{x_b} k(x')dx'\right), x_a < x < x_b \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

这里 C 是归一化常数，

$$k(x) = \left[(2m/\hbar^2) |\varepsilon - V(x)| \right]^{1/2}. \quad (3.1.3)$$

对于 $x < x_a$ ， $\chi_\varepsilon(x)$ 不再振荡，而是平滑的衰减到零。在 $x < x_a$ 区域， $\chi_\varepsilon(x)$ 不是一个好的解。

(ii) 势阱区域 (I)，在低能时，可以看做是谐振子势阱。因此势阱波函数 $\phi_n(x)$ ($n=0,1,2,\dots$) 就是能量为 $\hbar\omega_0(n+1/2)$ 的谐振子的波函数，并且在区域 II 有一个尾巴，在区域 III 光滑的消失，其中， ω_0 是势阱底部的谐振频率。势阱的态在区域 III

并不是一个好的解。上面的两种态都不能很好的描述整个区域，但是这两个态可以近似认为是正交的。

同样， $\Psi_0(x_1, x_2)$ 和 $\Psi_{m,\varepsilon}(x_1, x_2)$ 是两个费米子整个系统的状态，与一个原子从区域 I 向区域 III 转变不同。 $\Psi_0(x_1, x_2)$ 是能量为 W_0 的两个粒子在势阱中的波函数。 $\Psi_{m,\varepsilon}(x_1, x_2)$ 是一原子留在势阱的 $\phi_m(x)$ 轨道，另一个原子隧穿出去处在真空态 $\chi_\varepsilon(x)$ ，且与原子没有相互作用，能量为 $W_{m,\varepsilon}$ 的波函数，如图 3.1。因此 $\Psi_0(x_1, x_2)$ 是两个相互作用原子在谐振子势阱中的波函数。在介绍隧穿理论之前，我们首先介绍一下两个相互作用原子在谐振子势阱中的解。

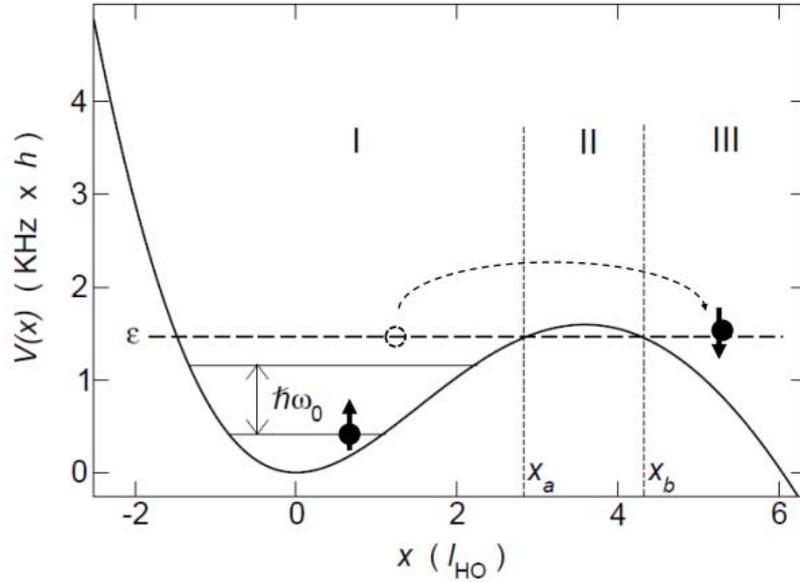


图 3.1 由 (1.2.1) 式给出的势阱 $V(x)$ 。 ε 是共振隧穿能。长度的单位是 $l_{HO} = (\hbar / m\omega_0)^{1/2}$ [24]

3.2 双原子在谐振子势阱中的解

3.2.1 解析解

早在 1998 年 Busch 等人就给出了两个相互作用的超冷原子[9]在一维，二维，三维情况下谐振子势阱中的精确解。谐振子势阱在实验上容易实现，理论上容易求解。在这一节，我们主要介绍一维情况下的解析结果。两个相互作用的粒子在频率为 ω 的谐振子势阱中的哈密顿量形式为

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right] + g\delta(x_1 - x_2), \quad (3.2.1)$$

相互作用强度 g ，可以通过 Feshbach 共振从弱相互作用到强相互作用很大范围内调节。对于上面的两粒子哈密顿量，引入质心和相对坐标

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ x &= x_1 - x_2, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

使得哈密顿量可以分离变量成两部分，质心坐标部分为

$$H_{CM} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{2} M \omega^2 X^2, \quad (3.2.3)$$

相对坐标部分为

$$H_{rel} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 + g\delta(x). \quad (3.2.4)$$

质心坐标部分的哈密顿量就是简单的总质量为 $M=2m$ 的单粒子谐振子方程。它的解在量子力学书上已经给出，其本征态和本征能量分别是

$$\Psi_{CM,n}(X) = \sqrt{\frac{l_c}{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \exp\left(-\frac{1}{2} l_c^2 X^2\right) H_n\left(\frac{-l_c^2 X^2}{2}\right), l_c = \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}, \quad (3.2.5)$$

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar \omega$$

$H_n(x)$ 是 Hermite 多项式。相对坐标部分哈密顿量的外势可以看作质量为 $\mu = m/2$ 的粒子在谐振子势阱加一个 δ 势阱或者势垒中的运动。文献[9]给出了该哈密顿量的精确解，波函数和能级分别是

$$\Psi_{r,j}(x) = \sqrt{\frac{l}{\sqrt{\pi} 2^j j!}} \exp\left(-\frac{1}{2} l^2 x^2\right) H_j\left(\frac{-l^2 x^2}{2}\right), l = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}, \quad (3.2.6)$$

$$\varepsilon_j = \left(\frac{1}{2} + j\right) \hbar \omega, \quad j=1,3,5,\dots$$

$$\varphi_j(x) = A_j \exp\left(-\frac{1}{2} l^2 x^2\right) U\left(-\nu_j, \frac{1}{2}, l^2 x^2\right), \quad (3.2.7)$$

$$\varepsilon_j = \left(\frac{1}{2} + 2\nu_j\right) \hbar \omega, \quad j=0,2,4,\dots$$

A_j 是归一化系数， U 是合流超几何函数， ν_j 是量子数，且满足下面的关系式

$$\Gamma\left(-\nu_j + \frac{1}{2}\right) / \left(-\nu_j\right) + \frac{g}{2} = 0, \quad j=0,2,4,\dots \quad (3.2.8)$$

其中 Γ 为伽马函数。给定一个相互作用强度 g 的值， ν_j 有无数多个解。以上我们可以

看出相对部分的能级由两部分组成，对于偶宇称波函数（即满足粒子交换对称），能级依赖相互作用强度的取值，对于奇宇称波函数（即满足粒子交换反对称），能级不依赖于相互作用的取值。相互作用只对交换对称的波函数有影响。图 3.2 展示了能量随相互作用变化的趋势。

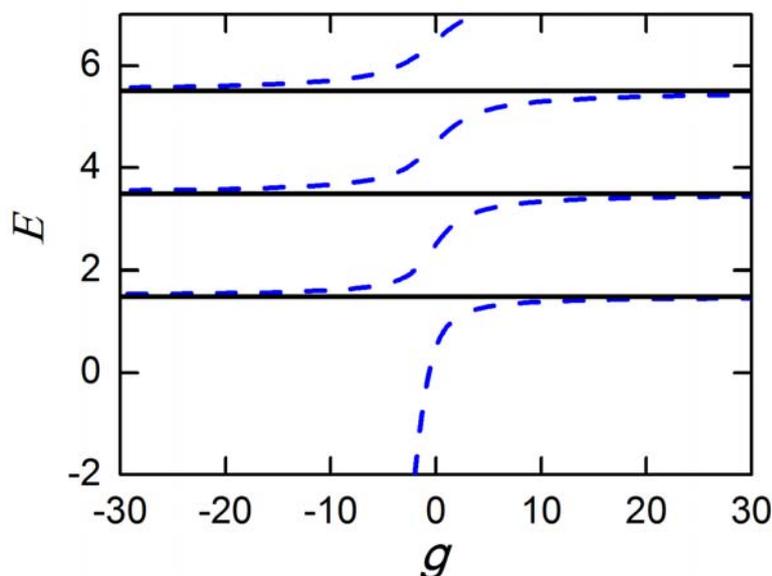


图 3.2 相对坐标部分的能量与相互作用 g 的关系，能量的单位是 $\hbar\omega$ ，相互作用强度 g 的单位是 $\sqrt{\hbar^3\omega/\mu}$ ，黑实线表示相对部分波函数为奇宇称所对应的能量，蓝虚线表示偶宇称波函数对应的能量

3.2.2 变分法

本节我们主要介绍另外一种求解相对部分哈密顿量基态的方法，即变分法。根据变分原理

$$E_{GS} \leq \frac{\langle \psi | H_{rel} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (3.2.9)$$

首先需要确定一个试探波函数。如图 3.3 所示，外势可以由 $x = \pm L$ 分成三个部分。 L 是三个区域的边界，也是一个变分参数。在区域 II ($|x| < L$)，粒子可以同时感受到接触势和谐振子势，由于在 $x = 0$ 附近，接触势占主导，也就是说可以忽略谐振子势阱的影响，因此这个区域的波函数可以由平面波叠加来描述。在区域 I 和 III ($|x| > L$)，粒子只能感受到谐振子势阱，该区域的波函数可以设成简单的包含参数 α 的高斯波包形式。 α 可以控制 I, III 区域波函数的衰减。试探波函数可以写成下面的形式

$$\psi = \begin{cases} \psi_I = Ae^{-\alpha x^2} & -\infty < x < -L, \\ \psi_{II} = (Be^{-ikx} + Ce^{ikx})\Theta(x) \\ + (De^{ikx} + Ee^{-ikx})\Theta(-x) & -L < x < L, \\ \psi_{III} = Fe^{-\alpha x^2} & L < x < \infty, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

其中 $\Theta(x)$ 是单位阶跃函数

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

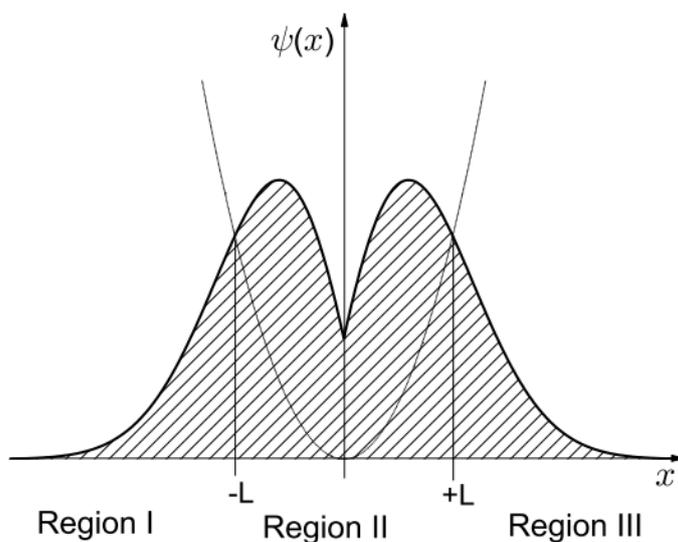


图 3.3 外势以及两个费米子系统相对部分基态的试探波函数 $\psi(x)$ 。波函数及其一阶导数在边界 $x = \pm L$ 处都是连续的

下面将不同区域的波函数通过边界条件连接起来。首先处理区域 II 的波函数。在 $x=0$ 的地方波函数连续可以给出下面的系数关系

$$B + C = D + E.$$

对本征方程 $\hat{H}\psi_{II} = E\psi_{II}$ 从负无穷小到正无穷小积分，可以得到在 $x=0$ 的地方，波函数一阶导数不连续的阶跃条件

$$ik(-B + C - D + E) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \times 2c(B + C),$$

这里 $c=g/2$ 。由于外势是轴对称的，基态的波函数必须是空间对称的，且没有节点，因此可以得到

$$B = D, C = E, A = F. \quad (3.2.12)$$

根据上面三个方程，可以得到

$$B = \frac{ik - \frac{2\mu c}{\hbar^2}}{ik + \frac{2\mu c}{\hbar^2}} C. \quad (3.2.13)$$

在 $x=-L$ 或者 $x=L$, 通过波函数连续可以得到

$$Ae^{-\alpha L^2} = C \left(\frac{ik - \frac{2\mu c}{\hbar^2}}{ik + \frac{2\mu c}{\hbar^2}} e^{-ikL} + e^{ikL} \right), \quad (3.2.14)$$

一阶导数连续可以得到

$$2\alpha L e^{-\alpha L^2} A = C i k \left(\frac{ik - \frac{2\mu c}{\hbar^2}}{ik + \frac{2\mu c}{\hbar^2}} e^{-ikL} - e^{ikL} \right). \quad (3.2.15)$$

结合方程 (3.2.14) 和 (3.2.15) 可以得到一个限制条件

$$e^{i2kL} = \frac{k + i \frac{2\mu}{\hbar^2} c}{k - i \frac{2\mu}{\hbar^2} c} \frac{k + i2L\alpha}{k - i2L\alpha}. \quad (3.2.16)$$

这个公式和 Bethe ansatz 方程有相同的作用。但是它与边界条件（周期性边界或者开边界条件）不相关。

根据上面的限制条件，我们可以得到下面的归一化的基态波函数

$$\psi = \begin{cases} \psi_I = \psi_{II}(-L)e^{-\alpha x^2} e^{\alpha L^2}, & -\infty < x < -L, \\ \psi_{II} = \cos(\theta - kx)\Theta(x) \\ + \cos(\theta + kx)\Theta(-x), & -L < x < L, \\ \psi_{III} = \psi_{II}(L)e^{-\alpha x^2} e^{\alpha L^2}, & L < x < \infty, \end{cases} \quad (3.2.17)$$

这里 θ 满足下面的关系式

$$\theta = \arctan \frac{2\mu c}{k\hbar^2}. \quad (3.2.18)$$

这个试探波函数都是由简单的初始函数构成的，让我们可以很直观的看到波函数的分布情况。

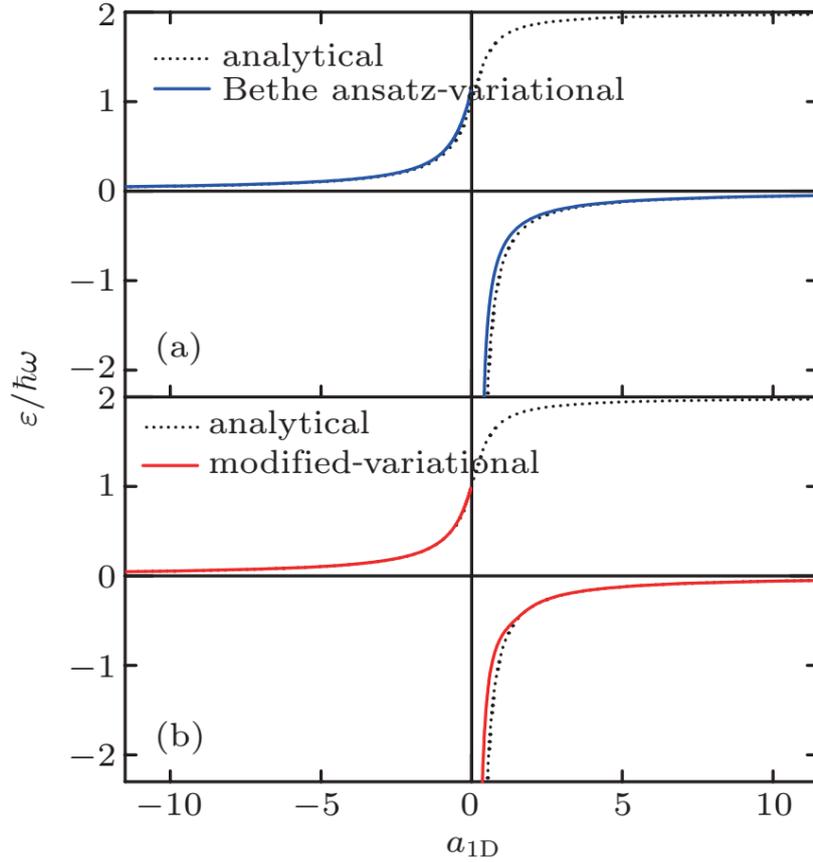


图 3.4 囚禁在角频率为 ω 的谐振子势阱中两个全同费米子相对部分基态的能量。黑色的点线表示解析的结果，(a)蓝色的实线表示将 Bethe ansatz 方程作为边界条件通过变分法得到的基态的能量。(b)红色的实线表示将波函数的连续性作为边界条件得到的基态的能量

下面我们介绍如何通过变分法得到基态能量。首先选择 α 和 L 作为参数，将哈密顿量作用到试探波函数上面，求得能量表达式。我们的目的是找到能量的最小值。根据变分原理，我们需要计算波函数的归一化因子

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle = & \sqrt{\frac{\pi}{8\alpha}} \frac{1 + \cos(2kL - 2\theta)}{e^{-2\alpha L^2}} [1 - \text{erf}(\sqrt{2\alpha}L)] \\ & + \frac{1}{2k} [\sin(2kL - 2\theta) + \sin 2\theta + 2kL], \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

这里误差函数 $\text{erf}(x)$ 的定义是

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.2.20)$$

然后计算 H_{rel} 作用到试探波函数 (3.2.17) 上的期望值

$$\begin{aligned}
\langle \psi | H_{rel} | \psi \rangle &= [1 + \cos(2kL - 2\theta)] (4\alpha^2 \hbar^2 + \mu^2 \omega^2) \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{1 - \text{erf}(2\alpha L)}{16\mu\alpha e^{-2\alpha L^2}} + \frac{L}{8\mu\alpha} \right) \\
&\quad - \frac{\hbar^2 k}{4\mu} [\sin(2kL - 2\theta) + \sin(2\theta)] + \frac{\hbar^2 k^2 L}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 L^3}{6} + c(1 + \cos 2\theta) \\
&\quad + \frac{\mu\omega^2}{8k^3} [(2k^2 L^2 - 1)\sin(2kL - 2\theta) + 2kL \cos(2kL - 2\theta) - \sin 2\theta].
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

为了说明我们的结果是合理的，下面我们考虑极限情况： $L \rightarrow 0$ ， $c \rightarrow 0$ 。在极限情况实际上就是简单谐振子势阱的结果。根据 (3.2.1) 式，我们得到

$$\lim_{L, c \rightarrow 0} \frac{\langle \psi | H_{rel} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\hbar^2 \alpha}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{8\alpha}. \tag{3.2.22}$$

能量的最小值可以通过对 α 求一阶导数，并令其等于零，得到能量最小值时 α 的取值。我们将其记作 α^* ， $\alpha^* = \mu\omega / 2\hbar$ 。将 α^* 代入能量表达式，即可得到能量的最小值

$$\lim_{L, c \rightarrow 0} \frac{\langle \psi | H_{rel} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \Big|_{\alpha=\alpha^*} = \frac{1}{2} \hbar\omega. \tag{3.2.23}$$

这正是谐振子势阱的基态能量。

对于该系统，试探波函数的限制条件 (3.2.16) 可以化简为

$$\alpha = \frac{k^2 \hbar^2 \tan(kL) - 2c\mu k}{2\hbar^2 Lk + 4\mu cL \tan(kL)}. \tag{3.2.24}$$

将其带入到 (3.2.9) 式中，给定相互作用强度 c 的取值，通过数值方法，取遍所有 L 和 k 的值，找到能量 E 的最小值。我们把最小值处的参数取值分别记作 L^* 和 k^* 。通过变分法我们可以找到两费米子系统的基态能量 ε 随一维散射长度 a_{1D} 的变化关系，如图 3.4 (b) 所示。这里

$$a_{1D} = -\frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\hbar^3 \omega}{\mu}}. \tag{3.2.25}$$

我们结合变分法和波函数及其一阶导数的连续性条件得到的基态能量 (图 3.4(b) 红实线) 和精确结果 (3.1.8) (图 3.4 黑色的点线) 非常吻合。图 3.4(a) 的蓝实线，展示了

文献[64]的结果，文献[64]并没有考虑边界处波函数的连续性，而是用 Bethe ansatz 方程作为边界条件，显然这样的结果没有我们得到的结果吻合的好。

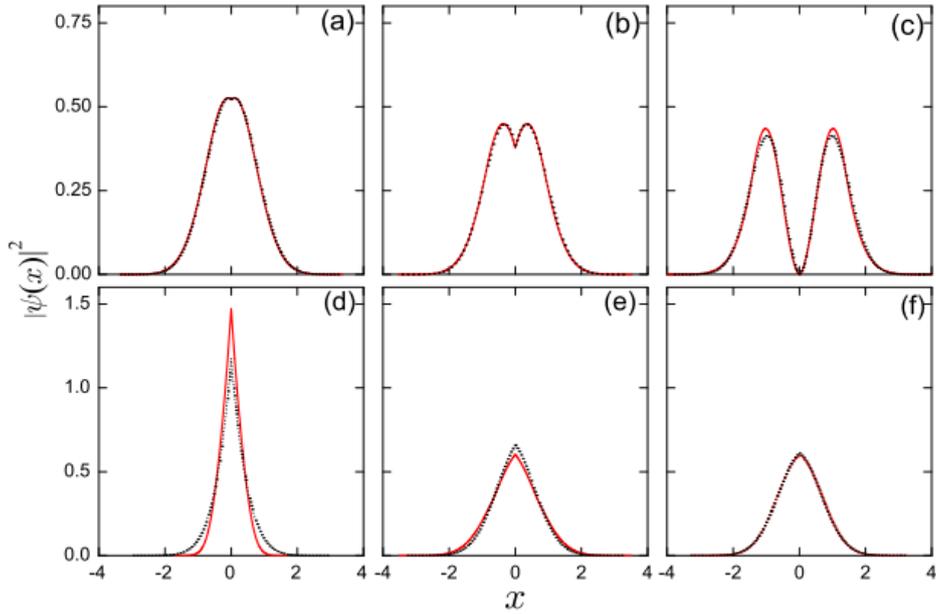


图 3.5 相对部分基态波函数的密度分布。粒子间相互作用的单位是 $\sqrt{\hbar^3 \omega / \mu}$ 。(a) $c=0.05$, $a_{1D}=-10$; (b) $c=0.25$, $a_{1D}=-2$; (c) $c=20$, $a_{1D}=-0.025$; (d) $c=-0.5$, $a_{1D}=1$; (e) $c=-0.1$, $a_{1D}=5$; (f) $c=-0.05$, $a_{1D}=10$;红色的实线是解析的结果，黑色的点线是变分法的结果。

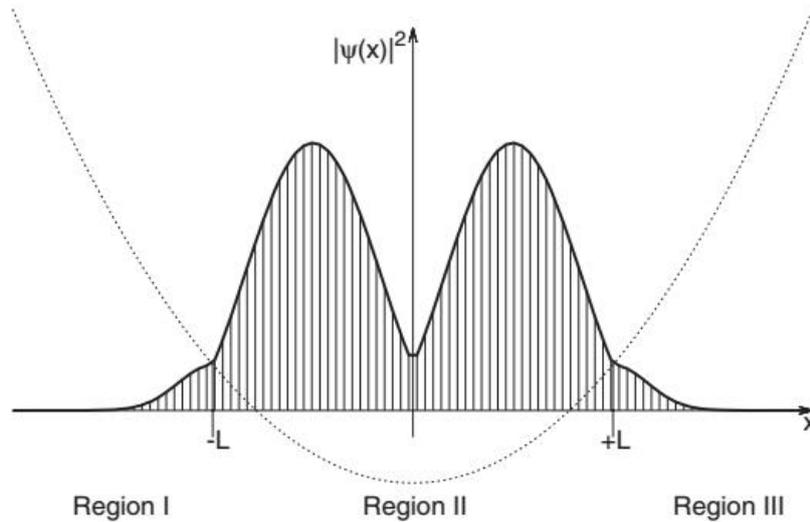


图 3.6 外势以及两个费米子系统相对部分基态的试探波函数 $\psi(x)$ 。波函数的一阶导数在边界 $x = \pm L$ 处是不连续的[64]

将 L^* 和 k^* 代入 (3.2.24) 式中，得到相应的 α^* 。对于给定的每个相互作用强度 c ,

试探波函数是由 L^* 和 k^* 和 α^* 这三个参数确定。图 3.5 给出了整个相互作用区域，相对部分试探波函数的密度分布。从图中我们发现，变分法的结果和精确解的结果 (3.1.7) 吻合的很好。图 3.5(a-c) 给出了随着排斥相互作用的增强，波函数密度分布的变化规律。图 3.5(c) 已经表现出了费米化的特点。图 3.5(d-f) 给出了随着吸引相互作用减弱，波函数密度分布的变化规律。在吸引相互作用区域，基态的原子形成分子态，密度主要集中在 $x=0$ 地方。

这里我们需要说明的是，在文献[64]中，由于试探波函数的一阶导数是不连续的，因此并不能给出一个物理的试探波函数，如图 3.6 所示，在 $x = \pm L$ 的地方一阶导数明显是不连续的，与精确解的结果差别很大。

3.3 准粒子隧穿理论

根据隧穿理论，量子隧穿过程可以看做是从 $\Psi_0(x_1, x_2)$ 到末态 $\Psi_{m,\varepsilon}(x_1, x_2)$ 的跃迁过程，其跃迁矩阵元为 $M_{m,\varepsilon}$ ，当能量守恒时， $W_0 \approx W_{m,\varepsilon}$ ，

$$M_{m,\varepsilon} = -\hbar^2 J_{m,\varepsilon} / 2m, \quad (3.3.1)$$

这里 $J_{m,\varepsilon}$ 正比于几率流密度算符的矩阵元，

$$J_{m,\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \delta(x_i - x_{bar}) \times \left[\Psi_0^* \frac{d\Psi_{m,\varepsilon}}{dx_i} - \Psi_{m,\varepsilon} \frac{d\Psi_0^*}{dx_i} \right],$$

x_{bar} 是势垒区域 II 的任意一点。衰变率可以通过量子跃迁的费米黄金规则估算，

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{m,\varepsilon} |M_{m,\varepsilon}|^2 \delta(W_0 - W_{m,\varepsilon}). \quad (3.3.2)$$

对于两个无相互作用的粒子处于初态 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 的情况是很容易计算的。势阱的初态 Ψ_0 就是 $n=0$ 和 $n=1$ 的史莱特行列式，

$$\Psi_{\uparrow\uparrow}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_0(x_1)\phi_1(x_2) - \phi_0(x_2)\phi_1(x_1)]. \quad (3.3.3)$$

所有可能的末态中，几率最大的一种是 $n=0$ ， $\varepsilon=3\hbar\omega/2$ 的组合

$$\Psi_{0,\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_0(x_1)\chi_\varepsilon(x_2) - \phi_0(x_2)\chi_\varepsilon(x_1)]. \quad (3.3.4)$$

通过计算，得到跃迁矩阵元为

$$J_{0,3\hbar\omega/2} = \left[\phi_0^* \frac{d\chi_{m,\varepsilon}}{dx} - \chi_{m,\varepsilon} \frac{d\phi_0^*}{dx} \right]_{x=x_{bar}}^{\varepsilon=3\hbar\omega/2} \quad (3.3.5)$$

显然，上式是势阱的高占据轨道态 $\phi_1(x)$ 和真空态 $\chi_{\varepsilon=3\hbar\omega/2}(x)$ 之间的共振隧穿，单个粒子隧穿的结果。剩下原子处在势阱的基态 $\phi_0(x)$ 。原则上，除了 $\Psi_{0,\varepsilon=3\hbar\omega/2}$ ，这里应该还有其它的末态，例如， $n=1$ ， $\varepsilon=\hbar\omega/2$ 。然而，由于波函数的尾巴在势垒内部以能量的指数衰减，因此对应的矩阵元非常小，可以忽略不计。

对于两个可区分费米子的情况 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 的结果不再是平庸的了。 $\psi_{\uparrow\downarrow}$ 不能写成简单的史莱特行列式的形式。在上一节，我们已经给出了质心坐标部分波函数 Ψ_{CM} 和相对部分波函数 Ψ_r 的具体形式。这里可以简单记为

$$\psi_{\uparrow\downarrow} = \Psi_{CM} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \Psi_r(x_1 - x_2) \quad (3.3.6)$$

末态仍然是一个自旋单态，一个原子在势阱最低的能态，另一个在真空态 χ_ε

$$\psi_{0,\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_0(x_1)\chi_\varepsilon(x_2) + \phi_0(x_2)\chi_\varepsilon(x_1)] \quad (3.3.7)$$

这里的共振能量 ε 由能量守恒来确定，与相互作用强度 g 有关。

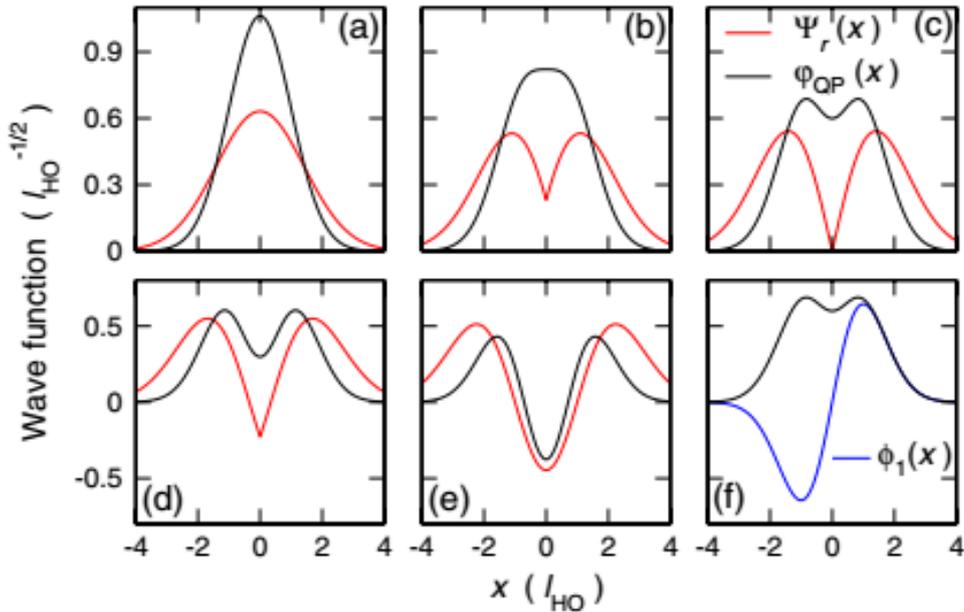


图 3.7 准粒子的波函数 $\phi_{QP}(x)$ (黑线) 和相对坐标部分波函数 $\Psi_r(x)$ (红线) 随 g 的变化。(a) $g=0^+$ 。(b) $g/(2^{1/2}\hbar\omega_0 l_{HO})=3.14$ 。(c) $g=\infty$ 。(d) $g/(2^{1/2}\hbar\omega_0 l_{HO})=-3.77$ 。(e) $g=0^-$ 。(f) 谐振子势阱的第一激发态 (绿线) 和准粒子波函数在相互作用强度为 $g=\infty$ 时的比较[24]

将 (3.3.3) 和 (3.3.4) 式代入到 (3.3.2) 式可以得到以下关于跃迁矩阵元的重要结果

$$J_{0,\varepsilon} = \left[\varphi_{QP}^* \frac{d\chi_\varepsilon}{dx} - \chi_\varepsilon \frac{d\varphi_{QP}^*}{dx} \right]_{x=x_{bar}}, \quad (3.3.8)$$

φ_{QP} 是准粒子的波函数，其定义为

$$\varphi_{QP}(x) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_0(x') \Psi_{CM} \left(\frac{x'+x}{2} \right) \Psi_r(x'-x). \quad (3.3.9)$$

比较 (3.3.5) 和 (3.3.8) 式可以看出，在有相互作用时， $J_{0,\varepsilon}$ 可以认为是真空态 $\chi_\varepsilon(x)$ 和准粒子态 $\varphi_{QP}(x)$ 的共振隧穿。无相互作用的情况 $|\uparrow\uparrow\rangle$ ，准粒子态 φ_{QP} 可以认为是高占据轨道态 $\phi_1(x)$ 。

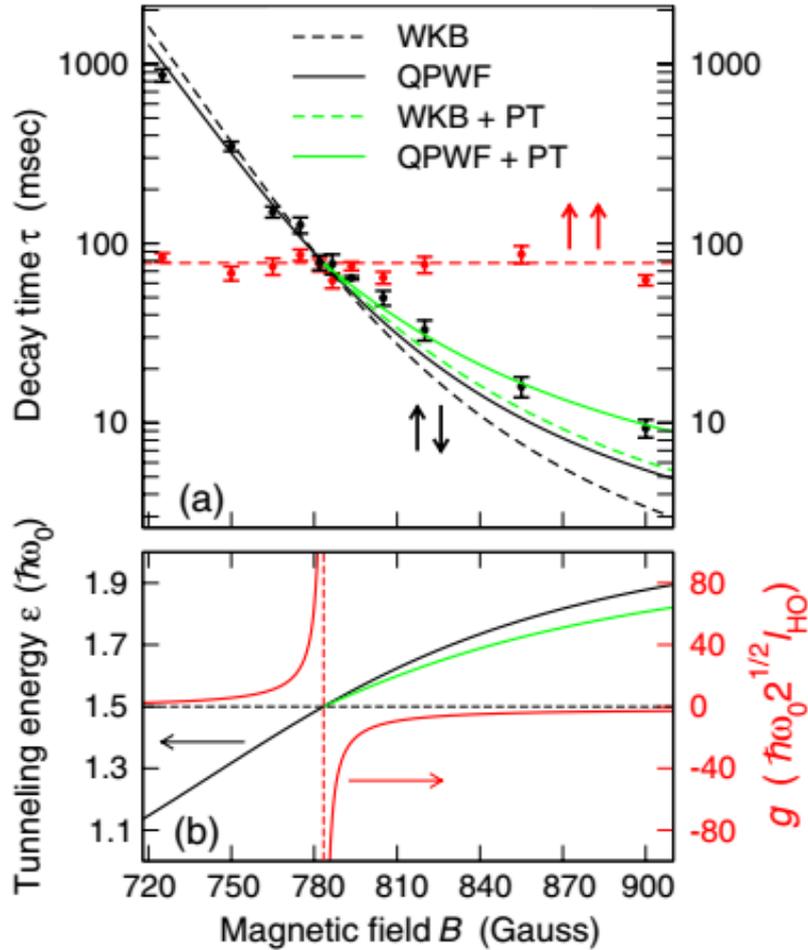


图 3.8 (a) 衰减时间随磁场的变化。黑色的虚线和实线分别是 WKB (τ_0) 和考虑准粒子波动方程的修正的结果。绿色的表示通过微扰论考虑的非谐项贡献的结果。(b) 相互作用强度和隧穿能量随磁场的变化[24]

在相互作用趋于无穷时， $g = \infty$ ， $\Psi_r(x)$ 为费米化的波函数，如图 3.7 红 (灰)

线。从图 3.7(a)-(e)可以发现, 准粒子波函数 $\varphi_{QP}(x)$ 与相对坐标波函数是不同的。 τ 的大小依赖于 $\varphi_{QP}(x)$ 在势垒的尾巴 [(3.3.8) 式]。由于准粒子的波函数的规范 $A_{QP} = \int dx |\varphi_{QP}(x)|^2$ 随着相互作用强度明显变化。 A_{QP} 是单调递减的, 在 $1/g = +\infty$ 时, $A_{QP} = 2$, 在 $1/g = -\infty$ 时, $A_{QP} = 1/2$, 在 $1/g = 0$ 时, $A_{QP} = 1$ 。因此衰减率 $1/\tau$ 加一个修正, 可以写成

$$\frac{1}{\tau} \cong \frac{A_{QP}}{\tau_0}, \quad (3.3.10)$$

这里只考虑一个末态, 共振能量 ε 由相互作用确定, A_{QP} 也是依赖于能量的。图 3.8 给出了单粒子的衰减时间 τ_0 随磁场的变化。这里的外加磁场是用来调节相互作用强度的。s 波散射长度与外磁场的关系如下:

$$a_{3D} = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right), \quad (3.3.11)$$

其中, a_{bg} 是远离共振时两原子 s 波散射长度, 也称为背景散射长度, B_0 是发生共振时外磁场的强度, Δ 代表共振区域的宽度。在实验[2]中, 对于 ${}^6\text{Li}$ 原子参数的选取为 $B_0 = 823\text{G}$, $\Delta \approx 300\text{G}$, $a_{bg} = -2000a_0$, a_0 是玻尔半径。

通过 WKB 近似可以得到

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\varepsilon}{2\pi\hbar} \exp\left(-2\int_{x_a}^{x_b} k(x) dx\right). \quad (3.3.12)$$

τ_0 仅仅依赖于隧穿能量 ε 和外势 $V(x)$ 。如图 3.8 黑色实线所示加上修正以后明显与实验的结果符合的更好。由于势阱部分并不是一个好的谐振子势阱, 在求解势阱部分的波函数时可以通过把非谐部分看做微扰, 来计算其波函数和能量, 得到一个更准确的准粒子波函数, 进而给 A_{QP} 一个修正, 使隧穿率的计算结果更准确, 隧穿的时间依赖于相互作用强度, 如图 3.8 绿线所示。隧穿的准粒子理论给出一个很好地解释少体冷原子的现象。

3.4 小结

这一章我们主要介绍了亚稳态势阱的隧穿理论和衰减率的计算, 并且通过变分法给出两个全同的有相互作用的费米子在谐振子势阱的基态能量以及基态波函数。能量与精确结果吻合很好。与精确解相比, 波函数的形式更为直观。与文献[64]相比

我们给出了一个更准确的试探波函数，这里我们主要考虑了波函数一阶的连续性。对于多个相互作用的费米子在谐振子中的情况是没有精确解的，谐振子又是实验中常见的外势。这里我们也希望用变分法可以实现求解多个粒子的基态波函数以及能量。

第四章 双原子在双阱中的隧穿动力学

第三章，我们主要介绍了亚稳势阱的隧穿，这一章我们主要研究了相互作用原子在双阱中的隧穿问题。双阱是研究超导比特 Josephson 振荡[65]和玻色爱因斯坦凝聚中自囚禁现象[66]-[68]的典型模型。受到实验的启发，对于双阱的研究，目前大部分的工作都是基于双模近似[69]，或者是数值求解[70]-[76]，并没有严格解的结果。下面我们主要介绍双阱中的 Bethe ansatz 严格解。在严格解的基础上我们研究其隧穿动力学问题。

4.1 N 个原子的严格解

我们考虑 N 个质量为 m 的玻色子囚禁在中间加 δ 势垒的一维无限深方势阱的模型。原子间的相互作用通过 s 波散射长度来调节。系统的哈密顿量可以写作

$$H = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + d\delta(x_i) + V(x_i) \right] + g \sum_{i<j}^N \delta(x_i - x_j), \quad (4.1.1)$$

g 是相互作用强度， $d>0$ 是 δ 势垒的强度，无限深方势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{L}{2} \\ \infty & |x| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

可以等价成开边界条件

$$\Psi\left(x_i = \pm \frac{L}{2}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1.2)$$

$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是哈密顿量 H 的本征态。系统在没有 δ 势垒的情况下，即 $d=0$ 时，就退化到开边界条件的 Lieb-Liniger 模型[77]，在无相互作用的情况下 $g=0$ ，就转换为单粒子问题。由于系统是反射对称的，这里我们定义宇称算符 $P\Psi(x_1, x_2, \dots) = \Psi(-x_1, -x_2, \dots)$ 。因此我们可以将本征态分成偶宇称 $P\Psi = \Psi$ 和奇宇称 $P\Psi = -\Psi$ 两部分。这里我们只能得到奇宇称部分的严格解，主要原因是两个粒子同时与 δ 势垒散射不在我们的考虑范围之内，正如三体相互作用在 Lieb-Liniger 模型中是被忽略的一样。 δ 势垒的添加使得系统变得不平凡，文献[75]已经将少数粒子系统的基态性质在 Tonks-Girardeau 极限情况用 Bose-Fermi 映射，在有限相互作用

用强度下用精确对角化的方法进行了研究。这里我们根据 Bethe 假设和适当的波函数连接条件给出一个解析的结果

波函数可以由 Bethe 假设给出，形式如下

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{n=0}^N \sum_{Q, P} \sum_{\epsilon_p = \pm 1} \theta(x_{Q_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_N}) \times A_n(Q, \epsilon_p P) \exp\left(i \sum_{l=1}^N \epsilon_{P_l} k_{P_l} x_{Q_l}\right), \quad (4.1.3)$$

这里 $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ 和 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是 $(1, 2, \dots, N)$ 的两个排序。对于坐标的排序，我们假设 n 个坐标是小于 0 的，剩下的是大于 0 的，即 $(x_{Q_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_n} < 0 < x_{Q_{n+1}} < \dots < x_{Q_N})$ 。也就是说 n 个原子在 δ 势垒的左边， $N-n$ 个原子在势垒的右边。我们用下标 n 来标记这一块 (block) 区域。对于 $N=2$ 的情况系统的整个区域可看做是一个正方形，对于 $N=3$ 的情况是一个立方体。(3.1.3) 式中对 n 的求和包含所有可能的 $N+1$ 个块。 ϵ_p 表示粒子向右运动 ($\epsilon_p = +1$) 或向左运动 ($\epsilon_p = -1$)，在 δ 势垒处粒子发生反射。对于玻色子，波函数是交换对称的

$$\Psi(\dots x_i, \dots x_j \dots) = \Psi(\dots x_j, \dots x_i \dots), \quad (4.1.4)$$

这意味着

$$A_n(Q, \epsilon_p P) = A_n(Q', \epsilon_p P). \quad (4.1.5)$$

因此对于固定的 n ，所有局域排序 $Q' = (Q'_1, Q'_2, Q'_3, \dots, Q'_N)$ 的系数都相等。在这一块区域，我们注意到开边界条件对于左边界和右边界是不同的，在左阱的粒子只能感受到左边的边界条件

$$\Psi\left(x_{Q_i} = -\frac{L}{2}\right) = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.6)$$

在右阱的粒子只能感受到右边的边界条件

$$\Psi\left(x_{Q_i} = \frac{L}{2}\right) = 0, i = n+1, \dots, N. \quad (4.1.7)$$

将波函数代入到上面的边界条件，我们可以得到反射矩阵 $R(P_1)$

$$R(P_1) = \frac{A_n(Q, -P_1, \dots, \epsilon_{P_N} P_N)}{A_n(Q, P_1, \dots, \epsilon_{P_N} P_N)} = -\exp(-ik_{P_1} L), \quad (4.1.8)$$

和 $R(P_N)$

$$R(P_N) = \frac{A_n(Q, \epsilon_{P_1} P_1, \dots, -P_N)}{A_n(Q, \epsilon_{P_1} P_1, \dots, P_N)} = -\exp(ik_{P_N} L). \quad (4.1.9)$$

这里有两种特殊情况:所有的粒子都在左阱或者都在右阱,这时就只有一种边界条件 (4.1.8) 或者 (4.1.9), 也就是说对于 $n=0$ 或者 $n=N$ 的块区域只有一个反射矩阵 $R(P_N)$ 或者 $R(P_1)$ 。通过 (4.1.8), (4.1.9) 式, 我们发现只有最右边或者最左边的粒子才能在边界上反射, 得到一个相位。

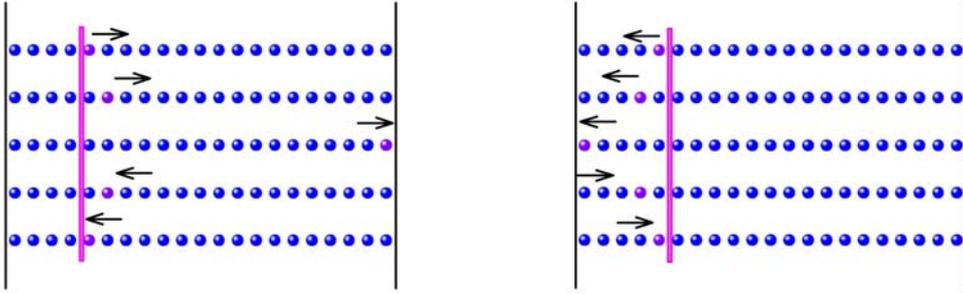


图 4.1, 左图代表第 n 个粒子在块区域 $n-1$ 与右边邻近粒子依次散射的过程, 右图代表第 n 个粒子在块区域 n 与左边邻近粒子依次散射的过程

下面我们讨论两个粒子的散射。假设 x_i 和 x_j 是相邻两个粒子的坐标并且位于双阱的同一侧 (不同阱的两个粒子不能发生散射)。由于粒子间的相互作用是 δ 相互作用, 波函数相对坐标的一阶导数不连续

$$\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_i=x_j=0} \right] - \frac{m}{\hbar^2} g \Psi \Big|_{x_i=x_j=0} = 0, \quad (4.1.10)$$

上式可以连接同一个块区域的不同子区域。在每一个块区域都有 $N(N-1)/2$ 个这样的方程。(4.1.10) 式在不同的块区域都是等价的。一个特殊的例子是 $N=2$: 这样的方程只有一个, 分别在 $n=0$ 或者 $n=2$ 的块区域, 在 $n=1$ 这个块区域则没有粒子间的碰撞。将波函数代入 (4.1.9) 式, 我们可以得到描述两个粒子碰撞的散射矩阵 $S_{\epsilon_{P_i}, \epsilon_{P_j}, P_j}$

$$S_{\epsilon_{P_i}, \epsilon_{P_j}, P_j} = \frac{A_n(Q, \dots, \epsilon_{P_j} P_j, \epsilon_{P_i} P_i, \dots)}{A_n(Q, \dots, \epsilon_{P_i} P_i, \epsilon_{P_j} P_j, \dots)} = \frac{\epsilon_{P_i} k_{P_i} - \epsilon_{P_j} k_{P_j} - i \frac{m}{\hbar^2} g}{\epsilon_{P_i} k_{P_i} - \epsilon_{P_j} k_{P_j} + i \frac{m}{\hbar^2} g}. \quad (4.1.11)$$

矩阵 $R(P_1)$, $R(P_N)$ 和 $S_{\epsilon_{P_i}, \epsilon_{P_j}, P_j}$ 与开边界 Lieb-Liniger 模型的定义是一样的。上面我们只研究了固定一个块区域的一些性质。与 Lieb-Liniger 模型比较, 这里少了一些

散射矩阵和反射矩阵，例如在块区域 n ，这里没有第 n 和第 $n+1$ 个粒子的散射矩阵。这使得我们现在还不能得到 Bethe ansatz 方程。接下来我们要给出不同块区域间的连接条件。这个条件对于给出此系统的精确解起到很关键的作用。

通过对方程 (4.1.1) 从 $x_{Q_n} = 0_-$ 到 $x_{Q_n} = 0_+$ 积分，我们可以得到在 $x_{Q_n} = 0$ 的阶跃条件。该条件可以连接块区域 $n-1$ 和 n ，

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_{Q_n}} \Big|_{x_{Q_n}=0_+} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_{Q_n}} \Big|_{x_{Q_n}=0_-} \right] - \frac{2m}{\hbar^2} d \Psi \Big|_{x_{Q_n}=0} = 0. \quad (4.1.12)$$

该式描述了第 n 个粒子从右阱跳到左阱的过程。将波函数代入到上式，我们就可以得到下面的关系式

$$\begin{aligned} & \left(ik_{P_n} - \frac{m}{\hbar^2} d \right) A_{n-1}(Q, \dots, P_n, \dots) - \left(ik_{P_n} + \frac{m}{\hbar^2} d \right) A_{n-1}(Q, \dots, -P_n, \dots) \\ & - \left(ik_{P_n} + \frac{m}{\hbar^2} d \right) A_n(Q, \dots, P_n, \dots) + \left(ik_{P_n} - \frac{m}{\hbar^2} d \right) A_n(Q, \dots, -P_n, \dots) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

这个式子看上去很复杂，实际上就是块区域 $n-1$ 和 n 中四个系数的一个关系式。通过前面的分析，我们知道，使第 n 个粒子的动量改变方向，也就是反号是可以通过散射结合反射实现的。比如，在块区域 $n-1$ ，要想使第 n 个粒子的动量反号，首先应该和右边最邻近的粒子依次散射 $N-n$ 次，直到没有粒子可以散射到达最右端，然后和边界反射改变符号，再向左边依次散射，回到原先的位置。这样的一系列散射就会使 P_n 的符号改变，如图 4.1 左图。我们用矩阵 $S_{\epsilon_{P_i}, \epsilon_{P_j}, P_j}$ 和 $R(P_N)$ 就可以得到在块区域 $n-1$ 改变 P_n 符号的两个系数 A 的比值为

$$\begin{aligned} R_{n-1}(P_n) &= \frac{A_{n-1}(Q, \dots, -P_n, \dots)}{A_{n-1}(Q, \dots, P_n, \dots)} \\ &= -e^{ik_{P_n} L} \prod_{i=1}^{N-n} \frac{k_{P_{n+i}} - k_{P_n} + i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_{P_{n+i}} - k_{P_n} - i \frac{m}{\hbar^2} g} \times \frac{k_{P_{n+i}} + k_{P_n} - i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_{P_{n+i}} + k_{P_n} + i \frac{m}{\hbar^2} g}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

注意当 $n=N$ 时 $R_{n-1}(P_n) = R(P_N)$ 。用同样的方式，可以改变在块区域 n 中第 n 个粒子动量的符号，要想使第 n 个粒子的动量反号，首先应该和左边最邻近的粒子依次，达最右边，然后在边界 $-L/2$ 反射改变符号，再向右边依次散射，回到原先的位置。在块区域 n 改变 P_n 符号的两个系数 A 的比值为

$$\begin{aligned}
 R_n(P_n) &= \frac{A_n(Q, \dots, -P_n, \dots)}{A_n(Q, \dots, P_n, \dots)} \\
 &= -e^{-ik_{P_n}L} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{k_{P_n} - k_{P_{n-i}} + i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_{P_n} - k_{P_{n-i}} - i \frac{m}{\hbar^2} g} \times \frac{k_{P_n} + k_{P_{n-i}} + i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_{P_n} + k_{P_{n-i}} - i \frac{m}{\hbar^2} g}. \quad (4.1.15)
 \end{aligned}$$

同样当 $n=1$ 时 $R_n(P_n) = R(P_1)$ 。在方程 (4.1.13) 中，我们利用 (4.1.14) (4.1.15) 将含有 $-P_n$ 的系数 A 用含 P_n 的系数替代，得到第 n 个粒子和 δ 势垒的散射矩阵

$$S_{d, P_n}(n) = \frac{A_n(Q, \dots, P_n, \dots)}{A_{n-1}(Q, \dots, P_n, \dots)} = \frac{ik_{P_n}(1 - R_{n-1}(P_n)) - \frac{m}{\hbar^2} d(1 + R_{n-1}(P_n))}{ik_{P_n}(1 - R_n(P_n)) + \frac{m}{\hbar^2} d(1 + R_n(P_n))}, \quad (4.1.16)$$

该散射矩阵将粒子从块区域 $n-1$ 散射到 n 。其逆散射过程可以定义为 $S_{P_n, d}(n) = 1/S_{d, P_n}(n)$ 。也就是粒子从块区域 n 跳到 $n-1$ 。 $S_{d, P_n}(n)$ 括号中的指标 n 表示排序 P 中 P_n 的位置。通过波函数在 $x_{Q_n} = 0$ 的连续性条件 $\Psi|_{x_{Q_n}=0_+} = \Psi|_{x_{Q_n}=0_-}$ ，我们可以得到另一个第 n 个粒子和 δ 势垒的散射矩阵

$$S_{d, P_n}(n) = \frac{1 + R_{n-1}(P_n)}{1 + R_n(P_n)}. \quad (4.1.17)$$

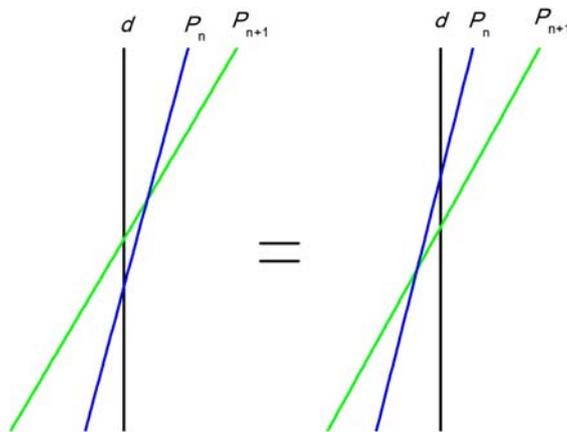


图 4.2 描述了两个粒子和 δ 势垒的两种散射过程，黑线 d 代表 δ 势垒，蓝线和绿线分别分别代表两个粒子。每一个交点则表示一次散射。散射过程是从上到下

结合 (4.1.16) 和 (4.1.17) 我们得到存在势垒时准动量 $\{k_j\}$ 满足的 BA 类型的方程

$$ik_{P_n} \left(\frac{1 - R_{n-1}(P_n)}{1 + R_{n-1}(P_n)} - \frac{1 - R_n(P_n)}{1 + R_n(P_n)} \right) = \frac{2m}{\hbar^2} d, \quad (4.1.18)$$

这里 $n, P_n = 1, 2, \dots, N$ 。由于外势是关于 $x=0$ 对称的, 块区域 n 和 $N-n$ 是对称的, 在左阱中 n 个粒子和 $N-n$ 个粒子的系统本质上是相同的。因此总共有

$$\frac{1}{2} N \sum_{j=0}^{N-1} C_{N-1}^j = 2^{N-2} N \text{ 这样的 BA 类型的方程。}$$

这里两个粒子在散射过程中满足动量守恒, 同时会改变它们的内部状态。自封闭要求要求粒子间的碰撞顺序不会影响最后的结果。下面我们给出类 Yang-Baxter 方程

$$S_{d, P_n}(n+1) S_{d, P_{n+1}}(n) S_{P_n, P_{n+1}} = S_{P_n, P_{n+1}} S_{d, P_{n+1}}(n+1) S_{d, P_n}(n), \quad (4.1.19)$$

该式描述了从 (d, P_n, P_{n+1}) 到 (P_{n+1}, P_n, d) 的两个等价过程, 如图 (4.2) 所示。方程

(4.1.19) 左边表示块区域 $n-1$ 的两个粒子先碰撞, 然后依次和 δ 势垒碰撞。该方程右边表示两个邻近的粒子先后和 δ 势垒碰撞, 然后这两个粒子再碰撞。通常情况下 Yang-Baxter 方程是一些散射矩阵的乘积, Yang-Baxter 方程在量子反散射方法中是最基础的代数结构, 也是判断系统可积的重要依据。(4.1.19) 式不同于常规的 Yang-Baxter 方程, 这里存在两种不同形式的散射矩阵, 一种是描述两个粒子之间的散射, 另一种是描述粒子和 δ 势垒间的散射。动量 $\{k\}$ 要满足 (4.1.19) 式。我们发现两个近邻的原子在不同的块区域散射矩阵是相同的, 因此 (4.1.19) 两边可以消掉共同的因子 $S_{P_n, P_{n+1}}$, 化简成

$$S_{d, P_n}(n+1) S_{d, P_{n+1}}(n) = S_{d, P_{n+1}}(n+1) S_{d, P_n}(n), \quad (4.1.20)$$

在与 δ 势阱散射前, 左阱的粒子数等于 $n-1$ 或者 $N-n+1$ 时, 我们可以得到相同的

方程, 因此当 $N>2$ 时, 存在 $\frac{1}{4} N(N-1) \sum_{j=0}^{N-2} C_{N-2}^j = N(N-1) 2^{N-4}$ 个不同的方程。

当 $N=2$ 时, 只有一个。相同的方程可以通过空间反演对称得到。通过求解 (4.1.18)

和 (4.1.20), 就可以得到准动量, 相应的能量为 $E = \sum_{i=1}^N \hbar^2 k_i^2 / 2m$ 。

下面我们考虑极限情况, $d=0$ 和 $g=0$ 。我们知道这两种情况都已经有了精确解的结果。当 $d=0$ 时, 方程 (4.1.18) 将变成

$$\exp(i2k_{p_n}L) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{k_{p_n} + k_{p_i} + i\frac{m}{\hbar^2}g}{k_{p_n} + k_{p_i} - i\frac{m}{\hbar^2}g} \cdot \frac{k_{p_n} - k_{p_i} + i\frac{m}{\hbar^2}g}{k_{p_n} - k_{p_i} - i\frac{m}{\hbar^2}g} \right), \quad (4.1.21)$$

这里的 $i \neq n$ 。这就是我们熟知的开边界情况下的 Bethe ansatz 方程。当 $g=0$ 时，方程 (4.1.18) 将化简成

$$\tan(-k_{p_n}L/2) + \frac{\hbar^2 k_{p_n}}{md} = 0, \quad (4.1.22)$$

这正是单粒子的结果。

4.2 两个粒子的情况

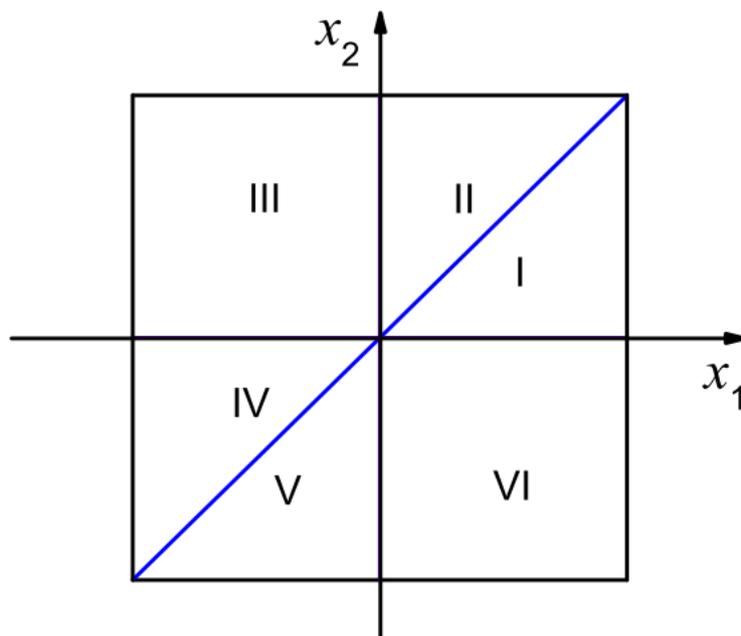


图 4.3 一维无限深势阱两个粒子情况由 x_1 轴, x_2 轴和 $x_1 = x_2$ 的线划分成 6 个区域。相邻的区域可以通过波函数的连续性和波函数一阶导数的阶跃条件连接。除了这些线的地方, 波函数都是自由粒子

对于两粒子的情况, 我们可以将一个两粒子的一维问题转换成单粒子的二维问题, 如图 4.3 所示。我们将 x_1x_2 的盒子分成 6 个区域。区域 I 和 II 构成了块区域 0, 区域 III 和 IV 构成了块区域 1, 区域 V 和 VI 构成了块区域 2。当 $N=2$ 时, (4.1.18) 式可化简成

$$ik_1 \left(\begin{array}{l} 1 + \frac{k_2 - k_1 + i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_2 - k_1 - i \frac{2\mu}{\hbar^2} g} \cdot \frac{k_2 + k_1 - i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_2 + k_1 + i \frac{m}{\hbar^2} g} \exp(ik_1 L) \\ 1 - \frac{k_2 - k_1 + i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_2 - k_1 - i \frac{2\mu}{\hbar^2} g} \cdot \frac{k_2 + k_1 - i \frac{m}{\hbar^2} g}{k_2 + k_1 + i \frac{m}{\hbar^2} g} \exp(ik_1 L) \end{array} \right) \frac{1 + \exp(-ik_1 L)}{1 - \exp(-ik_1 L)} = \frac{2m}{\hbar^2} d. \quad (4.2.1)$$

另一个 BA 类型的方程可以通过交换 k_1 和 k_2 的位置得到。(4.1.20) 式则化简成

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left(\frac{k_1 L}{2} \right) \sin^2 \left(-\arctan \left(\frac{\frac{m}{\hbar^2} g}{k_1 + k_2} \right) + \arctan \left(\frac{\frac{m}{\hbar^2} g}{k_1 - k_2} \right) + \frac{k_2 L}{2} \right) \\ & = \sin^2 \left(\frac{k_2 L}{2} \right) \sin^2 \left(-\arctan \left(\frac{\frac{m}{\hbar^2} g}{k_1 + k_2} \right) - \arctan \left(\frac{\frac{m}{\hbar^2} g}{k_1 - k_2} \right) + \frac{k_1 L}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

我们通过数值求解 (4.2.1) 和 (4.2.2) 式就可以得到两粒子在双阱中的能谱图。图 4.4 展示了极限情况 $d=0$ 和一个中间值的情况 $d=2$ 的能谱随着相互作用强度 g 的变化。在没有 δ 势垒的情况下，我们发现奇宇称和偶宇称的解析解是都存在的，如图 4.4 (a)。图 4.4 (b) 展示了 $d \neq 0$ 的情况，我们发现系统只存在奇宇称的解（除了 $g=0$ 的情况）。这里我们需要强调的是，对于 $g>0$ 的情况，准动量的解都是实数，对于 $g<0$ 的情况，准动量有两种解，一种是实数，对应的态是亚稳态，另一种是复数解，解的形式是一对互为共轭的复数 $k_{1,2} = \alpha \pm i\Lambda$ ，对应的态是束缚态。

图 4.5 展示了两个有相互作用的原子在 δ 势垒高度为 $d=2$ 时的波函数的密度分布 $\rho(x_1, x_2) = |\Psi(x_1, x_2)|^2$ 。我们选取 4 个相互作用参数 $g=-6.295, -0.5, 1.5, 50$ 分别对应图中的每一列， $g=-6.295$ 是一个能级交叉点，可参考图 4.4 (b)。图 4.5 展示了不同能级的两体关联函数，每一行都对应一个能级，且从下往上能量是增加的，能量和图 4.4 (b) 是一一对应的。我们发现，当我们 d 的取值，吸引相互作用时，从下往上数第一，二，四行是分子态，密度分布主要集中在对角线 $x_1 = x_2$ 上，也就是两个原子倾向于在同一个阱里形成二聚物，第三行则是一个亚稳态，在吸引相互作用时，两个原子在二、四象限的几率明显比较大，也就是说亚稳态时，每个原子倾向于呆在不同的阱里面。对于排斥相互作用，随着相互作用强度 g 的增加，原子的几率分布从一、三象限向二、四象限扩展，也就是说双占据的几率减少，向单占据几率转移。在强相互作用区域，粒子在各个能级的几率都表现为单占据和双占据的

几率几乎相同。

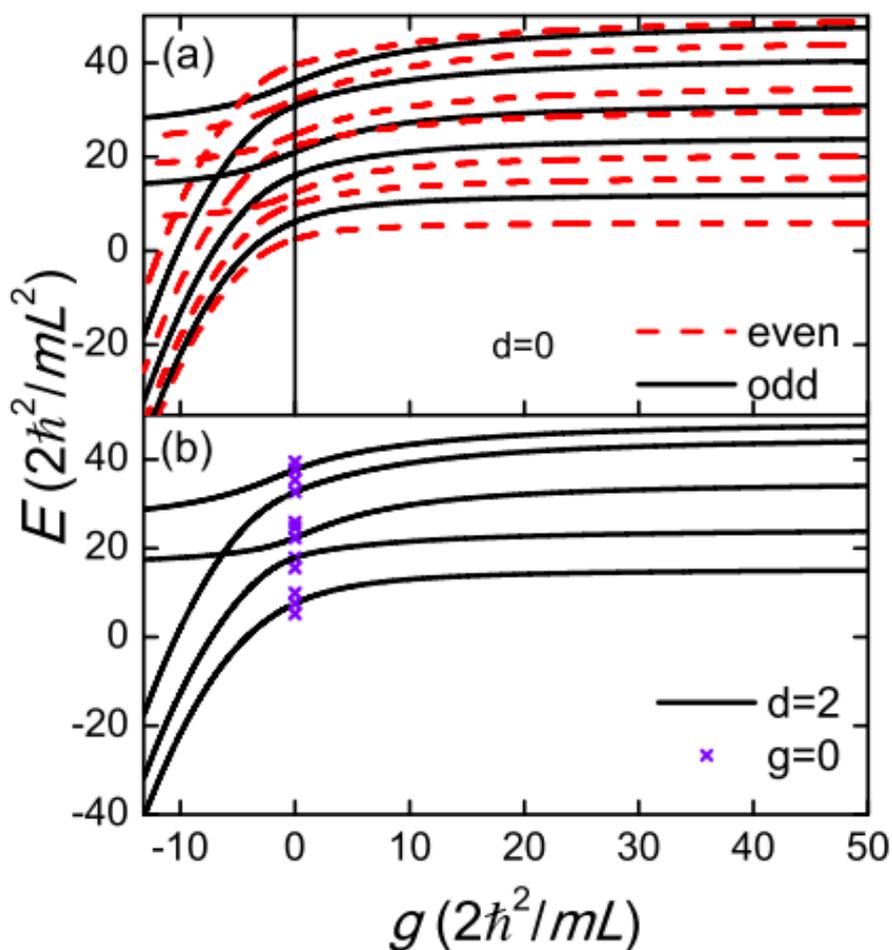


图 4.4 一维无限深势阱中加一个 δ 势垒系统的能谱。势垒强度(a) $d=0$ (b) $d=2$ 。×表示相互作用强度 $g=0$ 的能量。红虚线表示波函数为偶宇称的能谱。黑实线表示奇宇称的能谱

图 4.6 主要展示了势垒的高度对密度分布的影响，这里我们固定相互作用强度为 $g=1.5$ 。我们选取了 4 个 δ 势垒强度的参数 $d=0.5, 1.5, 10, 50$ 。最下面一行，我们发现随着势垒的高度增加，双占据几率逐渐增加，两个原子趋向于处于同一阱中。第三行和第四行表现了同样的特点，第二行则表现为随着势垒高度的增加，两个原子趋向于位于不同的阱中。

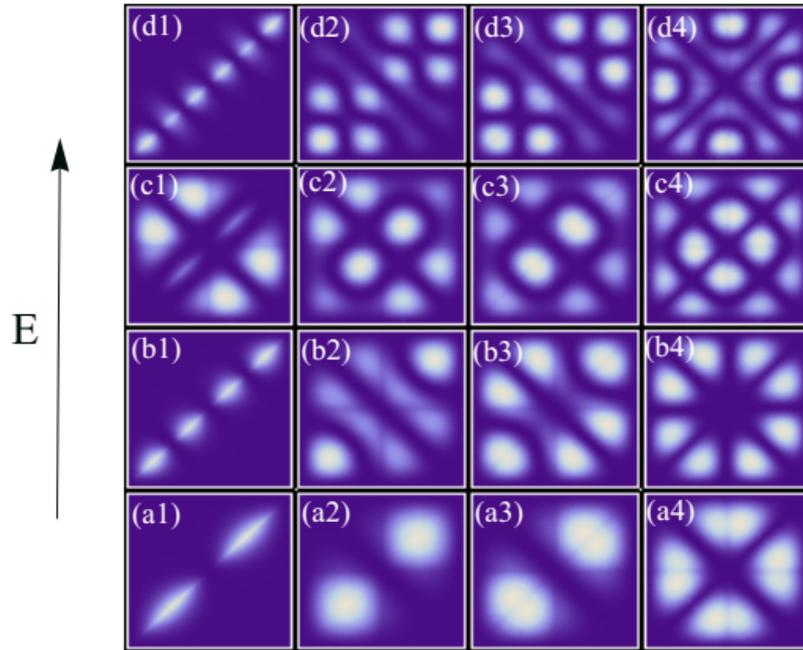


图 4.5 不同相互作用强度 g , 两个粒子在势垒强度为 $d=2$ 双阱中的波函数的密度分布 $\rho(x_1, x_2)$ 。每一列分别表示 4 个不同的相互作用强度 $g = -6.295, -0.5, 1.5, 50$ 。从下到上表示四个最低能量的态。每一个子图坐标范围是 $-1 < x_1, x_2 < 1$

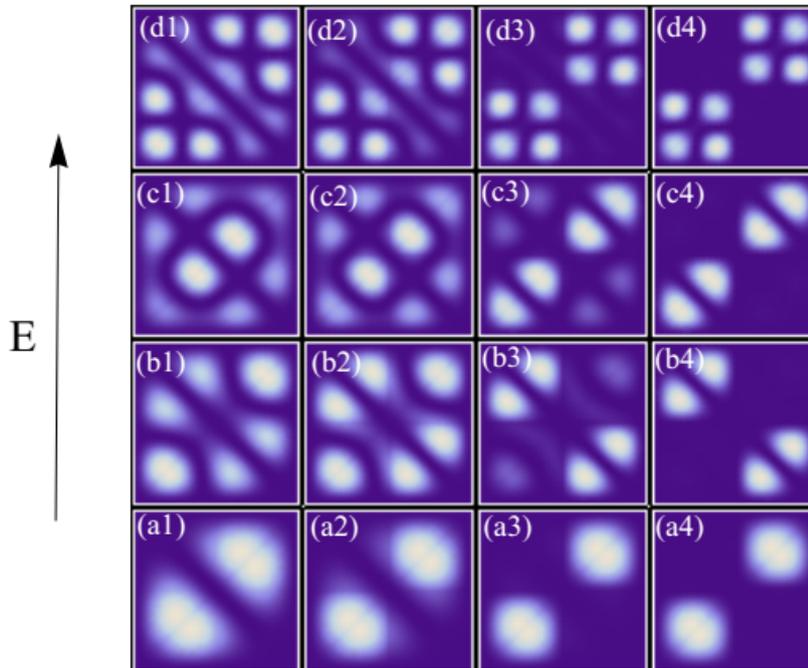


图 4.6 不同势垒强度 g , 两个粒子在相互作用强度为 $g=1.5$ 双阱中的波函数的密度分布 $\rho(x_1, x_2)$ 。每一列分别表示 4 个不同的相互作用强度 $d = 0.5, 1.5, 10, 50$ 。从下到上表示四个最低能量的态。每一个子图坐标范围是 $-1 < x_1, x_2 < 1$

4.3 布居数及隧穿动力学的研究

这一节我们主要研究本征态随相互作用强度变化的几率分布和双阱的隧穿动力学。海德堡实验小组在 2014 年展示了两个 ^6Li 原子的在双阱中的隧穿过程[6]。我们都知道双阱是构成光晶格的基本单位。左右对称双阱在双模近似下的哈密顿量可以写成:

$$H = \begin{pmatrix} U & -J & -J & 0 \\ -J & 0 & 0 & -J \\ -J & 0 & 0 & -J \\ 0 & -J & -J & U \end{pmatrix}. \quad (4.3.1)$$

这里 J 是隧穿能, U 是同一格点的相互作用能。通过求解哈密顿量, 我们可以得到四个本征态和本征能量分别是

$$\begin{aligned} |a\rangle &= (|LL\rangle + A_+ |LR\rangle + A_+ |RL\rangle + |RR\rangle); & |b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|LL\rangle - |RR\rangle); \\ |c\rangle &= (|LL\rangle + A_- |LR\rangle + A_- |RL\rangle + |RR\rangle); & |d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|LR\rangle - |RL\rangle); \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} E_a &= 2A_- J; & E_b &= U; \\ E_c &= 2A_+ J; & E_d &= 0; \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

其中

$$A_{\pm} = \frac{1}{4} \left(\frac{U}{J} \pm \sqrt{16 + \left(\frac{U}{J} \right)^2} \right), \quad (4.3.4)$$

基态 $|a\rangle$ 和第二激发态 $|c\rangle$ 是依赖于隧穿能和相互作用强度的, 文献[6] 也给出了实验结果, 并且这两个态都是满足交换对称的。我们发现基态 $|a\rangle$ 的双占据几率随着排斥相互作用的增加而增加, 第二激发态 $|c\rangle$ 则相反, 双占据几率随着相互作用的增加而减小, 参见图 4.7。 $|b\rangle$ 和 $|d\rangle$ 这两个态的占据几率则不依赖于相互作用强度。 $|d\rangle$ 是交换反对称的态, 其占据几率不随相互作用强度改变。但是 $|b\rangle$ 是交换对称的态, 实验中并没有给出这个态的占据几率随相互作用强度的改变。另一方面从这几个态的字称对称性来看, $|a\rangle$ 和 $|c\rangle$ 是偶宇称态, $|b\rangle$ 和 $|d\rangle$ 是奇宇称态。

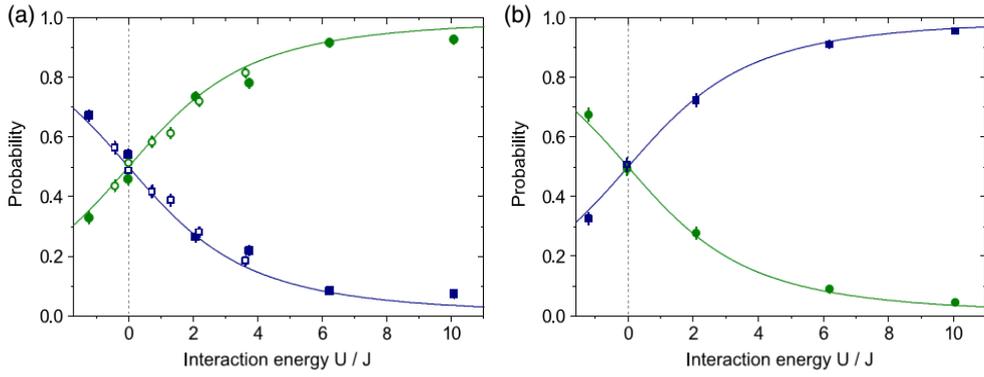


图 4.7 (a)基态 $|a\rangle$ 和 (b)激发态 $|c\rangle$ 的占据几率随相互作用的变化。绿色的线代表测量每个阱里有一个粒子的几率。蓝色的线代表测量两个粒子在同一个阱里的几率。对于基态 $|a\rangle$ ，随着排斥相互作用的增强，双占据几率被抑制。这表示从金属区域向莫特绝缘区域的转变。对于吸引相互作用，双占据增强，表示进入了电荷密度波区域。对于激发态 $|c\rangle$ ，在强排斥相互作用的区域，过度到电荷密度波区域。图来自文献[6]

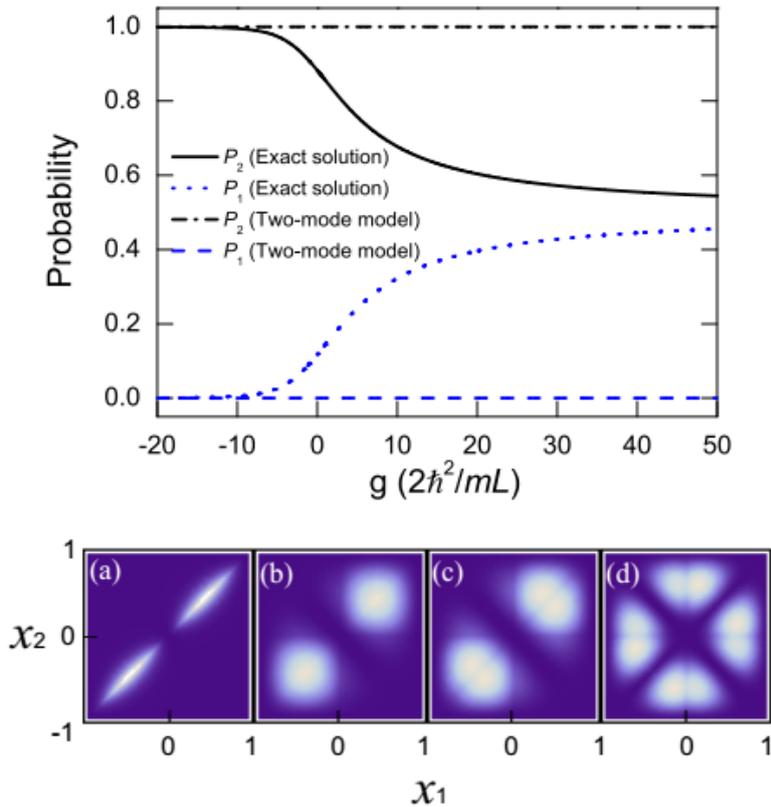


图 4.8 上图描述了占据几率随相互作用强度的变化。黑色的线表示两个粒子在同一阱中的几率。蓝色的线表示每个阱里都有一个粒子的几率。实线和点线是我们精确解的结果。点虚线和虚线是双模近似的结果。下图描述了不同相互作用强度(a) $g=-10$, (b) $g=-0.5$, (c) $g=1.5$, (d) $g=50$, 下 $|b\rangle$ 态的两体密度 $\rho(x_1, x_2)$

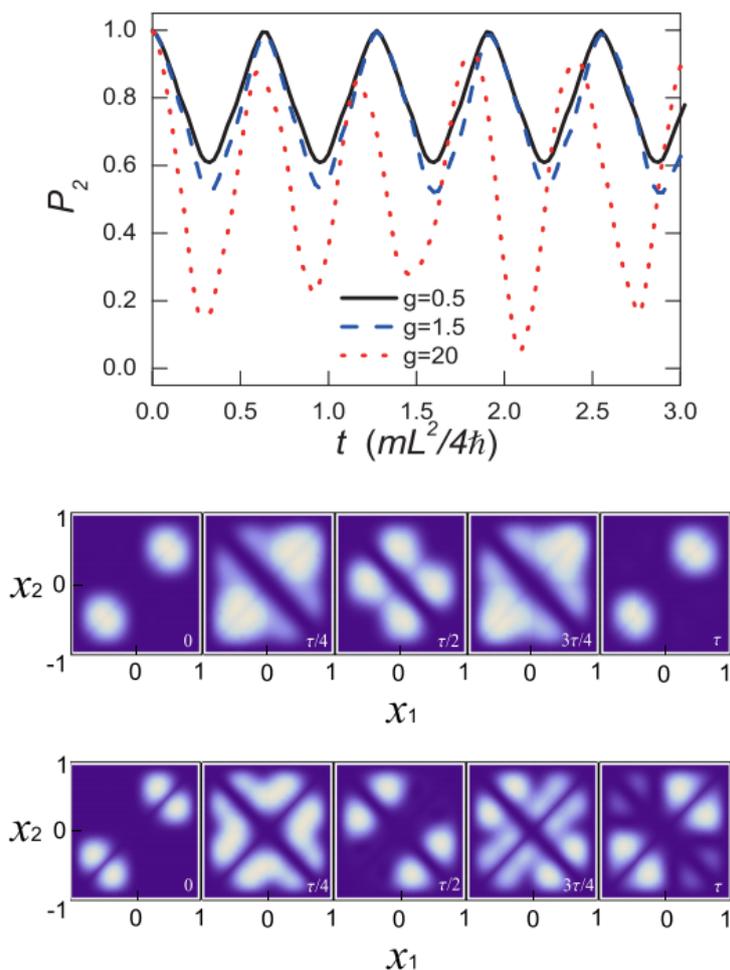


图 4.9 上图描述了两个原子在同一个阱中的占据几率随时间的演化图。黑实线，蓝虚线，红点线分别表示不同的相互作用强度 $g=0.5, 1.5, 20$ 。势垒高度突然从 $d=300$ 降到 0.5 在 $t=0$ 时刻。下图分别描述了 $g=1.5$ 和 20 在一个周期里不同时刻的密度分布图，这里坐标 x_1 和 x_2 的单位是 $L/2$

双模近似下 $|b\rangle$ 是一个两粒子的 NOON 态，是量子力学两体的最大纠缠态。NOON 态是量子力学多体纠缠态

$$|\psi_{\text{NOON}}\rangle = \frac{|N\rangle_a |0\rangle_b + e^{i\theta} |0\rangle_a |N\rangle_b}{\sqrt{2}},$$

表示有 N 个原子在模式 a ， 0 个原子在模式 b 与 0 个原子在模式 a ， N 个原子在模式 b 的叠加态。两粒子的 NOON 态是 Fock 态 $|n_L=2, n_R=0\rangle$ 和 $|n_L=0, n_R=2\rangle$ 的叠加。这个态在研究原子的频率测量[78]、干涉[79][80]和物质波陀螺仪[81]起到很重要的作用。上一节我们已经介绍了两个粒子的解析结果，我们的研究结果发现 $|b\rangle$ 态的占据几率是随相互作用改变的，如图 4.8。这与双模近似的结果差别很大。双模近

似的结果单占据几率和双占据几率都不随相互作用强度改变，而我们的解析结果发现随着排斥相互作用的增加，双占据的几率减小，单占据几率则增加，强相互作用时双占据和单占据的几率都接近 50%。对于研究 $|b\rangle$ 态的占据几率，双模近似并不是一个好的方法。

下面我们主要研究两个原子在双阱中的隧穿动力学。首先，我们制备一个初态，将两个原子制备在一个无限高 δ 势垒的 NOON 态 $|b\rangle$ ，这里我们数值上选取强度 $d=300$ 。然后我们将 δ 势垒的强度突然降低到 $d=0.5$ ，这就使得原子可以在两个阱间隧穿。这里我们势垒强度 d 和相互作用强度 g 的单位都取作 $2\hbar^2 / mL$ 时间 t 的单位为 $mL^2 / 4\hbar$ 。实验上在系统演化的不同时段，突然升高势垒把原子锁住，通过测量原子的荧光来数粒子在双阱中的分布情况，重复多次，然后来计算不同时刻的几率分布，从而得到占据几率随时间的变化规律。我们通过求解 (4.2.1) 和 (4.2.2) 得到最低能量对应的准动量 k_1 和 k_2 ，然后将其带入到波函数 (4.1.3) 中，得到初态 $|\phi_0(x_1, x_2)\rangle = (|LL\rangle - |RR\rangle) / \sqrt{2}$ 。关联函数定义为 $\rho(x_1, x_2, t) = \phi^*(x_1, x_2, t)\phi(x_1, x_2, t)$ 。初始波函数为 $|\phi_0(x_1, x_2)\rangle$ ，随时间演化的态由

$$|\phi(x_1, x_2, t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\phi_0(x_1, x_2)\rangle = \sum_i C_i e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}} |\Psi_i(x_1, x_2)\rangle \quad (4.3.5)$$

决定，这里 $C_i = \langle \Psi_i(x_1, x_2) | \phi_0(x_1, x_2) \rangle$ 是初态和系统降低势垒强度后能量为 E_i 的第 i 个本征态 $\Psi_i(x_1, x_2)$ 的交叠积分。对应的关联函数可以写成：

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2, t) = & \sum_{i=1} |C_i \Psi_i(x_1, x_2)|^2 + \sum_{i < j} 2C_i C_j \\ & \times \Psi_i(x_1, x_2) \Psi_j(x_1, x_2) \cos\left[\frac{(E_i - E_j)t}{\hbar}\right]. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

在理论上我们定义 n 个粒子在左阱和右阱的几率分别为 $P_{Rn}(t)$ 和 $P_{Ln}(t)$ ，系统在演化过程中左阱和右阱的几率是相同的，也就是 $P_{Rn}(t) = P_{Ln}(t)$ 。在左阱的平均粒子数我们定义为 $\bar{N}(t) = 2P_{R2}(t) + P_{R1}(t)$ ，对于一个在左右阱的粒子占据几率是平衡的初态，也就是说在左右阱的平均粒子数为常数 1。两个粒子在同一个阱的几率和在不同阱的几率分别是[72]

$$\begin{aligned} P_2(t) = 2P_{R2}(t) &= 2 \int_0^{L/2} \int_0^{L/2} \rho(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2, \\ P_1(t) = P_{R1}(t) &= 2 \int_{-L/2}^0 \int_0^{L/2} \rho(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

对隧穿导致占据几率从 $P_{R2}(t)$ 向 $P_{L2}(t)$ 转移，或者从 $P_{L2}(t)$ 向 $P_{R2}(t)$ 转移，并且转移

的几率是相同的，在双阱中的对隧穿相互抵消，只有单粒子隧穿对占据几率从双占据 $P_2(t)$ 到单占据 $P_1(t)$ 的转移有贡献。为了研究隧穿动力背后的物理现象，我们给出了相互作用强度对双占据几率 $P_2(t)$ 演化过程的影响，如图 4.9 所示。由于高激发态的权重 C_i 非常小，所以我们做一个截断，选取 30 个本征态 $\Psi_i(x_1, x_2)$ 作为基矢来研究隧穿动力学。从图 4.9 我们可以看到，原子在双阱中来回振荡。随着排斥相互作用强度从弱到强，双占据几率 $P_2(t)$ 振荡过程的振幅逐渐增强。强排斥相互作用使得振荡不再完整，双占据几率不能再 100% 回到初始 NOON 态。振荡周期从相互作用强度为 $g=1.5$ 时的 $\tau=0.64$ 变到相互作用强度为 $g=20$ 时的 $\tau=0.6$ 。图 4.9 下图展示了相互作用强度分别为 $g=1.5$ 和 20 的两体密度分布在一个周期内的变化。

4.4 小结

我们给出了 N 个粒子在双阱中的 Bethe-ansatz 类型的精确解。重点研究了两个粒子的情况，给出了 $|b\rangle$ 态的占据几率随相互作用强度的变化，发现占据几率明显的依赖于相互作用强度，与双模近似的结果差异很大。接着研究初态为 NOON 态的隧穿动力学，得到了不同相互作用强度下，占据几率的振荡规律。

第五章 强相互作用系统的等效自旋链

强相互作用系统有很丰富的物理，但通常情况下求解是非常困难的。然而有一种情况除外，即相互作用趋于无穷时。对于无穷大相互作用极限的情况，不论是玻色子还是费米子都表现出无自旋费米子的行为，每个粒子占据不同的位置，不可穿透，也就是说具有了费米化的特点，因此相互作用趋于无穷时的系统是容易处理的。对于强相互作用区域，相互作用强度为有限值的连续系统可以等效成自旋链模型，在实验上已经实现了自旋 1/2 的费米子系统[8]。近年来，很多理论小组在不同的体系，如多组分的系统，同时考虑 s 波和 p 波的系统 and 玻色费米混合系统都给出了等效自旋链模型，并且研究了系统的能谱，磁学性质，密度分布，动量分布，以及相变[82]-[100]。这一章我们主要介绍如何从连续模型得到等效自旋链模型，通过求解等效自旋链模型，给出系统的能级排布，并且得到其动力学性质。

5.1 玻色费米映射

在某些特殊情况下，一个比较难处理的系统可以映射到一个在理论上容易处理的系统。玻色费米映射[101][102]就是一个很好的例子。它将一维无限相互作用强度的玻色子系统（称为 Tonks-Girardeau（简称 TG）气体）映射到无相互作用无自旋的费米子系统。隐藏在背后的原因是 N 个全同粒子在子空间 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ 就已经包含了整个波函数的全部信息。由于在相互作用强度为无穷时，两个全同玻色子的波函数在 $x_i = x_j$ 时等于 0，这与无自旋的全同费米子性质完全一样。我们知道无自旋的费米子的波函数就是简单的史莱特行列式

$$\phi_F = \sqrt{\frac{1}{N!}} \det_{n=0, j=1}^{N-1, N} [\varphi_n(x_j)], \quad (5.1.1)$$

其中 $\varphi_n(x_j)$ 是单粒子的波函数。因此 TG 气体的波函数根据玻色费米映射就有这样的关系

$$\psi_{TG}(x_1, \dots, x_N) = A(x_1, \dots, x_N) \phi_F(x_1, \dots, x_N), \quad (5.1.2)$$

其中 $A(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i>j} \text{sgn}(x_i - x_j)$ ， $\text{sgn}(x)$ 是符号函数。对于 TG 气体的基态波函数可以简化成 $\phi_{TG}(x_1, \dots, x_N) = |\phi_F(x_1, \dots, x_N)|$ ，这样就可以精确的求解 TG 气体。随后这个映射被 Cheon 和 Sheghehara 推广到有限相互作用强度情况： s -波相互作用强度为 g ，接触相互作用的形式为[103][104]

$$V_s = g \sum_{i<j} \delta(x_{ij}), x_{ij} = x_i - x_j \quad (5.1.3)$$

的无自旋玻色子系统映射到短程 p -波相互作用强度为 $1/g$ ，赝势形式为[105]-[108]

$$V_p = -\frac{4}{g} \sum_{i<j} \partial_{x_{ij}} \delta(x_{ij}) \partial_{x_{ij}}, \quad (5.1.4)$$

的无自旋费米子系统。这个想法后来被 Girardeau 和 Olshanii[109][110]推广到了一维任意分量的费米子系统和玻色子系统都可以相互映射，即偶数分波相互作用（例如， V_s ）的系统可以映射到奇数分波相互作用（例如， V_p ）的系统。接触相互作用等价于一个边界条件，比如 V_s 和 V_p 对应相同的边界条件为 $\lim_{x_{ij} \rightarrow 0^+} g\psi(x_{ij}) = 2\psi'(x_{ij})$ 。

对于一维旋量气体，不论是玻色子还是费米子， s 波接触相互作用的哈密顿量可以写成

$$H = H_0 + V_s = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_i) \right] + V_s, \quad (5.1.5)$$

这里 H_0 是单粒子外势为 $V(x)$ 的哈密顿量。它可以映射到一个 p 波相互作用费米子气体和自旋链的直积。形式为 $H = H_0 + H_p$ ，其中

$$H_p = -\frac{4N!}{g} \sum_{i=1}^{N-1} \partial_{x_i} \delta(x_i - x_{i+1}) \theta(x_1 < x_2 < \dots < x_N) \partial_{x_i} \otimes \frac{1 \pm P_{i,i+1}}{2}. \quad (5.1.6)$$

这里的映射通过 $\theta(x_1 < x_2 < \dots < x_N)$ 只定义到一个坐标的子空间。 $\theta(x_1 < x_2 < \dots < x_N)$ 是由一系列的单位阶跃函数构成的。当 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ ， θ 等于 1，其它情况都等于 0。 $P_{i,i+1}$ 是置换算符，用来交换第 i 个粒子和第 $i+1$ 个粒子的自旋。对于玻色子取“+”号，对于费米子取“-”号。这个映射对于任意 $g>0$ 都是精确有效的，但是只有在强相互作用系统才可以有效的处理。该系统可以映射到弱 p 波相互作用无自旋的费米气体，从而可以用微扰法进行计算。

5.2 自旋 1/2 的等效自旋链

对于自旋 1/2 的 s -波强相互作用的系统映射到 p 波的弱相互作用系统， H_p 相对于 H_0 作为微扰。没有微扰项的系统是理想的费米子气体，基态 ϕ_F 由简单的最低 N 个单粒子本征态的史莱特行列式构成。其对应的能量为 $E_F = N(N+1)\hbar\omega/2$ 。保留到一阶微扰时，可以得到

$$H = E_F + \langle \phi_F | H_p | \phi_F \rangle = E_F + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \frac{1 \pm P_{i,i+1}}{2}, \quad (5.2.1)$$

这里系数 J_i 的定义为

$$J_i = 2N! \left(\frac{\hbar^2}{m} \right)^2 \int dx_1 \cdots dx_N \left| \frac{\partial \phi_F}{\partial x_i} \right|^2 \times \delta(x_i - x_{i+1}) \theta(x_1 \cdots x_N), \quad (5.2.2)$$

依赖于两个近邻原子波函数的交叠。置换算符 $P_{i,i+1}$ 的定义为

$$P_{i,i+1} = \frac{\sigma_i \sigma_{i+1} + 1}{2}. \quad (5.2.3)$$

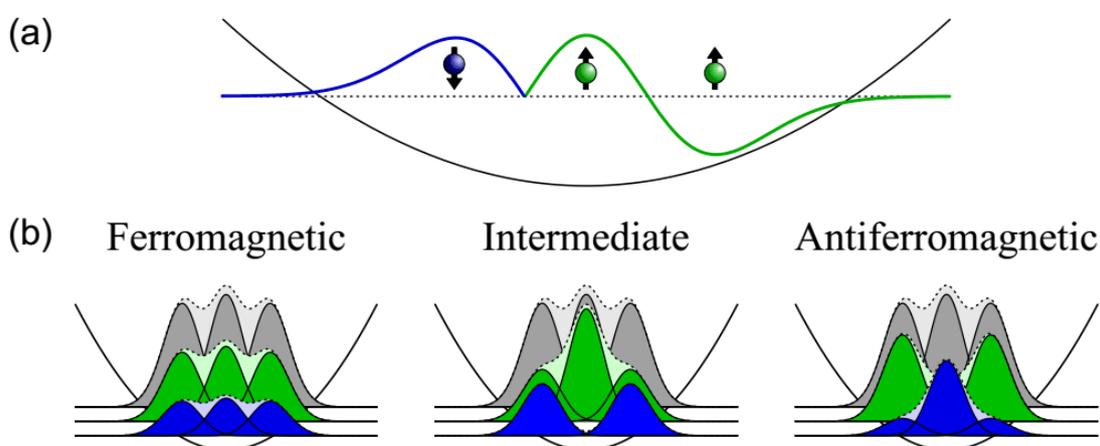


图 5.1 三个费米子的海森堡自旋链。(a)在一维耦合常数 $g = \pm\infty$ 时，两个自旋向上和一个自旋向下的原子在谐振子势阱中波函数的草图。如果两个可区分费米子的相对坐标波函数是对称的，强相互作用会导致在相对部分波函数出现一个尖端（左边的）。这会使它们像全同费米子一样分开（右边）。(b)费米化区域的两个自旋向上和一个自旋向下的原子在谐振子势阱中的密度分布。深灰色，深绿色，深蓝色的区域分别表示单粒子对总密度分布（淡灰色），自旋密度分布（淡绿色表示自旋向上的，淡蓝色表示自旋向下的）的贡献。像费米子的 Wigner 晶体，铁磁（左边的）中间态（中间的）反铁磁（右边的）总密度是相同的，但他们的自旋密度分布是不同的，可以由海森堡自旋链得到。图来自文献[8]

(5.2.1) 式是我们熟悉的海森堡自旋链，这里的耦合系数 J 不再是一个常数。对于一个强相互作用量子系统可以用不均匀的自旋链描述。这个等效自旋链被很多理论小组用不同的办法推导出来。上面用的方法是[85]文献所采用的。这样就可以把一个不容易求解的强相互作用系统的问题转换为求解等效自旋链了。通过简单的对角化方法，就可以很容易的求解，进而来研究系统的能谱以及态密度的分布。在

强相互作用区域,粒子的空间总的密度分布可以近似认为就是极限情况下 $g = \pm\infty$ 时的密度分布,这里主要考虑自旋交换相互作用对系统有哪些影响。图(5.1)给出了三个粒子,两个自旋向上,一个自旋向下的系统三个态的密度分布情况。在强的排斥相互作用时 $g > 0$, 系统的是一个反铁磁海森堡自旋链。在实验上已经实现了少个冷原子在一维囚禁势的反铁磁海森堡链。当相互作用是吸引相互作用 $g < 0$, 等效的自旋链是一个铁磁海森堡自旋链,但是这并不是基态,是一个激发态,所以并不能有效的得到铁磁态。对于如何在囚禁的强相互作用费米子系统实现铁磁态有很多文章都有介绍[83][85][111]。

下面我们主要介绍一下其能谱,首先我们发现在强相互作用极限,能量关于 $1/g$ 成线性关系。由于系统具有 $SU(2)$ 对称性,且总自旋是系统的守恒量,因此能级可以由总自旋 S 来标记,如图 5.2 所示。这里简单的给出了能级排布与总自旋的关系。对于自旋 $1/2$ 具有 $SU(2)$ 对称性的费米子系统满足 Lieb-Mattis 定理[112],其能级排布的特点也有很多研究[111][113]。

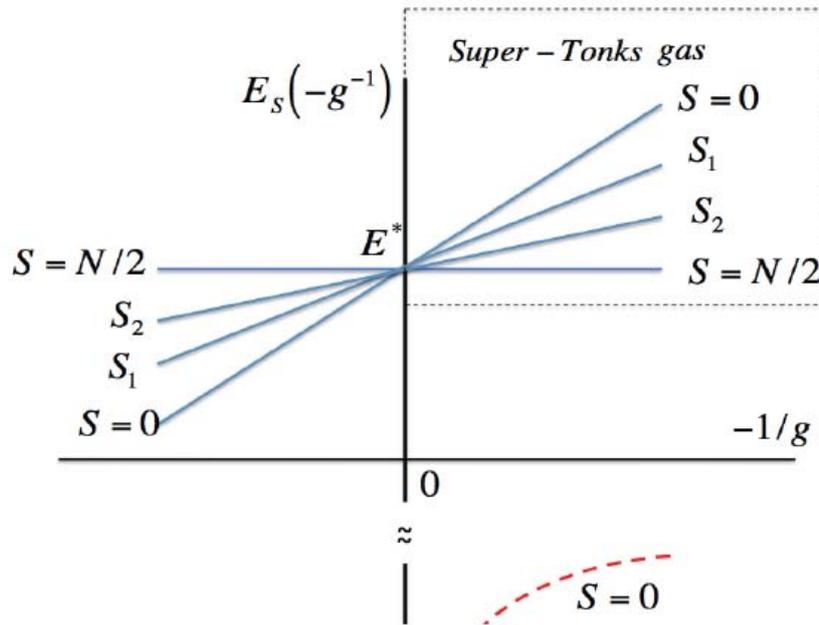


图 5.2 对于不同总自旋 S 基态能量随 $-1/g$ 变化的草图。当 $-1/g$ 绝值的扫过共振点,排斥区域自旋为 S 的每个态连续的演化到在 STG 区域的激发态,而不是调到真正的基态上,也就是更低能量的分子态(红色的虚线)。在排斥相互作用区域,能级的排布满足 Lieb-Mattis 定理,能量随着总自旋 S 的增加而增加。基态为自旋单态。在吸引相互作用区域,能量随着总自自旋 S 的增加而减小[111]

5.3 自旋 1 的等效自旋链

这一节，我们主要考虑 N 个自旋 1 的原子在谐振子势阱中的情况。系统的哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^N h(x_i) + \sum_{i<j}^N (c_0 + c_2 \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) \delta(x_i - x_j), \quad (5.3.1)$$

其中， $\mathbf{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ 是第 i 个原子自旋 1 的矩阵， $c_0 = (g_0 + 2g_2)/3$ ， $c_2 = (g_2 - g_0)/3$ 这里 g_0 和 g_2 分别是 $S=0$ 和 2 两个散射通道的耦合常数[114][115]。对于 $F=1$ ^{87}Rb ，系统的磁性质由总自旋 0 通道和 2 通道的 s 波散射长度的差值 $\Delta a = a_2 - a_0$ 确定。当 Δa 为正时，系统表现出铁磁的性质，当 Δa 为负时，系统表现出反铁磁的性质。两个通道的背景散射长度分别是 $a_0 \approx 101.8a_B$ ， $a_2 \approx 100.4a_B$ ，则 $\Delta a = -1.45a_B$ ，其中玻尔半径 $a_B = 0.0529\text{nm}$ 。Chapman 实验小组通过高分辨率的原子光缔合谱[116]使 Δa 的大小和符号可以在很大范围内调节，其范围从 $-7a_B$ 到 $7a_B$ 。 Δa 正比于 c_2 ，其符号从负变到正，经过一阶相变点 $g_2 = g_0$ ，对应着从反铁磁向铁磁相的转变。通常情况下在实验上将两个通道同时调到强耦合区域是非常困难。传统调节相互作用强度的方法：三维的 Feshbach 共振和一维的束缚诱导共振都只能将其中一个自旋碰撞通道的相互作用强度调到共振附近。文献[117]展示了通过外加一个自旋翻转的射频场，实现多通道的散射共振，即多通道的相互作用强度同时调到强耦合区域。在我们的系统中两个通道的相互作用就可以通过这样的方式同时调到共振附近。单粒子哈密顿量为：

$$h(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - G x s^z + \Omega s^x, \quad (5.3.2)$$

其中 ω 是谐振子势阱的角频率，每个粒子感受到一个强度为 Ω 的横向磁场和一个强度为 G 的依赖于自旋的磁场梯度。这里的 Ω 和 G 都吸收了朗德 g 因子和玻尔磁子 μ_B 。在我们的系统中这些项都很弱，在弱相互作用时几乎没有影响。但是在强相互作用系统就会带来很大影响，后面我们将仔细分析。这里相互作用可以通过多通道的散射共振来调到强相互作用区域。

在强相互作用区域，根据上一节提到的方法，我们可以得到自旋 1 玻色子的等效自旋链：

$$H_{\text{eff}} = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i \left(\frac{1}{g_0} P_0(i, i+1) + \frac{1}{g_2} P_2(i, i+1) \right). \quad (5.3.3)$$

这里我们用两个格点的总自旋 \mathbf{S} 的碰撞通道来代替模型中按照近邻自旋置换算符 $P_{i,j}$ 的定义。对于自旋 1 的原子我们定义在总自旋 $S=0$ 和 2 的通道的投影算符分别为

$$P_0(i, i+1) = \frac{(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i+1})^2 - 1}{3}, \quad (5.3.4)$$

$$P_2(i, i+1) = \frac{(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i+1})^2}{6} + \frac{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i+1}}{2} + \frac{1}{3}, \quad (5.3.5)$$

J_i 的定义在上一节 (5.2.2) 已经给出。哈密顿量的结构和海森堡双线性双二次型 (HBB) 自旋链 [118][119]

$$H = \sum_i (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i+1} + \beta (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i+1})^2). \quad (5.3.6)$$

是一样的。唯一的区别是由于外势导致粒子密度分布不均匀，所以近邻自旋的耦合系数是不同的。系统包含的对称性算符包括总自旋 $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i$ 的平方，总自旋 z 分量 $S_z = \sum_{i=1}^N s_i^z$ 和宇称算符 $\Pi = P_{1,N} P_{2,N-1} \cdots$ 。因此 H_{eff} 的本征态可以用这三个量子数来分类：总自旋 S ，总的磁量子数 S_z ，和宇称 Π 。

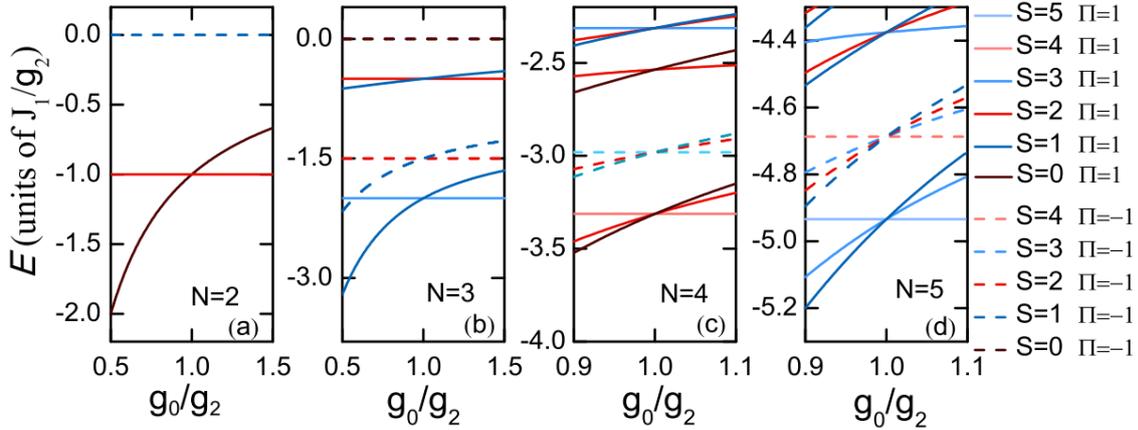


图 5.3 粒子数为 $N=2,3,4,5$ 的 H_{eff} 的能谱随相互作用 g_0/g_2 的变化。能级都用总自旋 S 标记。我们放大了 $g_0/g_2 = 1$ 附近的区域，主要观察能级交叉的规律。在 $g_0/g_2 < 1$ 的区域，能量 E_S^n 是随总自旋 S 的增加而增加的，对于 $N=2,4$ ，基态是 $S=0$ 的单态，对于 $N=3,5$ ， $S=1$ 。在 $g_0/g_2 > 1$ 的区域，能量 E_S^n 是随总自旋 S 的增加而减小的，基态是 $S=N$ 的铁磁态

5.3.1 能级排布

首先我们研究在相互作用很强但是有限值，即 $g_0, g_2 \gg 0$ 的情况下，这个等效自旋链模型的本征值和本征态。对于最简单的情况，两个粒子 $N=2$ ，我们很容易看

到在 $S=2, 1, 0$ 三个通道的的本征值分别是 $-J_1/g_2, 0, -J_1/g_0$ 。对于反铁磁自旋链，大家更关注单态和三重态的简并点 $\beta = -1/3$ ，恰好与我们所研究的模型的 TG 极限情况 $g_0 \rightarrow +\infty$ 对应。我们关注五重态和三重态的简并点，即 $SU(3)$ 可积点 $g_0 = g_2$ 附近的特性。由于两种情况 J 的符号是不同，因此两种情况的能级排布顺序相反，基态能级的交叉点也不同。在图 5.3，我们给出了能级随着 g_0/g_2 的比值变化的关系。每一个能级在总自旋 S 通道都有 $2S+1$ 重简并。这里我们将图中的每个简并点包含的能级都定义为一束。用束来对不同的简并点分类。为了指定这些能级，我们将本征态表示成 $|E_S^n, S_z, \Pi\rangle$ ，其中 n 表示出现在 $g_0 = g_2$ 时的第 n 个简并态的束。磁量子数 $S_z = 0$ 的两个粒子本征态可以写成

$$\begin{aligned} |E_2^1, 0, 1\rangle &= (|1, -1\rangle + 2|0, 0\rangle + |-1, 1\rangle) / \sqrt{6}, \\ |E_0^1, 0, 1\rangle &= (|1, -1\rangle - |0, 0\rangle + |-1, 1\rangle) / \sqrt{3}, \\ |E_1^2, 0, -1\rangle &= (|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle) / \sqrt{2}. \end{aligned}$$

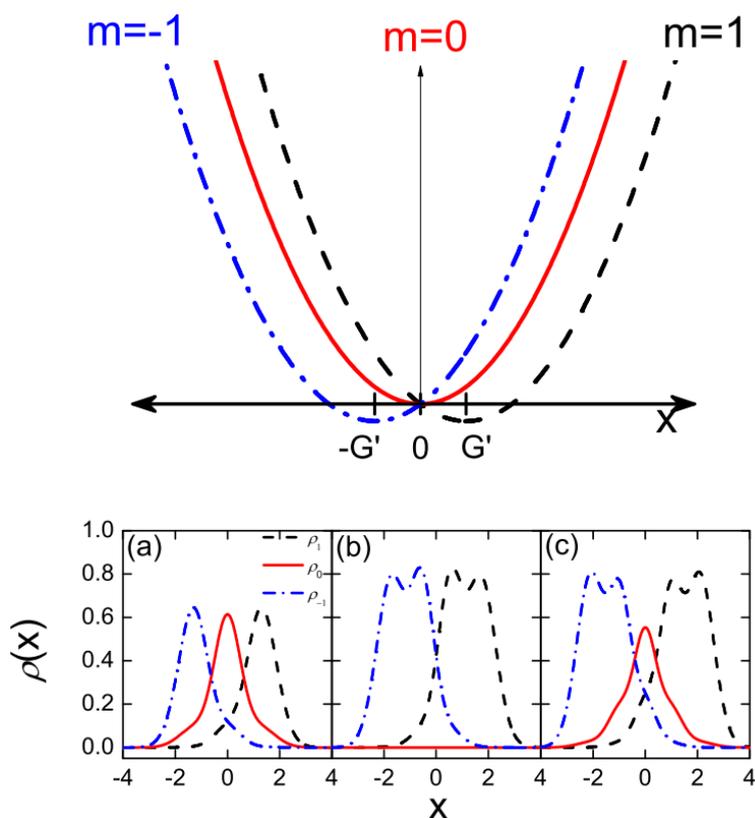


图 5.4 上图： $m = -1$ (左边)， 0 (中间)， 1 (右边) 分量上粒子感受到的外势。下图：在 $S_z = 0$ 子空间， $m = -1$ (蓝色的点-虚线)， 0 (红色的实线)， 1 (黑色的虚线) 分量的密度分布。 $G = 2\hbar^2 \omega^2 / g_2$ ， $g_0 / g_2 = 1$ 。(a) $N=3$ ；(b) $N=4$ ；(c) $N=5$ 。坐标 x 的单位是 $a_{ho} = \sqrt{\hbar / m\omega}$ 。相互作用强度 g_2 的单位是 $\sqrt{\hbar^3 \omega / m}$ 。

$S_z = \pm 2, \pm 1$ 的态可以通过作用自旋的升降算符 S^\pm 来得到。其中两个能级属于第一束 $n=1$ ，剩下一个能级属于第二束。对于磁量子数 $S_z = 0$ 三个粒子的情况，七个能级分成了四束，每一束对应的能级个数分别是 2, 2, 2, 1。对于总自旋 $S=3$ 的态对应的能量为 $-2J_1/g_2$ ，与 $S=1$ 态的能量 $-J_1/2g_2 \left(1/2 + 2\alpha + \sqrt{(2\alpha-1)^2 + 5/4}\right)$ 竞争，在 $\alpha=1$ 处有一个能级交叉点，这里 $\alpha = (2g_2/g_0 + 1)/3$ 。以上我们研究的 $N=2, 3$ 的情况，能级排布的特点并不依赖于外势，外势的信息主要包含在耦合系数 J 里面，显而易见两个粒子的情况，只有一个耦合系数，三个粒子的时候，由于外势的对称的，则 $J_1 = J_2$ ，因此外势只要是对称的，就不会影响能级的排布。

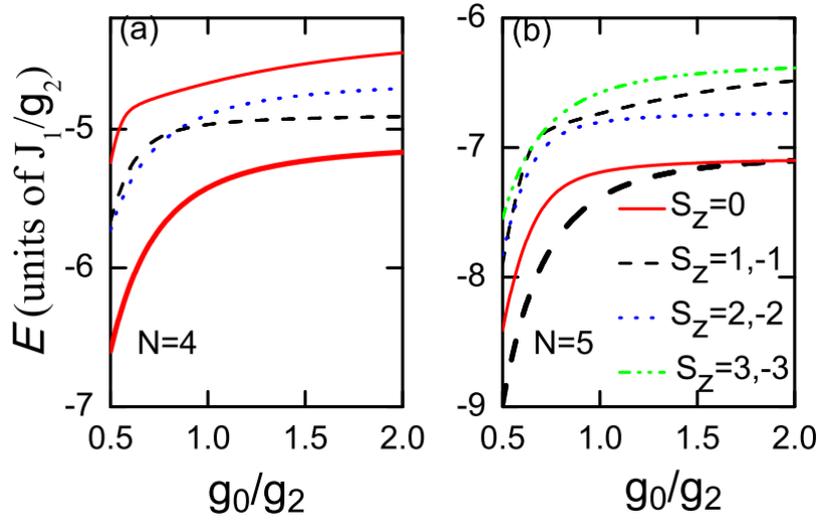


图 5.5 磁场梯度 $G = 2\hbar^2\omega^2/g_2$ ，粒子数为 $N=4$ (a) 和 $N=5$ 系统的最低的几个能级随相互作用强度的变化。这里我们用 S_z 来标记不同的能级。显然对于 $N=4$ ($N=5$) 的最低能级是 $S_z = 0$ ($S_z = \pm 1$)

通过在自旋 Fock 态基矢 $|m_1 m_2 \cdots m_N\rangle$ 下数值对角化等效自旋链哈密顿量(5.3.3)可以得到 $N=4,5$ 粒子数的能谱，如图 5.3 (c, d) 所示。这里 m_i 是第 i 个粒子的自旋。很明显能谱关于可积点 $g_0 = g_2$ 是不对称的，基态有 $(N+1)(N+2)/2$ 重简并。属于相同束能级的本征态具有相同的宇称，对于基态的那一束总是偶宇称 ($\Pi=1$)。粒子数 N 为奇数时，这一束包含 $(N+1)/2$ 个能级，粒子数为偶数时，包含 $(N+2)/2$ 个能级。这一束包含的总自旋有 $S=N, N-2, N-4, \cdots$ 。对于激发态的那一束能级对应的本征态则都是奇宇称，包含 $(N-1)$ 个能级。第一激发这一束包含的总自旋为 $S=N, N-1, \cdots, 1$ 。从图中我们发现，当偏离可积点（能级交叉点），不同总自旋的束缚态能级简并消除，对于铁磁耦合 $g_0/g_2 > 1$ ，基态的总自旋 $S=N$ ，对于反铁磁耦合 $g_0/g_2 < 1$ ，偶数个粒子时，基态的总自旋 $S=0$ ，奇数个粒子时，基态的总自

旋 $S=1$ 。在铁磁区域，每一束的能级排布都满足随着自旋的增加能量在减小，也就是当 $S_1 > S_2$ ，则 $E_{S_1}^n < E_{S_2}^n$ 。在反铁磁区域，每一束的能级排布满足随着自旋的增加能量也是增加的，即， $S_1 < S_2$ ，则 $E_{S_1}^n < E_{S_2}^n$ 。对于 $N>3$ 的情况，外势的影响会体现出来，比如 4 个粒子的情况， $J_1 = J_3 \neq J_2$ ，耦合系数不再均匀，但是并不会影响能级的排布规律，仅对能级有微小的偏移。我们这里研究的这些能级排布的规律同样适用于没有外势的情况。最低那一束能级在 $g_0 = g_2$ 出现能级交叉点表示从反铁磁到铁磁的一阶相变。

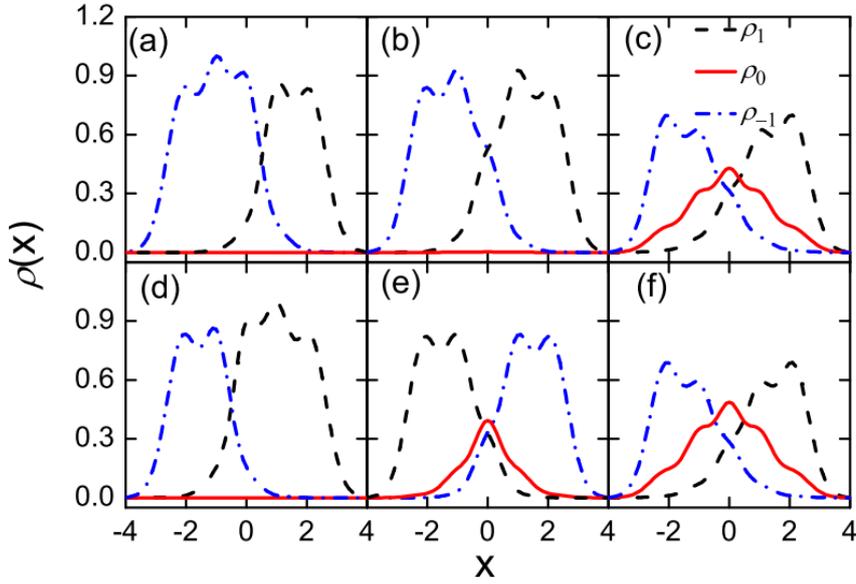


图 5.6 横向磁场和相互作用对基态自旋分量 1(黑虚线), 0(红实线), -1(蓝点虚线)的密度分布的影响。粒子数为 $N=5$, $G = 2\hbar^2\omega^2 / g_2$ 。(a)-(d) $g_0 / g_2 = 1$, (e) 和(f) $g_0 / g_2 = 2$ 。(a) 和(d) 是 $S_z = \pm 1$ 的两个简并态, $\Omega = 0$ 。(b) 和(e) $\Omega = 0.001\hbar\omega$ 。(c) 和(f) $\Omega = 0.05\hbar\omega$

对于总自旋，系统的能谱是高度简并的。下面我们考虑加上一个弱的依赖自旋的磁场梯度 G ，在单粒子哈密顿 (5.3.2) 中已经介绍过了。如图 5.4 所示，不同自旋分量的原子感受到不同的外势，对于自旋 $m = \pm 1$ 的两个分量的粒子感受到的谐振子势向左（右）平移 $G' = Ga_{ho}^2 / \hbar\omega$ 个单位，向下平移 $(G\hbar)^2 / 2m\omega^2$ 。对应的有效自旋链在强相互作用区域可以写成

$$H'_{eff} = H_{eff} - G \sum_i D_i S_i^z, \quad (5.3.7)$$

这里 $D_i = N! \int x_i |\phi_F|^2 \theta(x_1 \cdots x_N) \prod_{j=1}^N dx_j$ 表示第 i 个粒子的平均位置。磁场梯度会破坏总自旋守恒和宇称守恒，意味着 H'_{eff} 与 S^2 和 Π 不再对易。然而我们发现 H'_{eff} 与

$T = \Pi \prod_{j=1}^N a_j$ [120] 是对易的, 这里

$$a_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用来将第 j 个粒子的自旋翻转。这里简单的可以看出 $\{T, S_z\} = 0$, $[T, S_z] = 2TS_z$ 。 T 作用到一个能量的本征态 $|E_i, S_z\rangle$ 上, 将变成另一个简并的态 $|E_i, -S_z\rangle$, 也就是

$$T|E_i, S_z\rangle = |E_i, -S_z\rangle.$$

从图 5.5 我们发现, 磁场梯度部分消除了能谱的简并。总的磁量子数 S_z 和 $-S_z$ 的态仍然简并。此时, 系统的基态是使能量达到最低的所有总自旋态的混合, 且出现了自旋分量的分离 (图 5.4 的下图), 在 $g_0 = g_2$ 的一阶相变也消失了。对于偶数个粒子, 基态的总磁量子数为 $S_z = 0$ (图 5.4 (a))。对于奇数个, 最低能量态的总磁量子数为 $S_z = \pm 1$ (图 5.4 (b))。

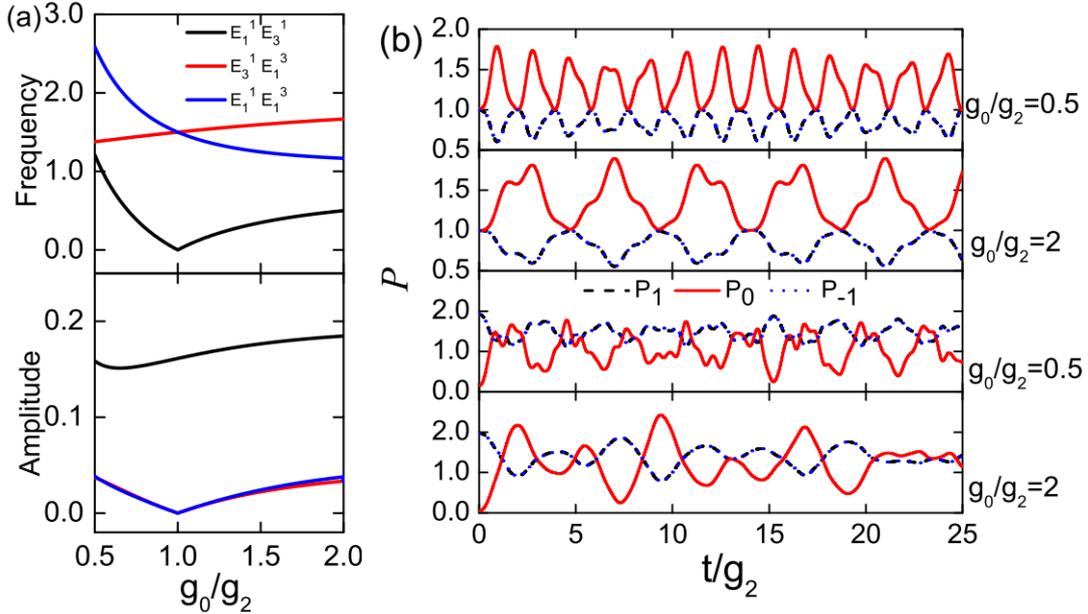


图 5.7 (a) 给出粒子数为 $N=3$, 自旋 1 或者 -1 分量的占据几率的频率和振幅随 g_0/g_2 的变化规律。(b) 给出了相互作用强度 $g_0/g_2 = 2$ 和 $g_0/g_2 = 0.5$ 时, 占据几率 P_m 作为 t/g_2 的函数关系, 这里 $m=0, \pm 1$ 。频率的单位是 $J_1/2\pi\hbar g_2$, t/g_2 的单位是 $\sqrt{m/\hbar^3\omega^3}$ (这里的 m 表示质量)。红实线展现的是 $m=0$ 分量的占据几率, 绿点线是 $m=-1$ 分量的占据几率, 黑虚线是 $m=1$ 分量的占据几率

第 m 个自旋分量的密度分布可以定义为

$$\rho_m(x) = \sum_i \rho_m^{(i)} \rho^{(i)}(x), \quad (5.3.8)$$

这里

$$\rho_m^{(i)} = \sum_{m_1, \dots, m_N} |\langle m_1, \dots, m_N | \chi \rangle|^2 \delta_{m, m_i} \quad (5.3.9)$$

是第 i 个自旋的磁量子数等于 m 的几率，

$$\rho^{(i)}(x) = N! \int dx_1 \cdots dx_N \delta(x - x_i) \theta(x_1, \dots, x_N) |\phi_F|^2 \quad (5.3.10)$$

是发现任意自旋第 i 个原子在 x 的位置的几率。在图 5.4 的下图，我们展示了梯度取值为 $G = 2\hbar^2 \omega^2 / g_2$ 时的密度分布。由于在 $SU(3)$ 对称性可积点 $g_0 = g_2$ ，相互作用是不依赖于自旋的，所以各个自旋分量的粒子数是守恒的[121]。在磁量子数 $S_z = 0$ 的子空间，当粒子个数为偶数时，基态的自旋 0 分量的占据几率是零。当粒子个数为奇数时，基态的自旋 0 分量的占据的粒子数为 1（图 5.4 (a) (c)）。我们可以这样理解这一现象，对于费米化的原子总是从低到高一个一个的填充能级，由于外加的梯度使左右两边的势阱降低 $(G\hbar)^2 / 2m\omega^2$ ，因此两边势阱的能量要低，原子更倾向于填充在两边。

当我们给有效哈密顿量 H'_{eff} 再加一个横向磁场 ΩS_x 时，哈密顿量与 S_z 也不对易了，这时简并完全消除。然而 H'_{eff} 和算符 T 依然是对易的。当加入一个很小的 Ω 时，可以看做是一个微扰，对于偶数个粒子， $S_z = 0$ 的基态的密度分布与没有加横向磁场的情况相比几乎没什么改变，但是对于奇数个粒子情况就很不同了。基态可以认为是没有加横向磁场的情况 $S_z = \pm 1$ 两个基态（如图 5.6 (a) 和 (d)）的叠加态，即，

$$|G_{odd}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_0, S_z = +1\rangle + |E_0, S_z = -1\rangle), \quad (5.3.11)$$

且满足 $T|G_{odd}\rangle = |G_{odd}\rangle$ 。横向磁场可以将两个简并的基态耦合在一起，由于守恒量 T 算符是一个将空间反演和自旋翻转联合的算符，使自旋 1 和自旋 -1 的的密度分布彼此对称（如图 5.6 (b)），且基态的能量降低 $\hbar\Omega$ 。随着 Ω 的增加，由于非对角项 S_x 将不可避免的耦合更高的激发态，使得自旋 0 分量的几率显著的增加（如图 5.6(c)）。当然，如果系统离开可积点，自旋 0 分量的几率也会增加，如图 5.6 (e) 和 5.6 (f)， $g_0 / g_2 = 2$ ，可以明显看到自旋 0 分量的增加。

5.3.2 动力学

自旋 1 超冷原子的自旋混合动力学在多体系统中一直受到很大的关注。其主要的研究方法是在平均场理论下通过求解多组分的 GP 方程来处理弱相互作用的玻色

凝聚体[122]-[131]。实验上通过囚禁 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 来实现自旋1的旋量原子[132]-[137]。在这一节，我们研究一个完全相反的情况，即强相互作用少体系统的混合动力学。

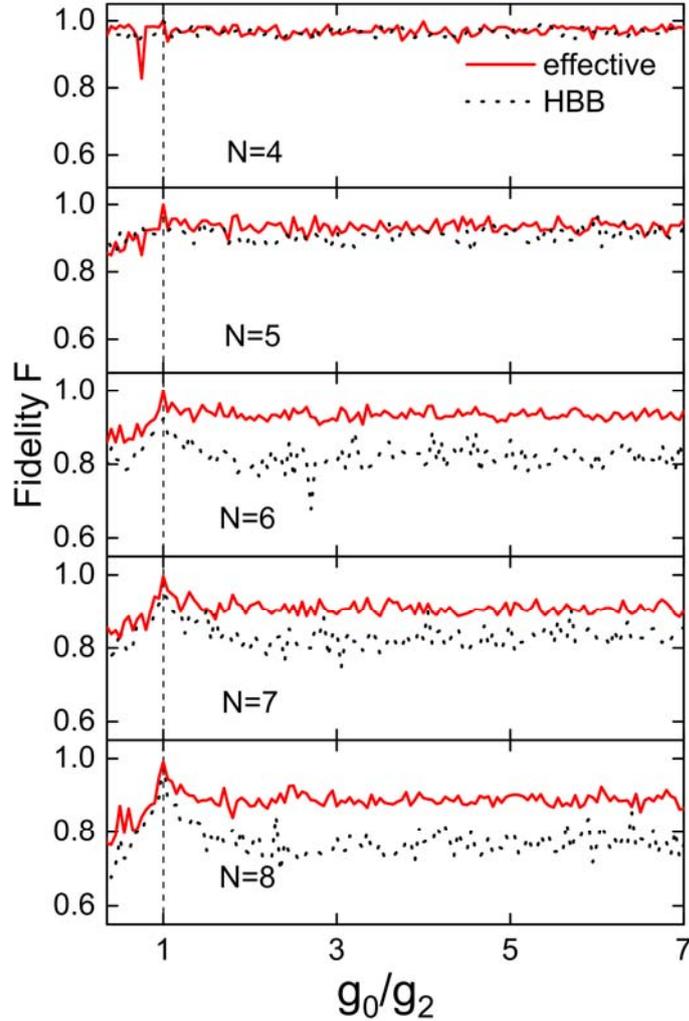


图 5.8 自旋 1 粒子数为 $N=4$ 到 8 系统态传递保真度的最大值。黑色点线是 HBB 自旋链的结果。红色实线是等效自旋链的结果。垂直的虚线表示相变点 $g_0/g_2=1$

囚禁冷原子实现等效自旋链为研究微观的磁现象提供了重要的应用。为了研究这个系统的动力学，首先将强相互作用原子制备到一个依赖于自旋梯度为 $G = 2\hbar^2\omega^2/g_2$ 的弱磁场中系统的基态 $|\chi(0)\rangle$ 。由于总的磁量子数 S_z 仍然是守恒量，所以系统可以在一个 S_z 的子空间进行演化。然后突然关闭磁场梯度，系统的演化主要受等效自旋链哈密顿量 H_{eff} 控制。初态是非零 G 等效自旋链 H'_{eff} 的基态。时间演化的波函数的方程从初态 $|\chi(0)\rangle$ 出发可以表示为

$$|\chi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t} |\chi(0)\rangle = \sum_i c_i e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t} |\phi_i\rangle, \quad (5.3.12)$$

这里 $c_i = \langle \phi_i | \chi(0) \rangle$ 是初态和系统能量为 E_i 的第 i 个本征态的交叠积分。我们引入自旋占据的定义，自旋 m 分量的占据几率为 $P_m(t) = \sum_i \rho_m^{(i)}(t)$ ，其中 $\rho_m^{(i)}(t)$ 是将表达式 (5.3.9) 中的 $\rho_m^{(i)}(t)$ 做这样的替换： $\chi(0) \rightarrow \chi(t)$ 。对于自旋 1 的系统两个在 -1 和 +1 两个态的原子碰撞散射有一定的几率变成两个在自旋为 0 态的原子，这就会导致占据几率从 $P_{+1}(t) + P_{-1}(t)$ 到 $2P_0(t)$ 的转移，或者是其逆过程，但是总的几率守恒 $\sum_m P_m(t) = N$ 。在任何时刻系统满足 $P_{+1}(t) - P_{-1}(t) = S_z$ 。在这一节我们只考虑总磁量子数 $S_z = 0$ 的子空间的动力学演化，在这种情况下，一定有 $P_{+1} = P_{-1}$ 。图 5.7 主要解释了自旋各分量占据几率的动力学。当粒子数 $N=3$ 时，相互作用参数 $g_0 / g_2 = 0.5$ 和 2 两种情况，初态三个自旋分量的占据几率与可积点 $g_0 = g_2$ 的占据几率很接近，也就是三个分量的几乎都是相等。从这样一个初态出发，自旋分量 0, ± 1 占据几率随着时间做类似 Rabi 振荡，如图 5.7(b) 所示，这与 $g_0 = g_2$ 的差别很大， $g_0 = g_2$ 时由于粒子数守恒，所以各个分量的占据不随时间改变，始终等于 1。受到自旋碰撞动力学实验[138]的启发，我们在整个相互作用范围，对振荡曲线进行傅里叶分析得到自旋 1 和 -1 分量占据几率的振荡的频率和振幅(图 5.7(a))，发现振荡的振幅与基矢前面的权重系数有关，振荡频率与能差有关， E_1^1, E_3^1, E_3^3 这三个能级在自旋交换振荡动力过程中起主要作用。在可积点，振荡的频率或振幅将等于 0，这可以保证每个分量的占据几率保持常数，即，粒子数为 $N=3$ 时， $P_0(t) = P_{\pm 1}(t) = 1$ ，粒子数 $N=4$ 时， $P_0(t) = 0, P_{\pm 1}(t) = 2$ 。导致这个现象的根本原因是，在这一点能级是高度简并的。从图 5.7(a) 可以看出能差 $|E_1^1 - E_3^1|$ 对应的振幅和另外两个相比要大很多，因此这一能差对应的频率起着决定性作用。因此离开可积点，振荡频率都是增加的，且右侧比左侧增加的缓慢。动力学性质在这里可以用来探测自旋 1 链的量子相变。

下面我们研究另外一种动力学：量子态的转移。自旋链在量子模拟和量子计算中有很重要的应用。自旋链被广泛的作为量子通道在小的量子网络中用来研究态的转移[139]-[141]。一个近邻耦合自旋链的量子态的转移对于处理量子信息传递过程是非常重要的。两相邻自旋的相互作用能在平移不变的 HBB 自旋链上是相同的，可以用哈密顿量(5.3.6)来描述，这里我们令 $\beta = (2g_2 / g_0 + 1) / 3$ ，但是在等效自旋链中相互作用能(5.3.6)是格点依赖的。这里我们主要研究非均匀等效自旋 1 的链作为量子通道的优越性。

从一个地方传到另一地方传输一个已知或者未知的自旋 1 的量子态已经有很多

研究结果[142][143]。最初的方案是，量子态的转移涉及到初始化 N 个格点的自旋链，第一个自旋在任意态 $|\psi\rangle = \xi_{-1}|-1\rangle + \xi_0|0\rangle + \xi_1|1\rangle$ ($\sum_m |\xi_m|^2 = 1$)，且与剩下的链是没有耦合的。在 $t=0$ 时刻，第一个自旋的自旋链突然耦合到一起，然后让系统在自旋链上自由演化。在 t 时刻，量子态 $|\psi\rangle$ 传输到自旋链上最后一个自旋的能力可以通过计算在格点 N 获得态 $|\psi\rangle$ 的保真度来衡量。理想的传输过程意味着某一时间使自旋链的最后一个自旋达到 $|\psi\rangle$ 。我们考虑一个简单的情况，在 $t=0$ ，系统处在 $|\Psi(0)\rangle = |-1, 1 \dots 1\rangle$ 状态。我们的目的是探测在 t^* 时刻， $|1, \dots 1, -1\rangle$ 态达到的最大几率。定义态传递的保真度为

$$F(t) \equiv \left| \langle \Psi(t) | 1 \dots 1, -1 \rangle \right|^2, \quad (5.3.13)$$

它依赖于本征态 $|E_s^n\rangle$ 在基矢 $|1 \dots 1, -1\rangle$ 和 $|-1, 1 \dots 1\rangle$ 上的展开系数。 $F \equiv F(t^*)$ 表示在中间某个时刻获得的最大值。图 5.8 给出了态转移的最大保真度随 g_0/g_2 的变化。对于粒子数 $N=4$ 的系统，当势阱频率为 $\omega = 40\text{kHz}$ ，相互作用强度 $g_2 = 20\sqrt{\hbar^3\omega/m}$ 时，最大保真度出现的时间 t^* 的范围是从 $10^{-2}s$ 到 $1.5s$ ，随着 g_0/g_2 是随机变化的。我们比较了长度为 $N=4$ 到 8 的 HBB 和等效自旋链的保真度 F ，发现等效自旋链转移态的最大保真度整体上比 HBB 自旋链要高，特别是较长的自旋链。随着粒子数 N 的增加，最大保真度 F 是减小的。在可积点 $g_0/g_2=1$ ，两种自旋链模型的保真度都达到最大值，而在整个相互作用区域，有效自旋链总是提供了一个传递量子态更有效的方式。

5.4 小结

一维多组分束缚势阱强相互作用系统可以用等效自旋链来描述。对于玻色子和费米子都是适用的。外势的不同会导致不同格点间的耦合强度不同。我们主要研究了自旋 1 玻色子系统的能级交叉以及能级排布随总自旋的变化，给出了铁磁和反铁磁区域能级的排布规律。同时还研究了依赖于自旋的磁场梯度以及横向磁场对系统的影响。依赖于自旋的磁场梯度和横向磁场都会降低系统的对称性，消除能级简并。对于多组分的系统，混合动力学是一个很有趣的现象。基于等效自旋链的方便求解，我们研究了强相互作用区域的自旋交换动力学。研究其振荡的规律。对于自旋 1 的系统，希尔伯特空间要比自旋 1/2 的系统大，为量子信息的传递和编码提供了更安全的通道。进而，我们还研究量子态传输的最大保真度，发现格点依赖的不均匀的耦合参数导致量子态传输过程中的最大保真度更大。

第六章 费米子 $SU(n)$ 对称系统能级的精确排布

超冷原子实验的精确可控为研究新奇的物理现象提供了一个很好平台，在固体系统中是不容易实现的[144]。例如，超精细大自旋冷原子系统由于其内在的 $SU(n)$ 高对称性表现出奇异的量子磁性，不同于通常只具有 $SU(2)$ 对称性的大自旋固体系统。具有 $SU(n)$ 对称性的大自旋碱金属和碱土金属费米子已经在实验上实现[145]-[153]。实验进展也激发了相关的理论研究，展示了 $SU(n)$ 高对称性给量子磁性和配对超流带来哪些不同的特点[154]-[158]。在强相互作用极限下，一维多组分系统可以用自旋交换模型来描述，并用来研究 $SU(n)$ 对称的自旋系统的量子磁性[159]-[167]。

对于一维囚禁的单粒子问题，波函数的节点个数就可以确定能级的排布。振荡定理（或称为 Sturm 定理）给出基态波函数的节点数目为 0（无穷远点除外），第 n 激发态的波函数的节点数目为 n 。单粒子的能级排布问题还是很容易的，但是对于相互作用的多粒子一维系统，给出其能级排布并不是那么容易。Lieb-Mattis 定理给出了能级排布与波函数对称性的关系。但是仍然有一些不能比较，这一章，我们通过求解少体系统，研究 $SU(n)$ 系统的能级排布。

6.1 Lieb-Mattis 定理

Lieb-Mattis 定理 I: 囚禁在一维对称势阱中的 N 个电子，这里的外势不能依赖自旋和速度，这时系统的能级排布与总自旋有关，如果 $S > S'$ ，则 $E(S) > E(S')$ [112]。

这里用两个费米子的情况来解释 Lieb-Mattis 定理 I，两个自旋 1/2 粒子的哈密顿量可以写成为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx_2^2} + V(x_1, x_2), \quad (6.1.1)$$

这里的 V 可以是任意对称的外势。也就是说，粒子相互间可以有相互作用，或者没有外势存在。这时总自旋是一个好量子数，总自旋可以是 $S=0$ 或者 1，这个定理告诉我们基态的总自旋是 $S=0$ 。我们知道系统的波函数由两部分构成，一部分是坐标波函数，一部分是自旋波函数。由于整体的费米子波函数是满足交换反对称，总自旋 $S=0$ 对应的本征态的形式为

$$\Psi_0 = \phi_S(x_1, x_2) \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right), \quad (6.1.2)$$

这里 $\phi_S(x_1, x_2)$ 是满足交换对称的实函数。总自旋 $S=1$ 对应的本征态的形式为

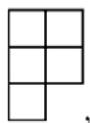
$$\Psi_1 = \phi_A(x_1, x_2) |\uparrow\uparrow\rangle,$$

这里 $\phi_A(x_1, x_2)$ 是满足交换反对称的。这里自旋部分的波函数我们选取的是磁量子数 $S_z = 1$ 的，也可以选取其它的。 $S=1$ 的三重态都是满足交换对称的。对于交换对称的波函数可以满足 $\phi_S(x_1, x_2) > 0$ ，但是对于反对称的波函数 $\phi_A(x_1, x_2)$ ，在 $x_1 = x_2$ 的地方一定是等于 0 的，因此 $S=0$ 本征态的能量总是小于 $S=1$ 本征态的能量。如果 $E(S)$ 表示给定自旋 S 的最低能量，那么 $E(0) < E(1)$ 。对于多粒子的情况也是满足的，但是上面的定理只适用于两组分的情况，对于多组分就不再适用， S 就不能很好的排序能级了。在某些特定的情况，Lieb-Mattis 定理 I 推广到多组分的情况，但不能用 S 来标记能级。

能级的排布和波函数的对称性是相关的。对于多组分的费米子来说，波函数由自旋部分和坐标部分波函数构成，虽然整体的波函数是满足交换反对称的，但是自旋部分和坐标部分分别满足不同的对称性，就会导致能量有所不同。对于对称性分类，最熟知的方式就是用杨图来区分。杨图对应的杨算符是一个对称操作的算符。在介绍下一个定理以前，首先介绍一下杨图。每个杨图可以和一组整数配分数 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 对应，满足

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

λ_i 表示杨图中第 i 行的格子数目。在杨图中上面行的格数不少于下面行的格数，左面列的格数不少于右面列的格数，例如



对应 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$ 。杨图的列数或者行数不超过总的格子数目 n 。横向的格子对应置换对称的操作，纵向的格子对应置换反对称的操作。杨图对应的对称操作是所有横向置换之和乘以所有纵向的反对称置换之和。例如， $\square\square$ 表示交换对称操作 $(1+P_{12})$ ， $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ 表示交换反对称操作 $(1-P_{12})$ ，这里 P_{12} 是置换算符。因此对称性分类可以用杨图表示。

下面介绍 pouring 原则， α 和 β 是两个不同对称性分类，如果 α 对应的杨图向右移动格子，可以得到 β 对应的杨图。我们可以说 α 灌注 β ，也可以认为 α 的反对

称性要高于 β 。更一般的表达方式为， α 的杨图每一列格子的个数满足 $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots$ ， β 的满足 $n'_1 \geq n'_2 \geq n'_3 \geq \dots$ ，如果满足 $n_1 \geq n'_1$ ； $(n_1 - n'_1) + n_2 \geq n'_2$ ； $(n_1 - n'_1) + (n_2 - n'_2) + n_3 \geq n'_3$ ；等等，这里只要有列消失了就可以认为是 $n=0$ 。对于两分量的系统，总自旋和杨图具有共同的本征态，对应坐标部分波函数的杨图只有两列，自旋部分波函数的杨图只有两行。因此所有的对称性分类都满足 pouring 原理。当 α 的杨图向左移动一个格子，再向右移动一个格子得到 β ，这时就不满足 pouring 原理，因此两个杨图中至少有一个要有三列或者三行才不满足这个原理。

Lieb-Mattis 定理 II: α 和 β 属于不同的对称性分类， $E(\alpha)$ 和 $E(\beta)$ 分别是表示两个对称性分类的基态能量。如果 α 可以灌注 β ，则 $E(\alpha) > E(\beta)$ 。

Lieb-Mattis 定理 II 是 Lieb-Mattis 定理 I 的一个扩展，同时也包含 Lieb-Mattis 定理 I。对于费米子系统只要满足 $SU(n)$ 对称性，外势与自旋和速度无关，满足 pouring 原理的对称性分类，总是可以比较能级的。

6.2 $SU(n)$ 对称性系统的能级排布

对于一维 n 组分具有 $SU(n)$ 对称性的费米子系统，可以用下面的哈密顿量描述

$$H = \sum_i^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_i) \right] + g \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j). \quad (6.2.1)$$

这里假定不同组分间的相互作用强度 g 是相同的。由于相互作用不依赖于自旋，各个组分的粒子数是守恒的。

6.2.1 均匀系统

首先，我们考虑均匀系统的情况：在 $x_i \in (-L/2, L/2)$ 区间 $V(x_i) = 0$ ，在其他区域 $V = \infty$ ，在开边界条件下波函数满足 $\Psi(x_i = \pm L/2) = 0$ ，为了方便，引入相互作用强度 $c = mg / \hbar^2$ ，并且在下面的计算中选取自然单位 $\hbar^2 = 2m = 1$ 。这个系统可以用 BA 方法精确求解[168]-[170]，对应的 Bethe ansatz 方程为：

$$2k_j L = 2\pi I_j - \sum_{\alpha=1}^{M_1} \left[\theta \left(\frac{k_j - \lambda_{\alpha}^1}{c/2} \right) + \theta \left(\frac{k_j + \lambda_{\alpha}^1}{c/2} \right) \right], j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.2.2)$$

分别表示。 (n_1, n_2, n_3, n_4) 中的 n_r ($r=1, \dots, 4$) 表示杨图中第 r 列的格子的个数。第 r 列的格子的个数与第 r 分量的粒子数目 n_r 是相同的。例如 $(1, 1, 1, 1)$ 表示杨图 $\square\square\square\square$ ，与各分量的粒子数分布为 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ 是对应的。这里我们用的杨图的表示并非常规的表示方式，但是与文献[171]是相同的。

根据 LM 定理 II, 对于高对称系统, 不同对称分类的基态的能量如果满足 pouring 原理就可以比较。对于 $SU(2)$ 的系统所有的对称性分类都满足 pouring 原理。然而对于 $SU(n)$ 总是有一些对称性分类是不满足 pouring 原理的, 例如, 对于六个粒子满足 $SU(4)$ 对称性系统的两个对称性分类 $(3, 3)$ 和 $(4, 1^2)$ 就没有办法比较, 因此我们利用 LM 定理 II 就不能确定哪个能量更低。

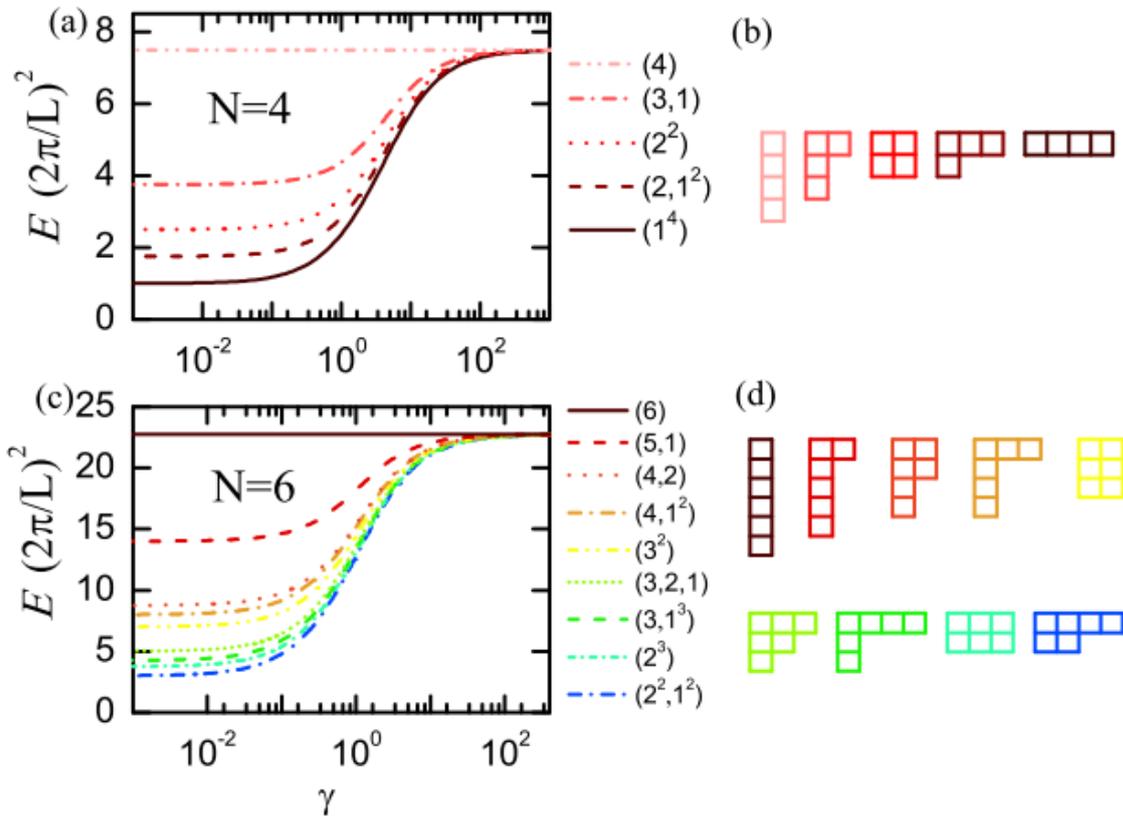


图 6.2 对于粒子数(a) $N=4$ 和(b) $N=6$ 具有 $SU(4)$ 对称性系统, 不同置换对称性分类的基态能量随无量纲相互作用强度 γ 的变化。(a)从虚点点线到实线分别对应不同对称性分类的基态。相应的对称性可以由坐标部分波函数的杨图(b)来描述。(c)从实线到点虚线对应的不同对称性分类可以用(d)中的杨图来描述

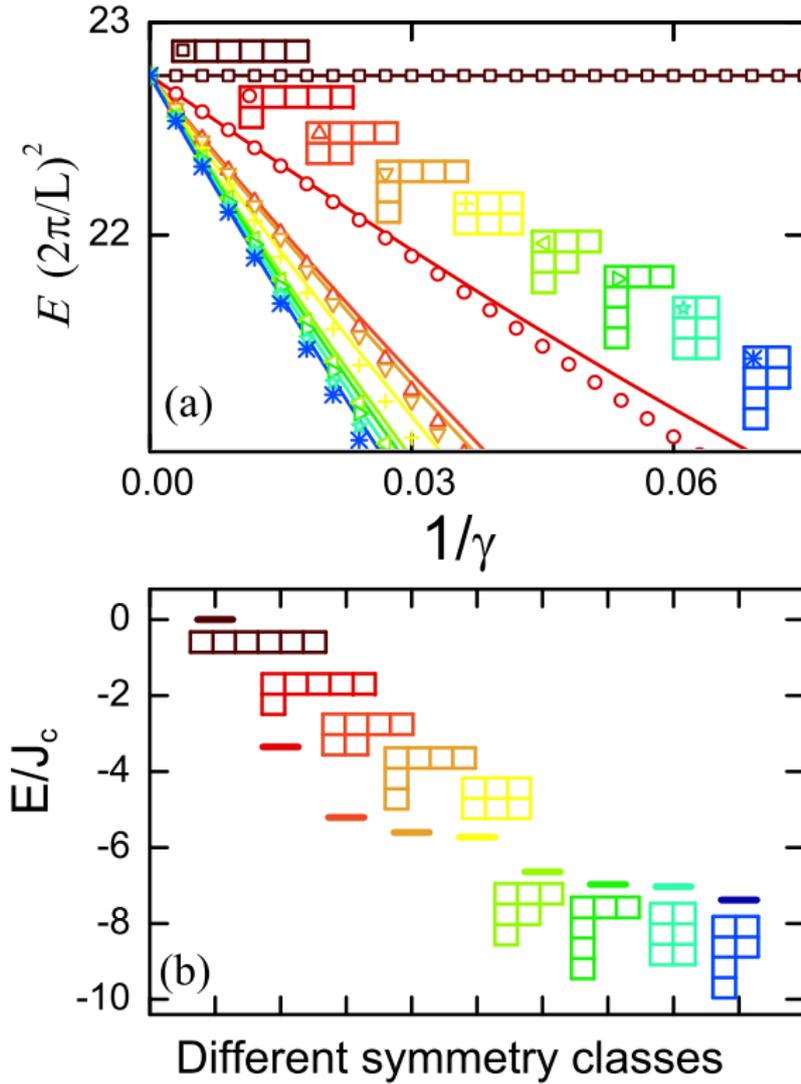


图 6.3 (a)不同的对称性分类的最低能量随无量纲相互作用强度 γ 的变化。离散的符号表示通过求解有效自旋链得到的结果。实线是通过求解 BA 方程得到的结果。(b) 对于 $N=6$ 具有 $SU(4)$ 对称性的谐振子，通过对角化等效自旋链得到不同对称性分类的最低能量。这里我们用自旋部分波函数的杨图(b)来描述不同的对称性分类，这里的杨图和图 6.2(d)坐标部分波函数的杨图是互为共轭的

根据 BA 方程中量子数和对称性分类独特的一一对应的关系，我们可以数值求解 BA 方程计算出每个给定的对称性分类的最低能量。BA 方程中求解给定粒子数分布的最低能量的量子数的选取为 $\{I_j\} = \{1, 2, \dots, N\}$ 和 $\{J'_\alpha\} = \{1, 2, \dots, M_r\}$ 。在图 6.2 中我们展示了自旋 3/2 具有 $SU(4)$ 对称性的费米子气体的结果。图 6.2(a)给出了对于粒子数为 $N=4$ 的情况，5 种不同的粒子数分布对应的最低能量排布与对称性分类的关系 $E(4) > E(3,1) > E(2,2) > E(2,1^2) > E(1^4)$ ，这个排布在除了 TG 极限情况

下 $\gamma \rightarrow \infty$ 的整个区域 $0 \leq \gamma < \infty$ 都满足, 这里 $\gamma = cL/N$ 是无量纲的相互作用强度。在 TG 极限情况下, 能量都是相同的。显然, 这与 LM 定理 II 给出的能级排布的结果是一样的, 这五个不同的对称性分类根据 pouring 原理都是可以比较的。然而对于粒子数为 $N=6$ 的情况, (3^2) 和 $(4,1^2)$ 彼此就不满足 pouring 原理, 因此 LM 定理 II 就不能判断 $E(3^2)$ 和 $E(4,1^2)$ 哪个能量更低。同样, 利用 pouring 原理, $E(3,1^3)$ 和 $E(2^3)$ 也是不能比较的。与 $N=4$ 的情况类似, 对于 $N=6$ 的情况所有的对称性分类都能通过求解 BA 方程来确定, 能级排布的结果展示在图 6.2(c)。通过对称性分类所有的能级都能给出了一个排序, 很明显 $E(4,1^2) > E(3^2)$, $E(3,1^3) > E(2^3)$ 。我们的结果超出了 LM 定理 II 比较能级的范围。

下面我们重点研究强相互作用区域的能级排布。在强排斥区域 ($cL/N \gg 1$), 自旋速度 $\lambda_\alpha^{(r)}$ 正比于 c , 准动量 k_j 是有限值。将方程(6.2.3)式展开到 k_j/c 的一阶, 准动量可以写成 $2k_j L = 2\pi I_j - 2\zeta k_j/c + O(|c|^{-3})$, 可以得到 $k_j = \pi I_j / L(1 + \zeta/cL)$, 这里

$$\zeta = \sum_{\alpha=1}^{M_1} \frac{4}{1 + 4(\gamma_\alpha^1)^2}. \quad (6.2.4)$$

$\gamma_\alpha^n \equiv \lambda_\alpha^n / c$ 和 γ_α^1 由下面的方程

$$\begin{aligned} 2N\theta(2\gamma_\alpha^1) = 2\pi J_\alpha^1 - \sum_{\beta \neq \alpha}^{M_1} [\theta(\gamma_\alpha^1 - \gamma_\beta^1) + \theta(\gamma_\alpha^1 + \gamma_\beta^1)] \\ - \sum_{\gamma=1}^{M_2} [\theta(2\gamma_\alpha^1 - 2\gamma_\gamma^2) + \theta(2\gamma_\alpha^1 + 2\gamma_\gamma^2)] \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

来确定。这个方程是通过将第二个 BA 方程(6.2.3)式展开得到的, 也就是说让方程(6.2.4)中的 $r=1$, 展开到 k_j/c 的一阶。上面的方程不能完全确定 γ_α^1 , 因为还包含了 γ_α^2 , 需要反复的迭代下面的方程

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \neq \alpha}^{M_r} [\theta(\gamma_\alpha^r - \gamma_\beta^r) + \theta(\gamma_\alpha^r + \gamma_\beta^r)] = 2\pi J_\alpha^r \\ + \sum_{\gamma=1}^{M_{r+1}} [\theta(2\gamma_\alpha^r - 2\gamma_\gamma^{r+1}) + \theta(2\gamma_\alpha^r + 2\gamma_\gamma^{r+1})] \\ + \sum_{\delta=1}^{M_{r-1}} [\theta(2\gamma_\alpha^r - 2\gamma_\delta^{r-1}) + \theta(2\gamma_\alpha^r + 2\gamma_\delta^{r-1})], \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$\alpha = 1, \dots, M_r (r = 2, \dots, n-1)$, 这里 $\gamma_\alpha^r = \lambda_\alpha^r / c$ 。SU(n) 费米子系统的基态能量保留到 c^{-1} , 可以得到

$$E = E_F \left(1 - \frac{2}{cL} \zeta \right) = E_F \left(1 - 2 \frac{\zeta / N}{\gamma} \right), \quad (6.2.7)$$

这里

$$E_F = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} \quad (6.2.8)$$

是 $c = \infty$ 时的能量，与完全极化费米气体的能量相同，符合一般的玻色费米映射 [113][172]-[174]。

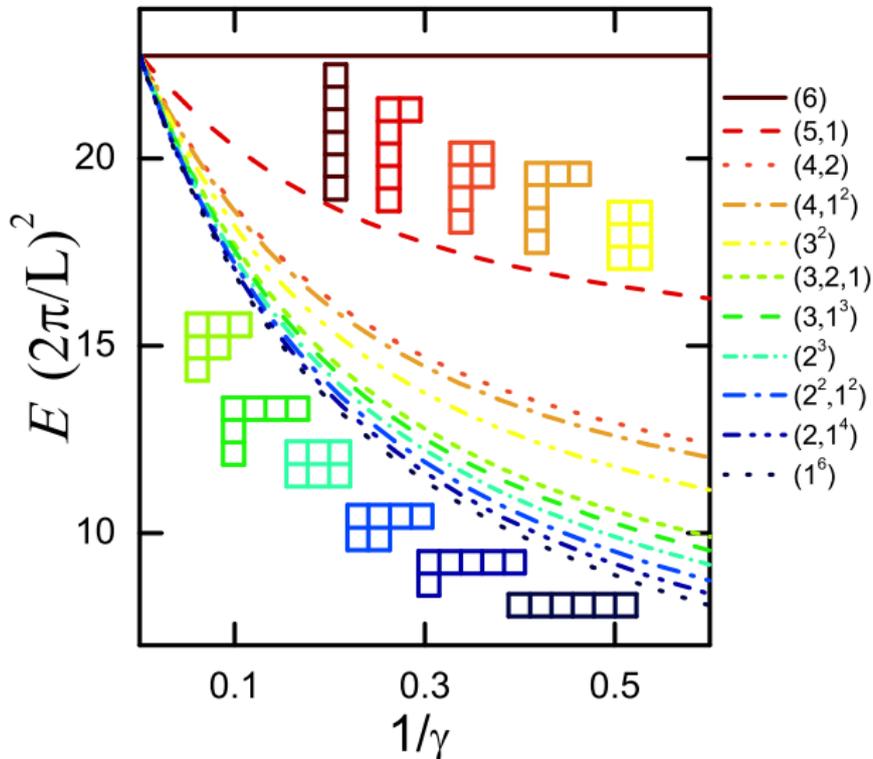


图 6.4 对于粒子数为 $N=6$ ，具有 $SU(6)$ 对称性系统的 11 个对称性分类的基态能量随无量纲相互作用强度 γ 的变化。从暗红的实线到深蓝的点线对应着不同对称性的分类的最低能量。图中的插图是不同对称性分类的杨图

方程(6.2.5)和(6.2.6)正是开边界条件具有 $SU(n)$ 对称性的海森堡自旋链

$$H_S = J \sum_{i=1}^{N-1} (P_{i,i+1} - 1), \quad (6.2.9)$$

的 Bethe 方程，这里 $P_{i,i+1}$ 是交换第 i 和第 $i+1$ 个粒子自旋态的置换算符。 $J>0$ 时， H_S 的基态能量是 $E_S = -J\zeta$ [175]。通过与 (6.2.7) 式比较，发现在强相互作用极限下等

效哈密顿量可以由 $H_{eff} = H - E_F = H_S$ 给出。这里交换参数为 $J = 2\epsilon_F / \gamma$, $\epsilon_F = E_F / N$ 是平均费米子能量。图 6.3(a)展示了粒子数 $N=6$ 均匀系统在强排斥相互作用极限下 H 的能谱。在无穷排斥相互作用极限 $\gamma \rightarrow \infty$, 所有不同对称性分类的能级简并。当相互作用强度离开 TG 极限, 能级劈裂, 对于属于不同对称性分类 H_S 的基态能量取不同的值。劈裂能级的排序可以用不同的自旋部分波函数的杨图来区分。自旋部分波函数的杨图和空间部分波函数的杨图互为共轭 (如图 6.1)。

我们的结果可以推广到 n 很大的情况, 多组分 $SU(n)$ 对称性的系统。例如, 对于 6 个粒子 $SU(6)$ 对称性的系统, 我们求解 $n=N=6$ 的 BA 方程, 得到 11 个对称性分类的基态能量, 如图 6.4 所示。与 $SU(4)$ 的情况比较, 这里多了两个对称性分类 (5,1) 和 (6), 同样这里存在由 pouring 定理不能比较的对称性分类, 例如 (3^2) 和 $(4,1^2)$, 同样还有 $(3,1^3)$ 和 (2^3) 。然而我们的结果证明不同的对称性分类的基态能量由杨图唯一的确定, 能级排布为 $E(6) \geq E(5,1) \geq E(4,2) \geq \dots \geq E(2,1^4) \geq E(1^6)$, 只有在 TG 极限的情况下, 等号才是成立的。结果表明在相互作用的整个区域排序都是不变的。

6.2.2 非均匀系统

在上一章我们介绍了强相互作用系统可以很好的用等效自旋链来描述。上一节我们也给出了均匀系统的等效自旋链。这一节, 我们主要研究非均匀具有 $SU(n)$ 对称性系统的能级排序。非均匀具有 $SU(n)$ 对称性系统的等效自旋链为

$$H_{eff} = \sum_{i=1}^{N-1} J_i (P_{i,i+1} - 1), \quad (6.2.10)$$

这与均匀系统不同的是交换系数是格点依赖的, J_i 的定义在上一章已经给出。下面我们考虑外势为谐振子 $V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$ 的情况。当粒子数为 $N=6$, 交换参数为 $J_3 \equiv J_c$, $J_1 = J_5 = 0.5743J_c$, $J_2 = J_4 = 0.8956J_c$, 这里 J_c 表示在势阱中心的两个自旋的等效交换强度。通过直接对角化对应的自旋链模型, 就可以得到强相互作用非均匀系统的能级排序, 如图 6.3(b)所示, 能级排布可以由他们的对称性唯一的确定, 与均匀系统的结果是一致的。我们的结果表明从一维无限深势阱过渡到谐振子势阱不会影响对称性分类的能级排布。

6.3 小结

这一章, 我们主要研究了一维多组分 $SU(n)$ 对称性系统的能级排布。Lieb Mattis 定理可以给出满足 pouring 定理的不同对称性分类的能级排布。对于不满足 pouring

定理的对称性分类是不能比较的。我们基于 BA 的精确解结果，给出均匀系统能量排布与量子数的对应关系。量子数分布与基态波函数的对称性分类是一一对应的。因此我们可以给出所有对称性分类的能级排布，包括不满足 pouring 定理的对称性分类。对于强相互作用区域，通过将 BA 方程做级数展开，系统可以用交换系数为常数的 $SU(n)$ 自旋交换模型来描述。对于非均匀的系统，外势为谐振子势阱的情况，同样可以用自旋交换模型来描述，唯一的不同是自旋交换系数不再是常数。通过求解等效自旋链，可以发现我们的排序规则同样适用于非均匀的系统。我们的结果为高自旋 $SU(n)$ 对称性体系提供了一个更一般的能级排序规则。

第七章 总结与展望

随着冷原子实验迅速发展，实验上的精确操控，使得少体系统的研究成为目前关注的热点。本论文主要受到当前冷原子少体实验的启发，通过变分法，Bethe ansatz 方法，以及微扰论分析求解少体系统。本论文的主要内容可以分成三大部分：第一部分也就是文章的第一章主要介绍了本论文工作涉及到的部分研究背景知识和相关实验进展等内容；第二部分主要研究了一维两体问题，用不同的方法求解了亚稳态势阱及双势阱中两个原子的能谱以及密度分布，涵盖了第三，四章；第三部分主要研究了强相互作用的自旋 1 和具有 $SU(n)$ 对称性的少体原子系统，通过等效 Heisenberg 自旋链模型，给出系统的能级排布，研究其动力学性质，涵盖了第五，六章。

第三章介绍了两个粒子在亚稳态势阱的隧穿理论和两个粒子在谐振子势阱中的精确解。然后给出一个试探波函数，通过变分法给出两个有相互作用的费米子在谐振子势阱的基态能量以及基态波函数。与文献[64]中的试探波函数比较，我们主要考虑了波函数一阶导数的连续性，代替了 Bethe ansatz 的边界条件给出一个更准确，更符合实际情况的试探波函数。基态能量和密度分布与精确结果都吻合的很好。与精确解相比，我们给出的波函数的形式更为直观。由于多个相互作用费米子在谐振子中的情况是没有精确解的，谐振子又是实验中常见的外势，这里我们也希望用变分法可以实现求解多个粒子的基态波函数以及能量。

第四章首先通过 Bethe-ansatz 假设给出了 N 个粒子在双阱中的波函数，利用边界条件给出波函数中系数的比值关系，化简得到准动量的限制条件，即一组 Bethe-ansatz 方程，求解这些方程得到系统的能谱。接着重点研究了两个粒子的情况。用 Bethe ansatz 给出的精确结果，只能求出奇宇称的解。通过求解 Bethe-ansatz 方程给出了 $|b\rangle$ 态的占据几率随相互作用强度的变化，发现占据几率明显的依赖于相互作用强度，与双模近似的结果差异很大。接着研究初态为 NOON 态的隧穿动力学，得到不同相互作用强度下占据几率的振荡规律。

第五章，我们主要研究了强相互作用系统，通过玻色费米映射结合微扰论给出一维多组分束缚势阱强相互作用系统的等效自旋链，适用于玻色子和费米子。外势会导致格点间的耦合强度的不同。对自旋 1/2 系统的等效自旋链，分析了波函数的密度分布和能级排布的规律。然后重点研究了自旋 1 玻色子系统，给出能级交叉以

及铁磁和反铁磁区域能级排布随总自旋的变化规律。同时还研究了依赖于自旋的磁场梯度以及横向磁场对系统的影响。依赖于自旋的磁场梯度和横向磁场都会破坏系统的对称性，使系统的对称性降低，能级的简并消除。对于多组分的系统，混合动力学是一个很有趣的现象。基于等效自旋链的方便求解，我们研究了强相互作用区域的自旋交换动力学。对于自旋 1 的系统，希尔伯特空间要比自旋 1/2 的系统大，为量子信息的传递和编码提供了更安全的通道。进而我们还研究了量子态的传输最大保真度，发现格点依赖不均匀的耦合参数量子态传输过程中的最大保真度更大。等效自旋链为研究强相互作用系统提供了一种手段，目前很多理论小组都以此为基础研究少体系统的基态相变，动量分布，能级的占据几率等等。

第六章主要研究了一维多组分 $SU(n)$ 对称性系统的能级排布。对于两组分的系统，满足 $SU(2)$ 对称性，此时系统的能级排布可以用总自旋 S 来标记。对于多分量的系统，Lieb Mattis 定理可以给出满足 pouring 定理的不同对称性分类的能级排布，对于不满足 pouring 定理的对称性分类是不能比较的。我们基于 BA 的精确解结果，给出均匀系统能量排布与量子数的对应关系。量子数分布与基态波函数的对称性分类是一一对应的。因此我们可以给出所有对称性分类的能级排布，包括不满足 pouring 定理的对称性分类。对于强相互作用区域，通过将 BA 方程做级数展开，系统可以用交换系数为常数的 $SU(n)$ 自旋交换模型来描述，也就是等效自旋链。对于非均匀的系统，外势为谐振子势阱的情况，同样可以用自旋交换模型来描述，唯一不同的是自旋交换系数不再是常数。通过求解等效自旋链，可以发现我们的排序规则同样适用于非均匀的系统。我们的结果为高自旋 $SU(n)$ 对称性体系提供了一个更一般的能级排序规则。

量子少体问题是当前的一个研究热点问题。少体系统的研究对于理解微观现象有很大的帮助，也为研究多体系统奠定了基础。

参 考 文 献

- [1] D. Blume. Few-body physics with ultracold atomic and molecular systems in traps. *Rep. Prog. Phys.*, 2012, 75, 046401.
- [2] G. Zürn, F. Serwane, F. Serwane, T. Lompe, A. N. Wenz, M. G. Ries, J. E. Bohn, and S. Jochim. Fermionization of two distinguishable fermions. *Phys. Rev. Lett.* 2012, 108, 075303.
- [3] G. Zürn, A. N. Wenz, S. Murmann, A. Bergschneider, T. Lompe, and S. Jochim. Pairing in few-fermion systems with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.* 2013, 111, 175302.
- [4] S. Will, T. Best, U. Schneider, L. Hackermüller, D.-S. Lühmann, and I. Bloch. Time-resolved observation of coherent multi-body interactions in quantum phase revivals. *Nature*, 2010, 465, 197-201.
- [5] A. N. Wenz, G. Zürn, S. Murmann, I. Brouzos, T. Lompe, and S. Jochim. From Few to Many: Observing the Formation of a Fermi Sea One Atom at a Time. *Science*, 2013, 342, 457-460.
- [6] S. Murmann, A. Bergschneider, V. M. Klinkhamer, G. Zürn, T. Lompe, and S. Jochim. Two fermions in a double well: Exploring a fundamental building block of the Hubbard model. *Phys. Rev. Lett.* 2015, 114, 080402.
- [7] A. M. Kaufman, B. J. Lester, C. M. Reynolds, M. L. Wall, M. Foss-Feig, K. R. A. Hazzard, A. M. Rey, C. A. Regal. Two-particle quantum interference in tunnel-coupled optical tweezers. *Science*, 2014, 345, 306-309.
- [8] S. Murmann, F. Deuretzbacher, G. Zürn, J. Bjerlin, S. M. Reimann, L. Santos, T. Lompe, and S. Jochim. Antiferromagnetic Heisenberg spin chain of a few cold atoms in one-dimensional trap. *Phys. Rev. Lett.* 2015, 115, 215301.
- [9] T. Busch, B.-G. Englert, K. Rzazewski, and M. Wilkens. Two cold atoms in a harmonic trap, *Found. Phys.* 1998, 28, 549.
- [10] H. A. Bethe. Zur Theorie der Metalle. *Z. Phys.*, 1931, 71, 205
- [11] E. H. Lieb and W. Liniger. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state. *Phys. Rev.* ,1963, 130, 1605

- [12] M. Gaudin. Un système à une dimension de fermions en interaction. *Phys. Lett. A*, 1967, 24, 55.
- [13] C. N. Yang. Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction. *Phys. Rev. Lett.* 1967, 19, 1312.
- [14] R. J. Baxter. One-dimensional anisotropic Heisenberg chain. *Ann. Phys.*, 1972, 70, 193.
- [15] E. H. Lieb and F. Y. Wu. Absence of Mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension. *Phys. Rev. Lett.* 1968, 20, 1445.
- [16] M. Jimbo. *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, Singapore. World Scientific, 1990.
- [17] V. E. Korepin and F. H. L. Essler. *Exactly Solvable Models of Strongly Correlated Electrons*. Singapore, World Scientific, 1994.
- [18] D. C. Mattis. *The Many-Body Problem: An Encyclopedia of Exactly Solved Models in One Dimension*. Singapore, World Scientific, 1993.
- [19] B. Sutherland, *Beautiful Models-70 years of exactly solved quantum many-body problems*, Singapore, World Scientific, 2004.
- [20] A. O. Gogolin, A. A. Nersisyan, and A. M. Tsvelik. *Bosonization and Strongly Correlated Systems*, Cambridge University Press, 1999.
- [21] T. Giamarchi. *Quantum Physics in One Dimension*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.* 2010, 82, 1225.
- [23] M. Olshani. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81, 938.
- [24] M. Rontani. Tunneling theory of two interacting atoms in a trap. *Phys. Rev. Lett.* 2012, 108, 115302.
- [25] M. Rontani. Pair tunneling of two atoms out of a trap. *Phys. Rev. A*, 2013, 88, 043633.
- [26] J. B. McGuire. Interacting Fermions in One Dimension. I. Repulsive Potential. *J. Math. Phys.* 1965, 6, 432.
- [27] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*, New York: Oxford

- University Press, 2003.
- [28] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [29] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 1961, 20, 454.
- [30] E. P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.* 1963, 4, 195.
- [31] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *J. Exp. Theor. Phys.* 1961, 40, 646.
- [32] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari. Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.* 1999, 71, 463.
- [33] M. A. Baranov. Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases. *Phys. Rep.* 2008, 464, 71.
- [34] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein and T. Pfau. The physics of dipolar bosonic quantum gases. 2009, 72, 126401.
- [35] F. Serwane, G. Zürn, T. Lompe, T. B. Ottenstein, A. N. Wenz, and S. Jochim. Deterministic preparation of a tunable few-fermion system. *Science*. 2011, 332, 236.
- [36] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. 2002, 415, 39.
- [37] M. Kohl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter and T. Esslinger, Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice: observing Fermi surfaces, dynamics and interactions. *Phys. Rev. Lett.* 2005, 94, 080403.
- [38] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate. *Nature*, 1998, 392, 151.
- [39] P. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen and B. J. Verhaar. Observation of a Feshbach resonance in cold atom scattering. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81, 69.
- [40] J. L. Roberts, N. R. Claussen, J. P. Burke, C. H. Greene, E. A. Cornell and C. E.

- Wieman. Resonant magnetic field control of elastic scattering in cold 85Rb , *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81,5109.
- [41] V. Efimov. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Phy. Lett. B*, 1970,33,563.
- [42] V. Efimov. Weakly bound states of three resonantly interacting particles. *Sov. J. Nucl. Phys.* 1970, 12, 598.
- [43] V. Efimov. Energy levels of three resonantly interacting particles. *Nucl. Phys. A*, 1973, 210, 157.
- [44] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H. C. Nägerl, and R. Grimm. Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of Caesium atoms. *Nature*, 2006, 440, 315.
- [45] A. M. Kaufman, B. J. Lester, and C. A. Regal. Cooling a single atom in an optical tweezer to its quantum ground state. *Phys. Rev. X*, 2012, 2, 041014.
- [46] A. M. Kaufman, B. J. Lester, C. M. Reynolds, M. L. Wall, M. Foss-Feig, K. R. A. Hazzard, A. M. Rey, and C. A. Regal. Two-particle quantum interference in tunnel coupled optical tweezers. *Science*, 2014, 345,306.
- [47] C. Regal. Interfering and entangling single neutral atoms. 46th Annual Meeting of the APS DAMOP, 2015, 60.
- [48] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953, Part II, 1092.
- [49] N. Dalarsson. Phase-integral approach to quantum-mechanical tunneling. *J. Math. Phys.* 1993, 34, 4436.
- [50] R. B. Dingle. *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Academic Press, New York, 1973, Chapter XIII.
- [51] C. S. Park, M. G. Jeong, S-K Yoo and D. K. Park. The WKB approximation with phase loss and anharmonicity effect. *Phys. Rev.* 1998, 58, 3443.
- [52] C. Lanczos. *Linear Differential Operators*. D. Van Nostrand London 1961, Chapter 7.
- [53] S. C. Miller Jr. and R. M. Good Jr. A WKB-type approximation to the Schrödinger equation. *Phys. Rev.* 1953, 91, 174.
- [54] K. Binder. Ising model, in *Encyclopedia of Mathematics*. M. Hazewinkel Ed.,

- Springer, Berlin, 2001.
- [55] L. Onsager. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Phys. Rev.* 1944, 65, 117.
- [56] L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev. The Quantum Method of the Inverse Problem and the Heisenberg XYZ Model. *Rush. Math. Surveys*, 34, 13 1979.
- [57] M. Takahashi, *Thermodynamics of One Dimensional Solvable Models*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999.
- [58] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki. Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.* 1987, 59, 799.
- [59] G. V. Uimin. One-dimensional problem for $S=1$ with modified antiferromagnetic Hamiltonian. *JETP Lett.* 1970, 12, 225; C. K. Lai. Lattice gas with nearest-neighbor interaction in one dimension with arbitrary statistics. *J. Math. Phys.* 1974, 15, 1675.
- [60] L. A. Takhtajan. The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spin. *Phys. Lett. A*, 1982, 87, 479.
- [61] A. V. Chubukov. Spontaneous dimerization in quantum-spin chains. *Phys. Rev. B*, 1991, 43, 3337.
- [62] P. Cheinet, S. Trotzky, M. Feld, U. Schnorrberger, M. Moreno-Cardoner, S. Fölling, and I. Bloch. Counting atoms using interaction blockade in an optical superlattice. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 101, 090404.
- [63] K. B. Cooper, M. Steffen, R. McDermott, R. W. Simmonds, Seongshik Oh, D. A. Hite, D. P. Pappas, and John M. Martinis. Observation of quantum oscillations between a Josephson phase qubit and a microscopic resonator using fast readout. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93, 180401.
- [64] D. Rubeni, A. Foerster, and I. Roditi. Two interacting fermions in a one-dimensional harmonic trap: Matching the Bethe ansatz and variational approaches. *Phys. Rev. A*. 2012, 86, 043619.
- [65] R. W. Simmonds, K. M. Lang, D. A. Hite, S. Nam, D. P. Pappas, and J. M. Martinis. Decoherence in Josephson phase qubits from junction resonators. *Phys. Rev. Lett.* 2004, 93, 077003.
- [66] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, and M. K. Oberthaler.

- Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. *Phys. Rev. Lett.* 2005, 95, 010402.
- [67] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, and A. E. Leanhard. Atom Interferometry with Bose-Einstein Condensates in a Double-well Potential. *Phys. Rev. Lett.* 2004, 92, 050405.
- [68] M. Saba, T. A. Pasquini, C. Sanner, Y. Shin, W. Ketterle, and D. E. Pritchard. Light scattering to determine the relative phase of two Bose-Einstein condensates. *Science*, 2005, 307, 1948.
- [69] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, and D. F. Walls. Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential. *Phys. Rev. A*, 1997, 55, 4318.
- [70] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* 1997, 79, 4950.
- [71] S. Zöllner, H.-D. Meyer, and P. Schmelcher. Few-Boson dynamics in double wells: from single-atom to correlated pair tunneling. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100, 040401.
- [72] S. Zöllner, H.-D. Meyer, and P. Schmelcher. Excitation of few-boson systems in one-dimensional harmonic and double wells. *Phys. Rev. A*, 2007, 75, 043608.
- [73] S. Zöllner, H.-D. Meyer, and P. Schmelcher. Tunneling dynamics of a few bosons in a double well. *Phys. Rev. A*, 2008, 78, 013621.
- [74] D. S. Murphy, J. F. McCann, J. Goold, and T. Busch. Boson pairs in a one-dimensional split trap. *Phys. Rev. A*, 2007, 76, 053616.
- [75] X. Yin, Y. Hao, S. Chen, and Y. Zhang. Ground-state properties of a few-boson system in a one-dimensional hard-wall split potential. *Phys. Rev. A*, 2008, 78, 013604 .
- [76] X. Lü, X. Yin, and Y. Zhang. Hard-core Bose-Fermi mixture in one-dimensional split traps. *Phys. Rev. A*, 2010, 81, 043607.
- [77] Y. Hao, Y. Zhang, J.-Q. Liang and S. Chen. Ground-state properties of one-dimensional ultracold Bose gases in a hard-wall trap. *Phys. Rev. A*, 2006, 73, 063617.
- [78] J. J. Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland, and D. J. Heinzen. Optimal frequency

- measurements with maximally correlated states. *Phys. Rev. A*, 1996, 54, R4649.
- [79] M. J. Holland and K. Burnett. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.* 1993, 71, 1355.
- [80] R. A. Campos, C. C. Gerry, and A. Benmoussa, Optical interferometry at the Heisenberg limit with twin Fock states and parity measurements. *Phys. Rev. A*, 2003, 68, 023810.
- [81] J. P. Dowling. Correlated input-port, matter-wave interferometer: Quantum-noise limits to the atom-laser gyroscope. *Phys. Rev. A*. 1998, 57, 4736.
- [82] F. Deuretzbacher, K. Fredenhagen, D. Becker, K. Bongs, K. Sengstock, and D. Pfannkuche. Exact solution of strongly interacting quasi-one-dimensional spinor Bose gases. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100, 160405.
- [83] F. Deuretzbacher, D. Becker, J. Bjerlin, S. M. Reimann, and L. Santos. Quantum magnetism without lattices in strongly interacting one-dimensional spinor gases. *Phys. Rev. A*, 2014, 90, 013611.
- [84] Lijun Yang and Xiaoling Cui. Effective spin-chain model for strongly interacting one-dimensional atomic gases with an arbitrary spin. *Phys. Rev. A*, 2016, 93, 013617.
- [85] Li Yang, Limin Guan, and Han Pu. Strongly interacting quantum gases in one-dimensional traps. *Phys. Rev. A*, 2015, 91, 043634.
- [86] Li Yang and Han Pu. Bose-Fermi mapping and a multibranch spin-chain model for strongly interacting quantum gases in one dimension: Dynamics and collective excitations. *Phys. Rev. A*, 2016, 94, 033614.
- [87] E. J. Lindgren, J. Rotureau, C. Forssen, A. G. Volosniev, and N. T. Zinner. Fermionization of two-component few-fermion systems in a one-dimensional harmonic trap. *New J. Phys.* 2014, 16, 063003.
- [88] A. G. Volosniev, D. Petrosyan, M. Valiente, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and N. T. Zinner. Engineering the dynamics of effective spin-chain models for strongly interacting atomic gases. *Phys. Rev. A*, 2015, 91, 023620.
- [89] Haiping Hu, Limin Guan, and Shu Chen. Strongly interacting Bose-Fermi mixtures in one dimension. *New J. Phys.* 2016, 18, 025009.
- [90] Lijun Yang, Xiwen Guan, and Xiaoling Cui. Engineering quantum magnetism in

- one-dimensional trapped Fermi gases with p-wave interactions. *Phys. Rev. A*, 2016, 93, 051605.
- [91] Haiping Hu, L. Pan, Shu Chen. Strongly interacting one-dimensional quantum gas mixtures with weak p-wave interactions. *Phys. Rev. A*, 2016, 93, 033636.
- [92] F. Deuretzbacher, D. Becker, and L. Santos, *Phys. Rev. A*, 2016, 94, 023606.
- [93] F. Deuretzbacher, D. Becker, J. Bjerrin, S. M. Reimann, L. Santos. Spin-chain model for strongly interacting one-dimensional Bose-Fermi mixtures. arXiv:1611.04418.
- [94] A. S. Dehkharghani, A. G. Volosniev, E. J. Lindgren, J. Rotureau, C. Forsn, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and N. T. Zinner. Quantum magnetism in strongly interacting one-dimensional spinor Bose systems. *Scientific reports*, 2015, 5, 16075.
- [95] A. G. Volosniev. Strongly Interacting One-Dimensional Systems with Small Mass Imbalance. arXiv:1611.10051.
- [96] R. E. Barfknecht, A. Foerster, and N. T. Zinner. Dynamical realization of magnetic states in a strongly interacting Bose mixture. arXiv:1612.01570.
- [97] A. G. Volosniev, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, M. Valiente, and N. T. Zinner. Strongly interacting confined quantum systems in one dimension. *Nat. Commun.* 2014, 5, 5300.
- [98] A. G. Volosniev, D. Petrosyan, M. Valiente, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and N. T. Zinner. Engineering the dynamics of effective spin-chain models for strongly interacting atomic gases. *Phys. Rev. A*, 2015, 91, 023620.
- [99] J. Levinsen, P. Massignan, G. M. Bruun, and, M. M. Parish. Strong-coupling ansatz for the one-dimensional Fermi gas in a harmonic potential. *Sci. Adv.* 2015, 1, e1500197.
- [100] P. Massignan, J. Levinsen, and M. M. Parish. Magnetism in Strongly Interacting One-Dimensional Quantum Mixtures. *Phys. Rev. Lett.* 2015, 115, 247202.
- [101] M. D. Girardeau. Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension. *J. Math. Phys.* 1960, 1, 516.
- [102] M. D. Girardeau. Two super-Tonks-Girardeau states of a trapped one-dimensional spinor Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 2010, 82, 011607(R).

- [103] T. Cheon and T. Shigehara. Realizing discontinuous wave functions with renormalized short-range potentials. *Phys. Lett. A*, 1998, 243, 111.
- [104] T. Cheon and T. Shigehara. Fermion-boson duality of one-dimensional quantum particles with generalized contact interactions. *Phys. Rev. Lett.* 1999, 82, 2536.
- [105] D. Sen. Perturbation theory for singular potentials in quantum mechanics. *Int. J. Mod. Phys. A*, 1999, 14, 1789-1807.
- [106] D. Sen. The fermionic limit of the δ -function Bose gas: a pseudopotential approach. *J. Phys. A*, 2003, 36, 7517.
- [107] H. Grosse, E. Langmann, and C. Pautler. Exact solution of a 1D quantum many-body system with momentum-dependent interactions. *J. Phys. A*, 2004, 37, 4579.
- [108] Y. Hao, Y. Zhang, and S. Chen. One-dimensional fermionic gases with attractive p-wave interaction in a hard-wall trap. *Phys. Rev. A*, 2007, 76, 063601.
- [109] M. D. Girardeau, H. Nguyen, and M. Olshanii. Effective interactions, Fermi-Bose duality, and ground states of ultracold atomic vapors in tight de Broglie waveguides. *Opt. Commun.* 2004, 243, 3.
- [110] M. D. Girardeau, and M. Olshanii. Theory of spinor Fermi and Bose gases in tight atom waveguides. *Phys. Rev. A*, 2004, 70, 023608.
- [111] Xiaoling Cui and T.-L. Ho. Ground-state ferromagnetic transition in strongly repulsive one-dimensional Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 2014, 89, 023611.
- [112] E. H. Lieb and D. Mattis. Theory of ferromagnetism and the ordering of electronic energy levels. *Phys. Rev.* 1962, 125, 164.
- [113] L. Guan and S. Chen. Super-Tonks-Girardeau gas of spin-1/2 interacting fermions. *Phys. Rev. Lett.* 2010, 105, 175301; L. Guan, S. Chen, Y. Wang, and Z. Q. Ma. Exact solution for infinitely strongly interacting Fermi gases in tight waveguides. *Phys. Rev. Lett.* 2009, 102, 160402.
- [114] T.-L. Ho. Spinor Bose condensates in optical traps. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81, 742.
- [115] T. Ohmi and K. Machida. Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1998, 67, 1822.
- [116] C. D. Hamley, E. M. Bookjans, G. Behin-Aein, P. Ahmadi, and M. S. Chapman. Photoassociation spectroscopy of a spin-1 Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*,

- 2009, 79, 023401.
- [117] Xiaoling Cui. Multichannel scattering resonance of one-dimensional ultracold spinor bosons. *Phys. Rev. A*, 2014, 90, 022705.
- [118] I. Affleck. Quantum spin chains and the Haldane gap. *J. Phys. Condens. Matter*. 1989, 1, 3047.
- [119] S. K. Yip. Dimer state of spin-1 bosons in an optical lattice. *Phys. Rev. Lett.* 2003, 90, 250402.
- [120] L. Chen, H. Pu, and Y. Zhang. Spin-orbit angular momentum coupling in a spin-1 Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 2016, 93, 013629.
- [121] Y. Jiang, P. He, and X.-W. Guan. Universal low-energy physics in 1D strongly repulsive multi-component Fermi gases. *J. Phys. A*, 2016, 49, 174005.
- [122] D. M. Stamper-Kurn and Masahito Ueda. Spinor Bose gases: Symmetries, magnetism, and quantum dynamics. *Rev. Mod. Phys.* 2013, 85, 1191.
- [123] C. K. Law, H. Pu, and N. P. Bigelow. Quantum spins mixing in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81, 5257.
- [124] M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman. Observation of spinor dynamics in optically trapped Rb 87 Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* 2004, 92, 140403.
- [125] B. Naylor, M. Brewczyk, M. Gajda, O. Gorceix, E. Maréchal, L. Vernac, and B. Laburthe-Tolra. Competition between Bose-Einstein Condensation and Spin Dynamics. *Phys. Rev. Lett.* 2016, 117, 185302.
- [126] W. Zhang, S. Yi and L. You. Mean field ground state of a spin-1 condensate in a magnetic field. *New J. Phys.* 2003, 5, 77.
- [127] S. Yi and H. Pu. Spontaneous spin textures in dipolar spinor condensates. *Phys. Rev. Lett.* 2006, 97, 020401.
- [128] L. Santos and T. Pfau. Spin-3 chromium bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* 2006, 96, 190404.
- [129] D. L. Campbell, R. M. Price, A. Putra, A. Valdés-Curiel, D. Trypogeorgos, and I. B. Spielman. Magnetic phases of spin-1 spin-orbit-coupled Bose gases. *Nat. Commun.* 2016, 7, 10897.
- [130] N. Navon, A. L. Gaunt, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic. Critical dynamics of

- spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas. *Science*, 2015, 347, 167.
- [131] J. Kronjäger, C. Becker, P. Navez, K. Bongs, and K. Sengstock. Magnetically tuned spin dynamics resonance. *Phys. Rev. Lett.* 2006, 97, 110404.
- [132] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle. Optical confinement of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 80, 2027.
- [133] Y. Liu, E. Gomez, S. E. Maxwell, L. D. Turner, E. Tiesinga, and P. D. Lett. Number fluctuations and energy dissipation in sodium spinor condensates. *Phys. Rev. Lett.* 2009, 102, 225301.
- [134] M. Vengalattore, S. R. Leslie, J. Guzman, and D. M. Stamper-Kurn. Spontaneously modulated spin textures in a dipolar spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100, 170403.
- [135] D. Jacob, L. Shao, V. Corre, T. Zibold, L. De Sarlo, E. Mimoun, J. Dalibard, and F. Gerbier. Phase diagram of spin-1 antiferromagnetic Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 2012, 86, 061601(R).
- [136] A. Vinit, E. M. Bookjans, C. A. R. Sa de Melo, and C. Raman. Antiferromagnetic spatial ordering in a quenched one-dimensional spinor gas. *Phys. Rev. Lett.* 2013, 110, 165301.
- [137] T. Fukuhara, A. Kantian, M. Endres, M. Cheneau, et al., Quantum dynamics of a mobile spin impurity. *Nature Phys.* 2013, 9, 235.
- [138] J. S. Krauser, J. Heinze, N. Fläschner, S. Götze, O. Jürgensen, D. S. Lühmann, C. Becker, and K. Sengstock. Coherent multi-flavour spin dynamics in a fermionic quantum gas. *Nat. Phys.* 2012, 8, 813.
- [139] S. Bose. Quantum communication through an unmodulated spin chain. *Phys. Rev. Lett.* 2003, 91, 207901.
- [140] S. Bose. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. *Contemp. Phys.* 2007, 48, 13.
- [141] D. Burgarth. Quantum state transfer and time-dependent disorder in quantum chains. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2007, 151, 147.
- [142] J. Ghosh. Emulating quantum state transfer through a spin-1 chain on a

- one-dimensional lattice of superconducting qutrits. Phys. Rev. A, 2014,90, 062318 .
- [143] Marcin Wieśniak, Arijit Dutta, and Junghee Ryu. Translating Concepts of State Transfer to Spin-1 Chains. arXiv:1312.6543
- [144] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. Rev. Mod. Phys. 2008, 80, 885.
- [145] T. B. Ottenstein, T. Lompe, M. Kohlen, A. N. Wenz, and S. Jochim. Three-body recombination in a three-state Fermi gas with widely tunable interactions. Phys. Rev. Lett. 2008, 101, 203202.
- [146] J. H. Huckans, J. R. Williams, E. L. Hazlett, R. W. Stites, and K. M. O'Hara. Three-body recombination in a three-state Fermi gas with widely tunable interactions. Phys. Rev. Lett. 2009, 102, 165302.
- [147] X. Zhang, M. Bishof, S. L. Bromley, C. V. Kraus, M. S. Safronova, P. Zoller, A. M. Rey, and J. Ye. Spectroscopic observation of $SU(N)$ -symmetric interactions in Sr orbital magnetism. Science, 2014, 345, 1467.
- [148] F. Scazza, C. Hofrichter, M. Höfer, P. C. De Groot, I. Bloch, and S. Fölling. Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold $SU(N)$ -symmetric fermions. Nat. Phys. 2014, 10, 779.
- [149] G. Cappellini, M. Mancini, G. Pagano, P. Lombardi, L. Livi, M. Siciliani de Cumis, P. Cancio, M. Pizzocaro, D. Calonico, F. Levi, C. Sias, J. Catani, M. Inguscio, and L. Fallani. Direct observation of coherent interorbital spin-exchange dynamics. Phys. Rev. Lett. 2014, 113, 120402.
- [150] M. A. Cazalilla, A. F. Ho, and M. Ueda. Ultracold gases of ytterbium: Ferromagnetism and Mott states in an $SU(6)$ Fermi system. New J. Phys. 2009, 11, 103033.
- [151] S. Taie, Y. Takasu, S. Sugawa, R. Yamazaki, T. Tsujimoto, R. Murakami, and Y. Takahashi. Realization of a $SU(2) \times SU(6)$ system of fermions in a cold atomic gas. Phys. Rev. Lett. 2010, 105, 190401.
- [152] C. Hofrichter, L. Riegger, F. Scazza, M. Höfer, D. R. Fernandes, I. Bloch, and S. Fölling. Direct probing of the Mott crossover in the $SU(N)$ Fermi-Hubbard model. Phys. Rev. X, 2016 6, 021030.
- [153] G. Pagano, M. Mancini, G. Cappellini, P. Lombardi, F. Schäfer, H. Hu, X.-J. Liu, J.

- Catani, C. Sias, M. Inguscio, and L. Fallani. A one-dimensional liquid of fermions with tunable spin. *Nat. Phys.* 2014, 10, 198.
- [154] C. Wu. Competing orders in one-dimensional spin-3/2 fermionic systems. *Phys. Rev. Lett.* 2005, 95, 266404.
- [155] C. Wu, J. P. Hu, and S. C. Zhang. Exact $SO(5)$ symmetry in the spin-3/2 fermionic system. *Phys. Rev. Lett.* 2003, 91, 186402.
- [156] S. Chen, C. Wu, Y. Wang, and S. C. Zhang. Exact spontaneous plaquette ground states for high-spin ladder models. *Phys. Rev. B*, 2005, 72, 214428.
- [157] D. Wang, Y. Li, Z. Cai, Z. Zhou, Y. Wang, and C. Wu. Competing Orders in the 2D Half-Filled $SU(2N)$ Hubbard Model through the Pinning-Field Quantum Monte Carlo Simulations. *Phys. Rev. Lett.* 2014, 112, 156403.
- [158] P. Nataf and F. Mila. Exact Diagonalization of Heisenberg $SU(N)$ Models. *Phys. Rev. Lett.* 2014, 113, 127204.
- [159] Z. Zhou, Z. Cai, C. Wu, and Y. Wan. Quantum Monte Carlo simulations of thermodynamic properties of $SU(2N)$ ultracold fermions in optical lattices. *Phys. Rev. B*, 2014, 90, 235139.
- [160] V. Bois, S. Capponi, P. Lecheminant, M. Moliner, and K. Totsuka. Phase diagrams of one-dimensional half-filled two-orbital $SU(N)$ cold fermion systems. *Phys. Rev. B*, 2015, 91, 075121.
- [161] J. Decamp, J. Jüemann, M. Albert, M. Rizzi, A. Minguzzi, and P. Vignolo. High-momentum tails as magnetic-structure probes for strongly correlated $SU(\kappa)$ fermionic mixtures in one-dimensional traps. *Phys. Rev. A*, 2016, 90, 053614.
- [162] M. E. Beverland, G. Alagic, M. J. Martin, A. P. Koller, A. M. Rey, and A. V. Gorshko. Realizing exactly solvable $SU(N)$ magnets with thermal atoms. *Phys. Rev. A*, 2016, 93, 051601(R).
- [163] P. Nataf, M. Lajkó, P. Corboz, A. M. Läuchli, K. Penc, and Frédéric Mila. Plaquette order in the $SU(6)$ Heisenberg model on the honeycomb lattice. *Phys. Rev. B*, 2016, 93, 201113(R).
- [164] P. Nataf and F. Mila. Exact diagonalization of Heisenberg $SU(N)$ chains in the fully symmetric and antisymmetric representations. *Phys. Rev. B*, 2016, 93, 155134.
- [165] X.-W. Guan, Z.-Q. Ma, and B. Wilson. One-dimensional multicomponent fermions

- with δ -function interaction in strong- and weak-coupling limits: κ -component Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 2012, 85, 033633.
- [166] S. Capponi, P. Lecheminant, and K. Totsuka. Phases of one-dimensional $SU(N)$ cold atomic Fermi gases—From molecular Luttinger liquids to topological phases. *Ann. Phys.* 2016, 367, 50.
- [167] J. Decamp, P. Armagnat, B. Fang, M. Albert, A. Minguzzi, and P. Vignolo. Exact density profiles and symmetry classification for strongly interacting multi-component Fermi gases in tight waveguides. *New J. Phys.* 2016, 18, 055011.
- [168] B. Sutherland. Further Results for the Many-Body Problem in One Dimension. *Phys. Rev. Lett.* 1968, 20, 98.
- [169] M. Gaudin. Boundary Energy of a Bose Gas in One Dimension. *Phys. Rev. A*, 1971, 4, 386.
- [170] N. Oelkers, M. T. Batchelor, M. Bortz, and X.-W. Guan. Bethe ansatz study of one-dimensional Bose and Fermi gases with periodic and hard wall boundary conditions. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006, 39, 1073.
- [171] C. N. Yang. Ground state of fermions in a 1D trap with δ function interaction. *Chin. Phys. Lett.* 2009, 26, 120504.
- [172] M. D. Girardeau and A. Minguzzi. Soluble Models of Strongly Interacting Ultracold Gas Mixtures in Tight Waveguides. *Phys. Rev. Lett.* 2007, 99, 230402.
- [173] F. Deuretzbacher, K. Fredenhagen, D. Becker, K. Bongs, K. Sengstock, and D. Pfannkuche. Exact Solution of Strongly Interacting Quasi-One-Dimensional Spinor Bose Gases. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100, 160405.
- [174] M. D. Girardeau. Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension. *J. Math. Phys.* 1960, 1, 516.
- [175] B. Sutherland, Model for a multicomponent quantum system. *Phys. Rev. B*, 1975, 12, 3795.

攻读学位期间取得的研究成果

- [1] **Yanxia Liu** and Yunbo Zhang, Two atoms in a double well: Exact solution with a Bethe ansatz, Phys. Rev. A, 2015, 91, 053610.(SCI)
- [2] **Yanxia Liu**, Jun Ye, Yuanyuan Li and Yunbo Zhang, Improvement of variation approach in an interacting two-fermion system Chin. Phys. B, 2015, 24, 8, 086701. (SCI)
- [3] Lijun Mao, **Yanxia Liu**, and Yunbo Zhang, Entanglement dynamics of the ultra-strong coupling three-qubit Dicke model, Phys. Rev. A, 2016, 93, 052305. (SCI)
- [4] **Yanxia Liu**, Shu Chen and Yunbo Zhang, Spectroscopy and spin dynamics for strongly interacting few spinor bosons in one-dimensional traps, Phys. Rev. A, 2017, 95, 043628. (SCI).
- [5] Lei Pan*, **Yanxia Liu***, Haiping Hu, Yunbo Zhang, and Shu Chen, Exact ordering of energy levels for one-dimensional interacting Fermi gases with $SU(n)$. (*:共同一作)

致 谢

人生就像一列行驶的列车，上上下下，走走停停，马上就要到毕业的站口了。想想研究生生活这一路，有失落，有惊喜。有时会因为想不出问题而彻夜难眠，有时也会由于学会新知识而兴奋半天。六年研究生生活学习的浸泡让自己对科研了解了许多。一次次的犯错后的改正，一次次的否定自己，都让自己学会了很多，也让自己变得严谨许多。生活看上去单调枯燥，但对我来说是丰富多彩的。这一路我收获了很多，当然这一切都离不开我身边的良师益友和亲人们的关怀、鼓励与帮助。在此，谨向你们表示我深深的谢意。

感谢我的导师张云波教授。在攻读学位期间，张老师耐心，宽容地指导着我的科研工作，教导我如何成为一个合格的博士生。由于我性格比较倔强，经常和张老师争吵，每次争吵后还是挺后悔的，老是惹他生气，张老师从未计较过这些。张老师心胸开阔，和蔼可亲，是一位值得尊敬的好老师。张老师严谨崇高的科研态度也给我树立了榜样，培养我以一种新的思想观念和思考方式去解决问题。感谢物理电子工程学院和理论物理研究所为我提供了优良的学习环境。感谢所里老师谆谆教导，传授了许多物理知识，拓宽了我的科学视野。感谢组里的同学在学习和日常生活中对我的关心和帮助。

感谢中科院物理所的陈澍教授。陈老师知识渊博，待人热情，科研上谆谆教导，使我在物理所学习的一年时间里受益良多。同时感谢物理所 T01 的小伙伴们在北京学习生活中给我的帮助及关怀。感谢 L 楼办公室的同学，能与你们一起生活和学习，我非常开心。

在此，我还要着重感谢我的家人这么多年来对我的理解和支持。正是你们无私的付出和无微不至的关怀，才激励我不断进步，使得我能顺利完成学业。最后再次感谢所有支持和帮助过我的老师、同学、朋友和亲人们！愿你们身体健康，万事如意

个人简历及联系方式

姓名：刘彦霞

性别：女

籍贯：山西省大同市

学习经历：2011年9月至2017年7月，山西大学理论物理研究所，凝聚态物理专业，硕博连读

E-Mail: 598632010@qq.com

承 诺 书

本人郑重声明：所提交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

2017 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留，使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印，缩印或扫描等手段保存，汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表，传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

2017 年 月 日