

2018 届 博 士 学 位 论 文

# 非厄米两态及三态量子系统的动力学研究

作者姓名	杜 磊
指导教师	张云波 教 授
学科专业	凝聚态物理
研究方向	冷原子物理
培养单位	理论物理研究所
学习年限	2008 年 9 月至 2018 年 6 月

二〇一八年六月

山西大学

**Thesis for Doctor's degree, Shanxi University, 2018**

# The dynamics of non-Hermitian two- or three-state systems

Student Name	Lei Du
Supervisor	Prof. Yun-bo Zhang
Major	Condensed Matter Physics
Specialty	Cold Atom Physics
Department	Institute of Theoretical Physics
Research Duration	2008.09-2018.06

June, 2018

Shanxi University

## 目 录

目 录 .....	I
Contents .....	III
中文摘要 .....	V
ABSTRACT .....	VII
<b>第一章 绪论 .....</b>	<b>1</b>
1.1 引言 .....	1
1.1.1 研究背景简介 .....	1
1.1.2 $PT$ 对称算符简介 .....	4
1.2 研究非厄米系统的一些原理 .....	7
1.2.1 $PT$ 对称的双阱模型 .....	8
1.2.2 双正交完备基矢 .....	9
1.3 光与三能级原子的相互作用 .....	10
1.3.1 模型介绍 .....	11
1.3.2 有效两能级的哈密顿量 .....	14
1.3.3 $\Lambda$ 型三能级系统暗态的精确解 .....	15
1.4 我们的工作 .....	17
<b>第二章 <math>PT</math>对称的两态量子系统动力学特性 .....</b>	<b>19</b>
2.1 GP 方程数值解 .....	19
2.1.1 对称势阱中弱耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学方程 .....	19
2.1.2 克兰克-尼克尔森法 .....	21
2.1.3 对称双阱中波函数的数值求解 .....	22
2.2 非厄米的两态量子系统的本征谱 .....	24
2.3 非厄米的两态量子系统的动力学演化方程 .....	27
2.4 利用布洛赫球研究动力学 .....	30
2.5 本章小结 .....	33

第三章 $PT$ 对称的有效两能级系统及其动力学.....	35
3.1 $PT$ 对称的有效两能级系统的哈密顿量.....	36
3.2 动力学演化.....	40
3.3 布洛赫动力学.....	42
3.4 本章小结.....	49
第四章 中间阱有耗散的五阱系统的动力学研究.....	51
4.1 模型和背景介绍.....	51
4.2 线性情形下的模型与解析解.....	53
4.3 应用数值方法分析非线性相互作用下的动力学演化.....	61
4.4 推广到任意奇数阱的情况.....	63
4.5 本章小结.....	64
第五章 总结和展望.....	67
5.1 总结.....	67
5.2 展望.....	69
附录 中间阱有耗散的五阱系统的本征解.....	71
参考文献.....	73
攻读学位期间取得的研究成果.....	85
致 谢.....	87
个人简况及联系方式.....	89
承 诺 书.....	90
学位论文使用授权声明.....	91

**Contents**

**Contents in Chinese.....I**

**Contents.....III**

**Abstract in Chinese ..... V**

**ABSTRACT ..... VII**

**Chapter 1 Introduction ..... 1**

1.1 Introduction..... 1

1.1.1 Introduction of the research background..... 1

1.1.2  $PT$  symmetry operator..... 4

1.2 Some principles for the study of the non-Hermitian system..... 7

1.2.1  $PT$  symmetric double-well model..... 8

1.2.2 Biorthogonal complete base vector ..... 9

1.3 Interaction between light and three-level atom..... 10

1.3.1 Model introduction ..... 11

1.3.2 Effective two-level Hamiltonian ..... 14

1.3.3 Rigorous dark-state solutions of  $\Lambda$  three-level system ..... 15

1.4 Our Work..... 17

**Chapter 2 The dynamic characteristics of  $PT$  symmetric dimer ..... 19**

2.1 The numerical solution of the GP equation..... 19

2.1.1 Dynamical equation of weakly coupled Bose-Einstein condensation in symmetric double wells..... 19

2.1.2 Crank-Nicholson Method ..... 21

2.1.3 Numerical solution of wave function in a symmetric double well..... 22

2.2 The eigenvalues of the non-Hermitian dimer ..... 24

2.3 Dynamical evolution equation of non-Hermitian dimer ..... 27

2.4 Bloch dynamics..... 30

2.5 Summary ..... 33

<b>Chapter 3 Effective two-level system with <math>PT</math> symmetry and the dynamics .....</b>	<b>35</b>
3.1 Hamiltonian of an effective two level system with $PT$ symmetry.....	36
3.2 Dynamical evolution.....	40
3.3 Bloch dynamics.....	42
3.4 Summary .....	49
<b>Chapter 4 Dynamical evolutions of three well system with dissipation in the middle well .....</b>	<b>51</b>
4.1 Introduction to the model and background .....	51
4.2 Model and analytic solution in linear case.....	53
4.3 Numerical scheme for nonlinear interaction case .....	61
4.4 Generalization to any odd site number .....	63
4.5 Summary .....	64
<b>Chapter 5 Conclusion and new perspective .....</b>	<b>67</b>
5.1 Conclusion .....	67
5.2 New perspective.....	69
<b>Appendix: The eigensolutions of the five well with dissipative in the middle well.....</b>	<b>71</b>
<b>Reference .....</b>	<b>73</b>
<b>Research achievements .....</b>	<b>85</b>
<b>Acknowledgment .....</b>	<b>87</b>
<b>Personal profiles .....</b>	<b>89</b>
<b>Letter of commitment.....</b>	<b>90</b>
<b>Authorization statement .....</b>	<b>91</b>

## 中文摘要

非厄米量子力学的研究是量子力学探索微观系统对环境作用下系统特征变化的重要延伸。近几十年得到了迅猛发展，其中以  $PT$  对称的发展最为显著。它在理论和实验上都有重大发现，吸引了很多科研工作人员的关注。

首先我们研究了在两个光场和一个射频场共同作用下，宇称和时间反演对称的有效两能级原子系统的动力学性质。通过调节射频场强度和相对相位，可以使该系统从  $PT$  对称未破缺态进入到  $PT$  对称破缺态。相比厄米系统，我们也观察到了 Rabi 振荡，在非破缺的  $PT$  对称态中可通过改变射频场强度和相对相位调整其振荡特性。在奇异点，Rabi 振荡消失。为了更好地了解该系统的特性，我们研究了其有效的布洛赫动力学模型，找出了不动点的  $z$  分量出现在  $PT$  对称破缺和  $x$ - $y$  平面上的投影，相比标准的  $PT$  对称二能级系统其是可以进行高精度控制的，我们的成果对研究复杂  $PT$  对称模型的动力学行为有非常重要的意义。

其次我们研究了在中间阱有耗散情况下的非厄米三阱系统的动力学性质，当两端两阱中的化学势相同且非线性相互作用被忽视，将始终存在一个暗态，其本征能量为零，且暗态上的投影不随时间和损耗因子的变化而变化。损耗因子的增加使得从阻尼振荡衰减到过阻尼衰减。然而，当引入非线性相互作用时，两端两阱的相互作用项是相同时，暗态上的投影将明显减弱。同时，损耗因子的增加也会加剧耗散。在这个过程中，中间阱的相互作用不起作用。当两端两阱的化学势或相互作用不均匀时，将随时间消失。此外，当我们把三阱系统扩展到一般的  $(2n+1)$  个阱时，在

没有非线性相互作用的情况下，系统将有 $1/2n$ 被损耗掉，大大降低了耗散。实验上可以用来提高信号在某些介质内传播时抗耗散性能的方法，对于实际应用有重要的指导意义。

**关键词：**非厄米； $PT$ 对称；动力学；破缺；暗态；布洛赫模型；



**ABSTRACT**

Non-Hermitian quantum mechanics is an important extension of quantum mechanics to study the property of the microscopic system affected by environment. In the past decades it has developed rapidly, of which the progress of parity- and time-reversal ( $PT$ ) symmetry is the most noticeable. Thus the significant discoveries in theory and experiment attract many researchers' attention.

We investigate the dynamics of  $PT$  symmetric two-energy-level atoms in the presence of two optical and a radio-frequency (rf) fields. The strength and relative phase of fields can drive the system from unbroken to broken  $PT$  symmetric regions. Compared with the Hermitian model, Rabi-type oscillation is still observed, and the oscillation period and frequency are also adjusted by the strength and relative phase in the region of unbroken  $PT$  symmetry. At exception point (EP), the oscillation breaks down. To better understand the underlying properties we study the effective Bloch dynamics and find the symmetry breaks when the  $z$  components of the fixed points are not zero and the projection in  $x-y$  plane can be controlled with high flexibility compared with the standard two-level system with  $PT$  symmetry. These are help to study the potential character of the system with  $PT$  symmetry.

We investigate the dynamical properties for non-Hermitian triple-well system with a loss in the middle well. When chemical potentials in two end wells are uniform and nonlinear interactions are neglected, there always exists a dark state, whose eigenenergy becomes zero, and the projections onto

which do not change over time and the loss factor. The increasing of loss factor only makes the damping form from the oscillating decay to over-damping decay. However, when the nonlinear interaction is introduced, even interactions in the two end wells are also uniform, the projection of the dark state will be obviously diminished. Simultaneously the increasing of loss factor will also aggravate the loss. In this process the interaction in the middle well plays no role. When two chemical potentials or interactions in two end wells are not uniform all disappear with time. In addition, when we extend the triple-well system to a general  $(2n+1)$ -well, the loss is reduced greatly by the factor  $1/2n$  in the absence of the nonlinear interaction. This can be used to improve the fidelity of signals when propagating in some media, which has important guiding significance for the practical application.

**Key words:** Non-Hermitian;  $PT$  symmetry; Dynamics; Broken; Dark State; Bloch Mode

# 第一章 绪论

## 1.1 引言

### 1.1.1 研究背景简介

非厄米 (Non-Hermitian) 理论作为传统量子力学的补充和发展, 可解决很多传统量子力学不能解决的问题。和经典物理一样, 量子力学系统也会受到不可控制的环境作用影响, 而且此类影响很难被忽略。另外, 对环境自由度的完全微观描述或控制, 仅仅是部分可行甚至是完全不可行的, 这就导致量子系统的完全隔离是不可能的。因此, 大多量子系统必须被看做是开放系统, 对其研究过程中非厄米理论将起着至关重要的作用[1]。应用非厄米理论对开放系统的持续研究, 是量子力学理论探索微观系统对环境作用下系统特征变化的重要延伸[2]。同时, Landau 和 Lifshitz 也在其非相对论量子力学的相关著作上, 提到了非厄米量子力学的重要性。

一般情况下, 非厄米系统的哈密顿量由厄米部分加上虚数势能项构成。引入虚数项有很重要的物理意义, 在包括光学、材料物理等物理学分支上都有极高的应用价值。例如, 在描述光场与多能级原子系统的相互作用过程中, 考虑自发辐射而引入的衰减项[3]; BEC 在局部开放的势阱中, 边界有衰减或泄漏的情况下, 都可以通过引进负虚数能量来描述[4-10]。而且, 复数能量的虚部若为正可用来描述增益, 为负则可描述耗散, 如光在某种媒介传播时发生的增益或者散射现象。

在过去的二十年中, 研究人员对非厄米算符的物理特性表现出了越来越浓厚的兴趣。1998 年, Bender 在理论上提出了研究  $PT$  对称的非厄米系统的本征谱[11], 从而在某些参数区域得到纯粹的实数特征值[11-12], 通过引入一个适当的内积可以定义封闭系统的一个连续量子理论[13]。近期, 光学系统中  $PT$  对称的研究成果越来越多[14-16], 2016 年肖艳红等人第一次在热原子  $^{87}\text{Rb}$  蒸气中实现

了反  $PT$  对称[17]，该研究组在实验中通过光与  $\Lambda$  型三能级原子耦合，分别通过蓝失谐和红失谐的两束光控制激发能级和一个基态能级之间的跃迁，从而得到一个关于能级跃迁的有效反  $PT$  对称哈密顿量。

非厄米量子动力学不具有么正特性，因此其很多特征远远没有被真正理解。不断的对耗散系统的研究发现，从最初利用 Lindblad 方程描述耗散系统[18, 19]，发展到了用哈密顿量中的负虚数能量来描述耗散[11, 13, 20-22]，目前这一领域已经吸引了越来越多的科研人员关注。另外，耗散在实验中也可以得到很好操控[23]，光在光纤中传播时具有复数形式的折射率，由于其虚部描述了增益或耗散特性[2]，因此其在局域位置的损耗很容易实现控制。一个有耗散的开放量子系统，可通过薛定谔方程来描述其时间演化[11, 13, 17-21]，或者可以通过系统与环境耦合的主方程来研究[10, 23, 24]。

非厄米量子系统的本征态不是正交完备的，但哈密顿量右手态矢量和左手态矢量组成的双正交基矢满足正交完备归一[25]。且这两个共轭哈密顿量的本征值在某个奇异点相等，相位关系具有手征性。目前对于非厄米系统的很多研究还处于探索阶段，山西大学李禄小组研究了  $PT$  对称条件下非线性波导中对称孤子和非对称孤子解的存在性、稳定性及其动力学演化的特性[26]。南开大学的宋智小组研究了  $PT$  对称的周期格点模型的物理特性[27]，中科院物理所陈澍小组对一维格点拓扑模型，如 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型的本征值和拓扑边界态在引入非厄米  $PT$  对称虚化学势项后受到的影响，以及两个一维非厄米  $PT$  对称格点模型的散射过程[22, 28]，另外他们还具体分析了具备手征对称性的非厄密系统，并给出其几何解释。其定义了哈密顿量的投影围绕两个奇异点 (EPs) 的缠绕数。系统的缠绕数可以看作是这两个缠绕数的和的一半。在开边界条件下会出现其系统缠绕数数值二倍数量的边界态。而围绕异常点的缠绕数的差值也是表征手征对

称性非厄密系统的拓扑量。这两个拓扑量共同标定了系统的拓扑状态，这和厄密系统是有巨大差别的[29]。德国 Wunner 小组在  $PT$  对称模型研究领域做了大量的工作，2014 年他们研究了  $PT$  对称的双势阱非线性量子动力学问题[30]。黄国翔教授在 2013 年研究了  $^{87}\text{Rb}$  和  $^{85}\text{Rb}$  两种原子三能级的操控，找到了其折射率满足  $PT$  对称的条件[31]。2016 年肖艳红研究员构建的  $PT$  反对称的哈密顿量[17]，极大地增加了非厄密光学的研究范围，展现了更多有趣的光学性质，并发展了新的光调控技术手段。这些工作都为相关的理论研究者提供了广阔的研究前景，在此基础上，我们研究了  $PT$  对称下有效两能级系统的哈密顿量及动力学行为，发现在相变前后的演化以及临界点（Exception Point, 简称 EP）的演化有所不同：在对称区间满足类似于 Rabi 振荡的动力学行为，而在相变点和相变后系统都将趋于某个稳定态。这种行为，在布洛赫球上可用固定点来描述，而且相关固定点也很好的反应了相变的特征[32]。

另一方面， $PT$  对称的研究最早是在光波导中实现的[33]，波导折射率  $n(x) = n_1(x) + in_2(x)$ ，其中描述线性材料基础折射率的实部  $n_1(x)$  满足偶宇称， $n_2(x)$  满足奇宇称，其表征材料的增益和耗散对应为虚部，因此  $n(x) = n^*(-x)$ ，由折射率决定的势函数满足[34-35]

$$V(x) = V^*(-x)$$

这可以帮助进一步研究  $PT$  对称系统的物理特性。另外，其虚部的可操控性为我们研究非厄米系统提供了理想的平台，在此基础上我们研究了在光波导中有耗散的三阱系统动力学及 Kerr 非线性的出现对动力学的影响[36]。

本章首先介绍了  $PT$  对称算符，同时对研究非厄米系统的一些原理做了简要介绍，包括  $PT$  对称的双阱模型、双正交完备基矢等。接下来，我们介绍了光与三能级原子的相互作用模型，并在此模型基础上利用大失谐近似计算得到了一个

有效的两能级哈密顿量，求解了  $\Lambda$  型三能级系统暗态的精确解。

### 1.1.2 $PT$ 对称算符简介

量子力学中的宇称算符  $P$  是空间反演对称的算符，具体操作是所有坐标同时变号：如在宇称算符操作下坐标  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ，动量  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ，波函数  $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi(-\mathbf{x})$ ，由坐标变号引起的对称称之为宇称对称。时间反演算符  $T$  是时间变号的算符，表示运动反演，由时间变号所具有的对称性称之为时间反演对称。时间反演算符  $T$  是反么正的反线性算符，也不是自逆算符。时间反演算符作用后位置空间不变，运动方向相反，反线性算符的性质要求所有复数的系数变为其复共轭，所以其作用效果是：坐标  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}$ ，动量  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ， $i \rightarrow -i$  和  $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi^*(\mathbf{x})$ 。对于一般的哈密顿量

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

其中  $m$  是质量， $V(\mathbf{x})$  是势能。如果该哈密顿量满足  $PT$  对称，即  $PTH = HPT$ ，则势能函数满足  $V(\mathbf{x}) = V^*(-\mathbf{x})$ 。换句话说， $V(\mathbf{x})$  可分解成实部和虚部两部分  $V(\mathbf{x}) = V_R(\mathbf{x}) + i\varepsilon V_I(\mathbf{x})$  ( $\varepsilon$  为描述势能虚部的参数)，其中实部是偶宇称函数而虚部是奇宇称函数，哈密顿量  $H$  和  $PT$  对称算符  $PT$  可具有共同本征态。当  $\varepsilon = 0$  时，哈密顿量是厄米算符。Bender 研究了  $PT$  对称的哈密顿量  $H = \mathbf{p}^2/2m + x^2(ix)^{\nu}$  ( $\nu \geq 0$ )，并发现其动力学演化服从么正的时间演化算符，其与传统的量子力学并不矛盾 [12, 13, 20, 37-39]。

有关  $PT$  对称系统的第一个实验是在光学领域实现的，在具有  $PT$  对称的光波

导中见证了  $PT$  对称相变[40-41]。光学，尤其是光电子与光子学是  $PT$  对称实验很好的实现手段和途径[42-43]。而在凝聚态物质和经典电动力学方面， $PT$  对称的实验也已经实现[44-45]。另外在扁平的微波腔[46]、光学腔[47-50]以及回音壁模[51-52]等，实验上也已经实现了  $PT$  对称的模拟工作。2016 年肖艳红实验组采用光与原子实现的反  $PT$  对称的哈密顿量[17]，其实验装置如图 1.1 所示：

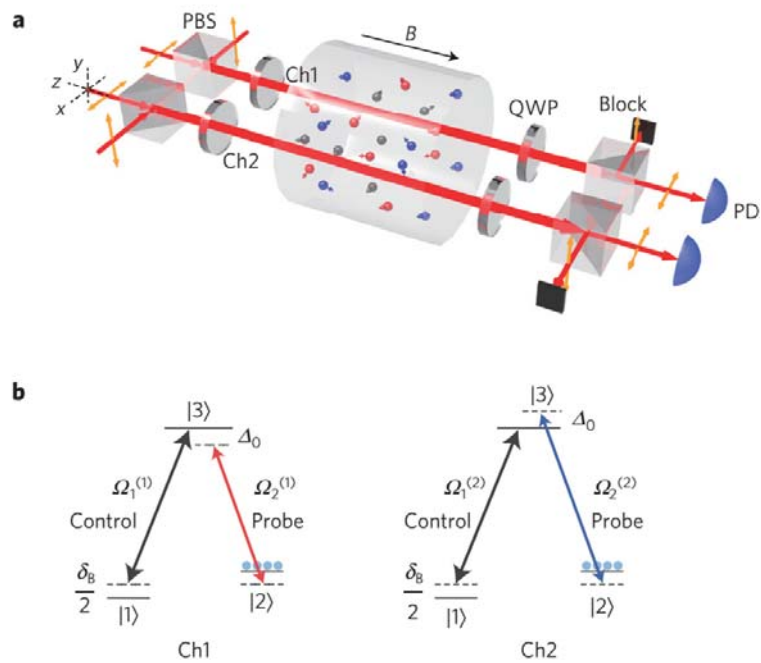


图 1.1 在热的  $^{87}\text{Rb}$  气室中，通过快速原子相干运输实现反  $PT$  对称

(a) 系统装置的三维立体视图

(b)  $\Lambda$  型三能级原子 EIT 组态下实现反  $PT$  对称的系统的两个通道[17]

图 1.1 (a) 描绘了温度在  $40^\circ\text{C}$  时两束空间分离的光通道 (ch1 和 ch2)，每个通道都利用弱的探测光场和强的控制光场在电磁感应透明条件 (EIT) 下进行操控。图 1.1 (b) 为光与  $\Lambda$  型三能级原子相互作用的原理图，其中两个基态分别是塞曼子能级  $|F=2, m_F=0\rangle$  和  $|F=2, m_F=2\rangle$ ，而激发态是  $^{87}\text{Rb}$   $D_1$  线的  $|F'=1, m_{F'}=1\rangle$ 。  $\Omega_1^{(1)}$  和

$\Omega_1^{(2)}$  分别是两个通道 ch1 和 ch2 的强控制光场，操控  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  跃迁； $\Omega_2^{(1)}$  和  $\Omega_2^{(2)}$  分别是两个通道 ch1 和 ch2 的弱探测光场，操控  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  跃迁，但是这里两个通道的光场分别是符号相反、大小相同的失谐量  $|\Delta_0|$ ，稳态下原子主要占据基态  $|2\rangle$ 。通过控制实验参数，可以实现反  $PT$  对称的有效的哈密顿量

$$H_{eff} = -\delta_B I + H'_2 \quad (1.1)$$

在实验中  $\delta_B$  指的是与系统本征值的偏差， $I$  是一个  $2 \times 2$  的单位矩阵。而

$$H'_2 = \begin{bmatrix} |\Delta_0| - i\gamma'_{12} & i\Gamma_c \\ i\Gamma_c & -|\Delta_0| - i\gamma'_{12} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

描述两个本征-EIT 模式的有效作用关系， $\gamma'_{12} = \gamma_{12} + \Gamma_c + 2\Gamma_p$ ，其中  $\gamma_{12}$  是基态退相干率， $\Gamma_c$  是两个通道之间基态相干耦合率， $\Gamma_p$  是控制光场的泵浦率。哈密顿量

(1.2) 的本征值为

$$\omega_{\pm} = -i\gamma'_{12} \pm \sqrt{\Delta_0^2 - \Gamma_c^2} \quad (1.3)$$

本征谱如图 1.2 所示，理论和实验模拟结果得到了很好的吻合，这个实验为我们做的课题研究提供了有力的支撑。

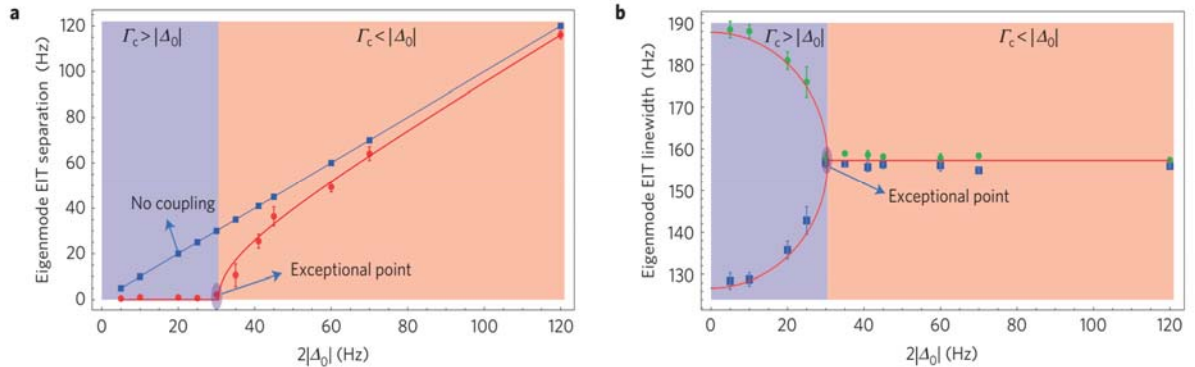


图 1.2 各项同性的热原子  $^{87}\text{Rb}$  气室中 EIT 通道的反  $PT$  对称耦合模式

(a) 本征频率的实部  $\text{Re}[\omega]$ ，(b) 本征频率的虚部  $\text{Im}[\omega]$  [17]



## 1.2 研究非厄米系统的一些原理

在本节中，我们将介绍非厄米系统的一些基础内容。实验上可以在各种装置中通过三能级原子来模拟实现两能级的非厄米系统，如束缚在阱中的离子，光学腔以及光晶格中的原子等，原子态的操控如图 1.3 所示，一般情况下可通过测量是否发生自发衰减来判断是否为非厄米系统[53-55]。近几年非厄米模型因其丰富的物理行为[2, 56-58]，引起了很多人的兴趣，例如局域化[59, 60]、 $PT$  对称[11, 61-62]，以及空间凝聚序[63]等，都是研究的热门方向。图 1.3 给出了通过测量是否发生自发衰减来描述非厄米系统。

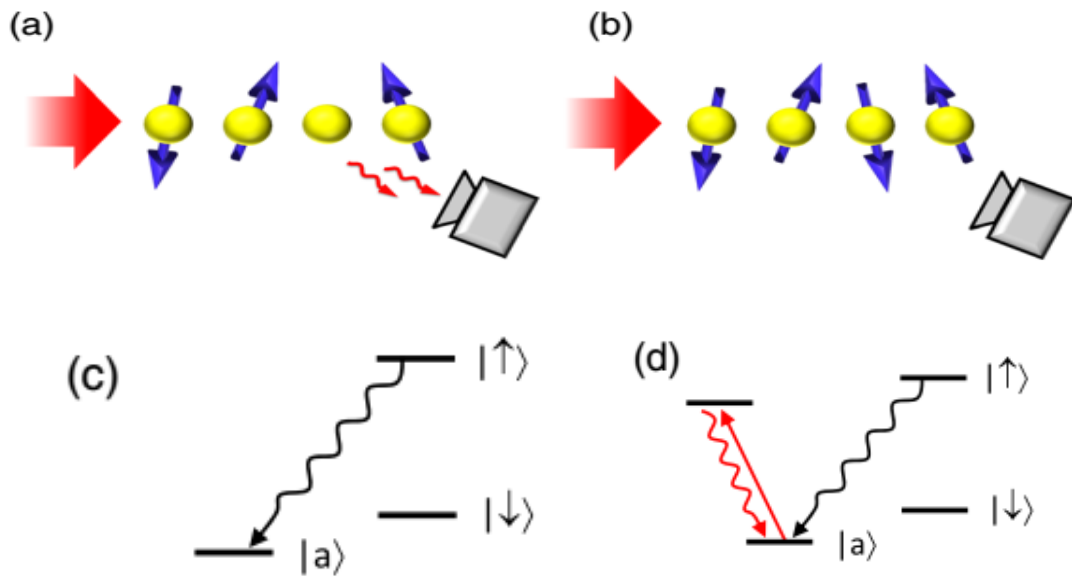


图 1.3 通过三能级原子来模拟实现两能级的非厄米系统

- (a) 一系列原子的实验装置图，通过测量来自辅助态  $|a\rangle$  散射的光子数来确定其占据情况；
- (b)  $|a\rangle$  态上零占据预示着系统是非厄米的，例如缺少荧光；
- (c) 能态  $|\uparrow\rangle$  自发辐射到  $|a\rangle$  态；
- (d) 利用一束激光激发原子从  $|a\rangle$  态跃迁至高能级，通过荧光（箭头所示）来探测。[64]

### 1.2.1 $PT$ 对称的双阱模型

本节中将讨论非厄米哈密顿量与厄米哈密顿量在求解本征方程时的区别，为方便起见，我们以  $PT$  对称的双阱哈密顿量为例，如图 1.4 所示：

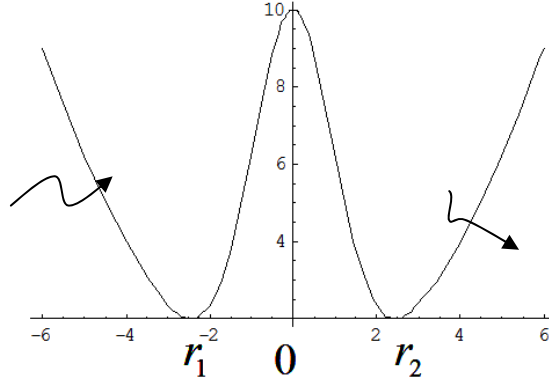


图 1.4  $PT$  对称的双势阱示意图

忽略态对空间的依赖，即在局域格点空间 [65-68]， $PT$  对称双阱的哈密顿量为

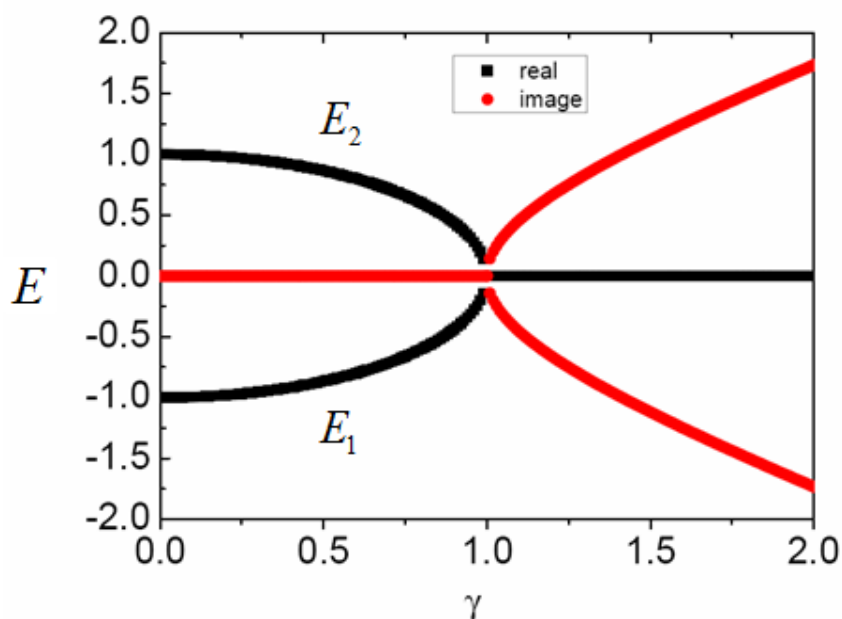
$$H_2 = \begin{pmatrix} i\gamma & -J \\ -J & -i\gamma \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

其中两个阱具有复数化学势  $\pm i\gamma$ ，分别描述阱 1 的增益和阱 2 的耗散， $\gamma$  为增益耗散的强度。 $J$  是原子在两阱之间的跃迁能量。因为双阱是对称的，因此其具有空间反射对称性，宇称算符为 [69]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

时间反演算符为复共轭操作： $TiT = -i$ 。我们可以发现  $PTH_2 = H_2PT$ ，因此哈密顿量 (1.4) 具有  $PT$  对称的性质。其本征值为

$$E = \pm \sqrt{J^2 - \gamma^2} \quad (1.6)$$

图 1.5  $J=1$ 时,  $PT$ 对称的双阱的本征谱

当  $J > \gamma$  ( $J, \gamma > 0$ ) 时, 系统的两个本征值都为实数; 而当  $J < \gamma$  时, 本征值为两个互为复共轭的复数。这里把本征值有实本征解的参数区域  $J > \gamma$  称为  $PT$  对称区间, 而只有复数解的区间称为  $PT$  对称破缺区间。  $J = \gamma$  这个点被称为奇异点 (EP) 或者临界点。能量本征谱如图 1.5 所示, 其与实验本征谱图 (1.2) 所示规律一致。

### 1.2.2 双正交完备基矢

接下来我们计算哈密顿量 (1.4) 的本征态, 并找出非厄米完备基矢满足的性质。本征态为

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} -i\gamma + \sqrt{J^2 - \gamma^2} \\ -J \end{pmatrix} \quad (1.7a)$$

$$|\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -i\gamma - \sqrt{J^2 - \gamma^2} \\ -J \end{pmatrix} \quad (1.7b)$$

也称为右手本征矢量, 但  $\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle \neq \delta_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = \pm$ ) 不满足正交归一和完备性。哈

密顿量 (1.4) 的厄米共轭

$$H_2^\dagger = \begin{pmatrix} -i\gamma & -J \\ -J & i\gamma \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

其中  $H^\dagger \neq H$ ，其本征值与 (1.6) 相同，对应的本征态也称为左手本征矢量

$$|\tilde{\psi}_+\rangle = \begin{pmatrix} i\gamma + \sqrt{J^2 - \gamma^2} \\ -J \end{pmatrix} \quad (1.9a)$$

$$|\tilde{\psi}_-\rangle = \begin{pmatrix} i\gamma - \sqrt{J^2 - \gamma^2} \\ -J \end{pmatrix} \quad (1.9b)$$

我们可以发现 (1.7a)、(1.7b) 和 (1.9a)、(1.9b) 之间满足正交关系：

$$\langle \tilde{\psi}_+ | \psi_- \rangle = \langle \tilde{\psi}_- | \psi_+ \rangle = 0 \quad (1.10)$$

此外还满足

$$\frac{|\psi_+\rangle\langle\tilde{\psi}_+|}{\langle\tilde{\psi}_+|\psi_+\rangle} + \frac{|\psi_-\rangle\langle\tilde{\psi}_-|}{\langle\tilde{\psi}_-|\psi_-\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

其中

$$\langle \tilde{\psi}_+ | \psi_+ \rangle = 2J^2 - 2\gamma^2 - 2i\gamma\sqrt{J^2 - \gamma^2}$$

$$\langle \tilde{\psi}_- | \psi_- \rangle = 2J^2 - 2\gamma^2 + 2i\gamma\sqrt{J^2 - \gamma^2}$$

(1.11) 是非厄米系统哈密顿量 (1.4) 的本征态完备关系，右手本征矢量和左手本征矢量一起形成了双正交关系，这与厄米系统是完全不一样的。

### 1.3 光与三能级原子的相互作用

两模光场与三能级原子的相互作用具有多种形式，可产生很多有趣的物理现象。其中  $\Lambda$  型三能级原子在两模光场作用下，通过大失谐近似可绝热消除激发能级，从而实现两个基态能级和光场的耦合。

1990年 Hemmer 等人在该理论的基础上，在实验中观察到了两个基态之间利用激光诱导共振拉曼跃迁的缀饰态也可以利用微波场直接得到[70]。2009年 Scully 等人在理论和实验上研究了 Rb 原子气体中两束光和另外附加的微波场与 Rb 原子超精细结构耦合的模型，其中微波场只作用于近简并的两个基态能级[71]。

接下来的内容中，我们将介绍半经典近似下光与三能级原子的相互作用模型。

### 1.3.1 模型介绍

我们考虑充满三能级原子的气室里，两束光沿着  $z$  轴穿过气室，光场的场强可表示为：

$$\mathbf{E}_1(z,t) = \mathbf{e}_1 \varepsilon_1 \cos(k_1 z - \omega_1 t) = \mathbf{E}_1^{(+)}(z,t) + \mathbf{E}_1^{(-)}(z,t) \quad (1.12)$$

$$\mathbf{E}_2(z,t) = \mathbf{e}_2 \varepsilon_2 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = \mathbf{E}_2^{(+)}(z,t) + \mathbf{E}_2^{(-)}(z,t) \quad (1.13)$$

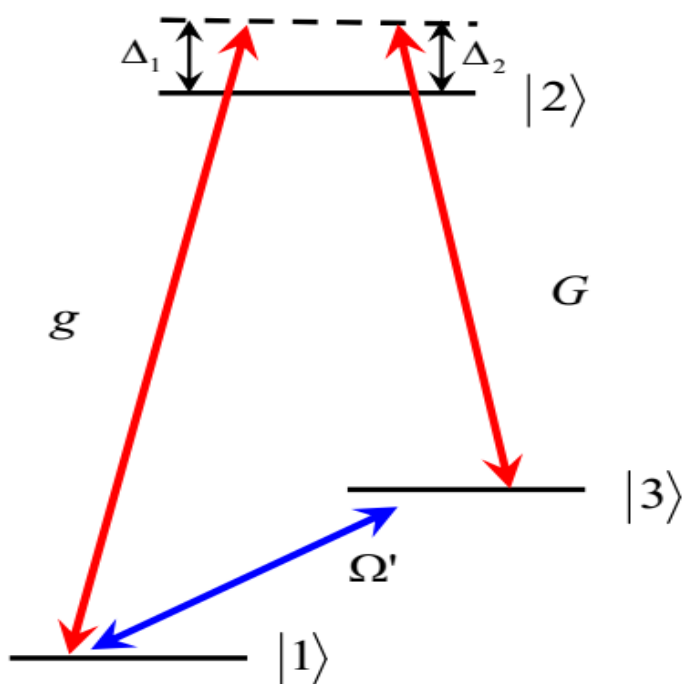


图 1.6  $\Lambda$ 型三能级原子的能级示意图

这里取  $\Delta_1 = \Delta_2$ ， $g$  和  $G$  是两束光的 Rabi 频率， $\Omega'$  是微波场的 Rabi 频率

如图 1.6 所示, 两束光分别作用于  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  和  $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$  之间的跃迁。  $\mathbf{e}_\alpha$  和  $\varepsilon_\alpha (\alpha=1,2)$  是对应光场偏振方向的单位矢量和振幅,  $\omega_\alpha$  是对应光场的频率,  $k_\alpha$  (沿  $z$  轴方向) 是对应的波矢。  $\mathbf{E}_\alpha^{(+)}(z,t)$  和  $\mathbf{E}_\alpha^{(-)}(z,t)$  分别是对应光场的正频和负频部分

$$\mathbf{E}_\alpha^{(\pm)}(z,t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_\alpha \varepsilon_\alpha \exp[\pm i(k_\alpha z - \omega_\alpha t)] \quad (1.14)$$

气室被置于一个微波腔中, 其电场强度为

$$E_\mu = \mathbf{e}_\mu \varepsilon_\mu \cos(k_\mu z_\mu - \omega_\mu t) = \mathbf{E}_\mu^{(+)}(z_\mu, t) + \mathbf{E}_\mu^{(-)}(z_\mu, t) \quad (1.15)$$

其中  $\mathbf{e}_\mu$ 、  $\varepsilon_\mu$ 、  $k_\mu$  和  $\omega_\mu$  分别是微波场的偏振方向单位矢量、振幅、波矢和频率。

它也可写成 (1.14) 式的形式。半经典近似下, 自由的三能级原子哈密顿量可写为

$$H_A = \frac{p^2}{2m} - \hbar\omega_{01}|1\rangle\langle 1| - \hbar\omega_{02}|3\rangle\langle 3| \quad (1.16)$$

这里以能级  $|2\rangle$  为零点能,  $\hbar\omega_{01,02}$  分别是  $|2\rangle$  和  $|1\rangle$ 、  $|3\rangle$  之间的能级差。在旋波近似下, 原子和电磁场之间的相互作用为

$$H_{AF} = -\mathbf{d}^{(+)} \cdot \mathbf{E}^{(-)} - \mathbf{d}^{(-)} \cdot \mathbf{E}^{(+)} \quad (1.17)$$

其中, 总电场强度  $\mathbf{E}$  也被分为正频和负频部分

$$\mathbf{E}^{(\pm)} = \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{E}_\alpha^{(\pm)}(z,t) + \mathbf{E}_\mu^{(\pm)}(z_\mu, t) \quad (1.18)$$

同时偶极算符  $\mathbf{d}$  分解为正负旋转分量 [72]

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{d}^{(+)} + \mathbf{d}^{(-)} \\ &\approx \langle 1|\mathbf{d}|2\rangle\sigma_1 + \langle 3|\mathbf{d}|2\rangle\sigma_2 + \langle 1|\mathbf{d}|3\rangle\sigma_3 \\ &\quad + \langle 2|\mathbf{d}|1\rangle\sigma_1^\dagger + \langle 2|\mathbf{d}|3\rangle\sigma_2^\dagger + \langle 3|\mathbf{d}|1\rangle\sigma_3^\dagger \end{aligned}$$

在这里对角项被忽略。另外上式的第二行描述正旋转分量, 第三行是负旋转分量。

定义  $\sigma_1 \equiv |1\rangle\langle 2|$ 、 $\sigma_2 \equiv |3\rangle\langle 2|$  和  $\sigma_3 \equiv |1\rangle\langle 3|$ ，则对应的共轭项为  $\sigma_1^\dagger \equiv |2\rangle\langle 1|$ 、 $\sigma_2^\dagger \equiv |2\rangle\langle 3|$  和  $\sigma_3^\dagger \equiv |3\rangle\langle 1|$ 。其哈密顿量的相互作用项变为

$$H_{AF} = -\hbar g \sigma_1 \exp[-i(k_1 z - \omega_1 t)] - \hbar G \sigma_2 \exp[-i(k_2 z - \omega_2 t)] - \hbar \Omega' \sigma_3 \exp[-i(k_\mu z_\mu - \omega_\mu t)] + h.c. \quad (1.19)$$

其中 Rabi 频率被定义为  $g \equiv \varepsilon_1 \langle 1 | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_1 | 2 \rangle / 2\hbar$ ， $G \equiv \varepsilon_2 \langle 3 | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_2 | 2 \rangle / 2\hbar$  以及  $\Omega' \equiv \varepsilon_\mu \langle 1 | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_\mu | 3 \rangle / 2\hbar$ ，这里近似的认为这些 Rabi 频率都是实数。这时的哈密顿量是随时间变化的

$$H' = H_A + H_{AF} \quad (1.20)$$

为方便计算，我们做么正变换，选择么正算符为

$$U(t) = \exp(i\omega_1 t |1\rangle\langle 1| + i\omega_2 t |3\rangle\langle 3|) \quad (1.21)$$

在此旋转框架下，有效哈密顿量为

$$H = i\hbar \frac{dU^\dagger(t)}{dt} U(t) + U^\dagger(t) H' U(t) \quad (1.22)$$

其中在计算后一项时，我们需利用数学关系式

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A, B] + \frac{\xi^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (1.23)$$

我们发现几个关键的结果分别是

$$\begin{aligned} U^\dagger(t) \sigma_1 U(t) &= \sigma_1 e^{-i\omega_1 t}, & U^\dagger(t) \sigma_1^\dagger U(t) &= \sigma_1^\dagger e^{i\omega_1 t} \\ U^\dagger(t) \sigma_2 U(t) &= \sigma_2 e^{-i\omega_2 t}, & U^\dagger(t) \sigma_2^\dagger U(t) &= \sigma_2^\dagger e^{i\omega_2 t} \\ U^\dagger(t) \sigma_3 U(t) &= \sigma_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}, & U^\dagger(t) \sigma_3^\dagger U(t) &= \sigma_3^\dagger e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \end{aligned}$$

则在么正算符 (1.21) 作用下, 我们可以得到一个不含时的哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\Delta_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\Delta_2 |3\rangle\langle 3| \\
 & - \hbar g (\sigma_1 e^{-ik_1 z} + \sigma_1^\dagger e^{ik_1 z}) - \hbar G (\sigma_2 e^{-ik_2 z} + \sigma_1^\dagger e^{ik_2 z}) \\
 & - \hbar\Omega' (\sigma_3 e^{-ik_\mu z_\mu} + \sigma_3^\dagger e^{ik_\mu z_\mu})
 \end{aligned}$$

如图 1.6 所示, 我们考虑两束光与对应原子能级之间的失谐相等, 即  $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{01}$  和  $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_{02}$  (其中  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_{01} - \omega_{02} = \omega_3$ )。若两束光距离气室的位置是相同的, 则为了方便, 我们假设光沿  $z$  方向, 而相对相位定义为  $\varphi \equiv k_\mu z_\mu$ 。 $\Lambda$  型三能级原子与两束光和微波场的相互作用的哈密顿量可以写成

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\Delta_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\Delta_2 |3\rangle\langle 3| \\
 & - \hbar g (\sigma_1 + \sigma_1^\dagger) - \hbar G (\sigma_2 + \sigma_1^\dagger) - \hbar\Omega' (\sigma_3 e^{-i\varphi} + \sigma_3^\dagger e^{i\varphi})
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

这个结果和 H. Guo 等人研究的哈密顿量一样 [73], 不同之处是他们利用射频场将  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$  能级耦合在了一起。接下来, 我们介绍如何在此基础上利用大失谐近似计算得到一个有效的两能级哈密顿量。

### 1.3.2 有效两能级的哈密顿量

因为  $\Delta_\alpha \gg \Gamma$ ,  $\Gamma$  是激发能级  $|2\rangle$  的自发辐射率 (衰减率), 因此我们可以忽略能级的自发衰减。这里主要利用薛定谔方程描述系统的演化。薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \tag{1.25}$$

态矢量分解成内态组合的形式

$$|\psi\rangle = \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle + \psi_3 |3\rangle$$



其中  $\psi_\alpha(t) \equiv \langle \psi | \alpha \rangle$ 。我们可以得到如下的运动方程

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi_1 &= \hbar\Delta_1\psi_1 - \hbar g\psi_2 - \hbar\Omega'e^{-i\phi}\psi_3 \\ i\hbar\partial_t\psi_2 &= -\hbar g\psi_1 - \hbar G\psi_3 \\ i\hbar\partial_t\psi_3 &= \hbar\Delta_2\psi_3 - \hbar G\psi_2 - \hbar\Omega'e^{i\phi}\psi_1 \end{aligned}$$

接下来三个等式整体平移能量  $-\hbar\Delta$ ，其中  $\Delta \equiv \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}$ 。因为  $|\Delta_2 - \Delta_1| \ll \Delta$  和

$\Delta \gg \Gamma$ ， $\psi_2$  将会随时间快速变化达到平衡状态，满足  $\partial_t\psi_2 = 0$ 。则可以得到

$$\psi_2 = -\frac{g}{\Delta}\psi_1 - \frac{G}{\Delta}\psi_3 \quad (1.26)$$

注意在导出这样关系的过程中，是选择适当的能量转移  $-\hbar\Delta$ ，减少了绝热消去后引起的态的转换。利用这个关系，我们得到了两个基态的耦合方程

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi_1 &= \hbar\left(\Delta_1 + \frac{g^2}{\Delta}\right)\psi_1 + \hbar\left(\frac{gG}{\Delta} - \Omega'e^{-i\phi}\right)\psi_3 \\ i\hbar\partial_t\psi_3 &= \hbar\left(\Delta_2 + \frac{G^2}{\Delta}\right)\psi_3 + \hbar\left(\frac{gG}{\Delta} - \Omega'e^{i\phi}\right)\psi_1 \end{aligned}$$

由此，我们可以得到有效的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \hbar\left(\Delta_1 + \frac{g^2}{\Delta}\right)|1\rangle\langle 1| + \hbar\left(\Delta_2 + \frac{G^2}{\Delta}\right)|3\rangle\langle 3| \\ &\quad + \hbar\left(\frac{gG}{\Delta} - \Omega'e^{-i\phi}\right)|1\rangle\langle 3| + \hbar\left(\frac{gG}{\Delta} - \Omega'e^{i\phi}\right)|3\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (1.27)$$

### 1.3.3 $\Lambda$ 型三能级系统暗态的精确解

为了更好地理解两能级模型，本节介绍求解哈密顿量 (1.24) 暗态解的一种方法 [73]。这里，我们首先将 (1.24) 写成矩阵形式

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\Delta_1 & -\hbar g & -\hbar\Omega'e^{-i\phi} \\ -\hbar g & 0 & -\hbar G \\ -\hbar\Omega'e^{i\phi} & -\hbar G & \hbar\Delta_2 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

其中忽略了动能项，仅有原子态。满足的本征方程为

$$H|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle \quad (1.29)$$

其中  $\lambda_i (i=0, \pm)$  分别是哈密顿量的三个本征值，对应的态是本征态。本征态可表示成：

$$|\psi_i\rangle = -e^{-i\phi}[G^2 + \lambda_i(\Delta_2 - \lambda_i)]|1\rangle + [G\Omega' + ge^{-i\phi}(\Delta_2 - \lambda_i)]|2\rangle + (e^{-i\phi}gG - \Omega'\lambda_i)|3\rangle \quad (1.30)$$

另外本征值满足  $\lambda_i$  是以下方程的解

$$\lambda^3 - \lambda^2(g^2 + G^2 + \Omega'^2) + 2gG\Omega'\cos\phi + (g^2 - \lambda^2)\Delta_2 + (G^2 - \lambda^2)\Delta_1 + \lambda\Delta_1\Delta_2 = 0 \quad (1.31)$$

若要消除激发能级  $|2\rangle$ ，只要态矢量 (1.30) 中对应的系数满足

$$G\Omega' + ge^{-i\phi}(\Delta_2 - \lambda_0) = 0 \quad (1.32)$$

其中  $\lambda_0$  定义为相应的本征值。一般情况下，这个态定义为暗态。哈密顿量 (1.24) 是厄米算符，其本征值  $\lambda_i$  一定是实数，因此  $e^{-i\phi}$  要求  $\phi=0$  或  $\pi$ 。接下来分两种情况讨论：

a) 当  $\phi=0$  时，将方程 (1.32) 的关系带入到 (1.31)，我们可以得到

$$\Delta_1 - \Delta_2 = -\frac{\Omega'}{gG}(g^2 - G^2) \quad (1.33)$$

其中  $\Delta_1 - \Delta_2$  是双光子失谐量。关系式 (1.33) 就是相对相位  $\phi=0$  时暗态解存在的条件。

b) 当  $\phi=\pi$  时，同样的方法我们可以得到暗态解的条件是

$$\Delta_1 - \Delta_2 = -\frac{\Omega'}{gG}(G^2 - g^2) \quad (1.34)$$

这与 Scully 相关著作上的结果一致。需要注意的是，我们要讨论的模型射频场不为零，但是要满足双光子共振，那么必须要求  $g = G$  才有暗态解。

两种情况对应的暗态形式相同

$$|\psi_0\rangle = -G|1\rangle + g|3\rangle \quad (1.35)$$

对应的本征值为

$$\lambda_0 = \Delta_1 + \frac{g\Omega'}{G}e^{-i\phi} = \Delta_2 + \frac{G\Omega'}{g}e^{i\phi}。 \quad (1.36)$$

另外两个本征值和本征态也能参照上述方式求解，但我们更关心的是暗态的情况，这里就不详细描述了。

## 1.4 我们的工作

大多量子系统必须被看做是开放系统，对其研究过程中非厄米理论将起着至关重要的作用。应用非厄米理论对开放系统的持续研究，是量子力学理论探索微观系统对环境作用下系统特征变化的重要延伸。本文主要研究三个量子态下非厄米系统的动力学研究：

第一部分研究  $\Lambda$  型三能级系统在双光子和射频场的作用下，并且在大失谐的条件下，约化为有效两能级系统（在第一章已经介绍）。在此基础上我们研究了  $PT$  对称下该模型的本征谱以及动力学。更进一步，研究布洛赫矢量的动力学，发现在  $PT$  对称区间，奇异点，以及  $PT$  破缺区间固定点发生了变化。而我们的模型

对研究具有平衡的增益和耗散的光与原子相互作用的系统具有一定价值。

第二部分我们研究了中间有耗散的三阱系统，研究了三阱中化学势，耗散因子，以及相互作用对达到平衡时系统的影响。该研究对出现耗散的情况下，如何设计减小耗散具有重要的意义。

## 第二章 $PT$ 对称的两态系统动力学特性

上一章我们已经对非厄米系统,尤其是 $PT$ 对称的哈密顿量性质有了初步的了解。本章将主要介绍一个非厄米两态量子系统模型的动力学,以便为下一章中介绍我们研究 $PT$ 对称有效两能级模型的工作做相关知识准备。这里首先了解一下数值计算双阱BEC波函数的一个工作,在此基础上可更好的了解非厄米两态量子系统模型的动力学性质。

### 2.1 GP 方程数值解

对于两空间分离的弱耦合 BECs, 其所在的双势阱对该凝聚体的动力学性质影响很大, 不同双势阱中 BECs 的动力学性质将会有很大的差异, 该特点将对我们研究 BECs 带来极大的帮助。研究不同的双势阱中 BECs 动力学性质时, 很重要的一点是必需得到左右两个阱中的凝聚体波函数, 很多时候波函数需用数值的办法才能计算得出。本节主要介绍一种数值计算方法, 用以研究对称势阱中 BECs 的动力学性质。

#### 2.1.1 对称势阱中弱耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学方程

在有囚禁势 $V(\mathbf{r})$ 存在的情况下, 相互作用玻色子的二次量子化的哈密顿量为 [74]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) \\ + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中,  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ 和 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ 分别是在 $\mathbf{r}$ 点的产生和湮灭算符,  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 是相互作用势。

当弱相互作用的玻色气体为非均匀凝聚体时，即在有外场的作用的情况下，使得凝聚体的性质，如凝聚粒子数比率、临界温度以及玻色气体热容量等，都依赖于囚禁势的形式。

此时，玻色子的场算符变为： $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) + \hat{\phi}(\mathbf{r})$ 。此处， $\Psi(\mathbf{r}) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle$ ，即  $\Psi(\mathbf{r})$  是玻色子场算符在系综水平上的统计平均值，通常称之为凝聚体的波函数。而  $\hat{\phi}(\mathbf{r})$  是非凝聚体各态的场算符，在凝聚体的耗散很小时一般是一个小量，满足  $\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \rangle = 0$ 。

在稀化的玻色气体中，原子间的相互作用一般都较弱，所以我们可以使用一个简单的近似来简化原子间的相互作用势：

$$U(\mathbf{r}) = 4\pi\hbar^2 a \delta^3(\mathbf{r})/m$$

其中  $m$  是玻色子的质量， $a$  为  $s$  波散射长度，用  $\delta(\mathbf{r})$  表征玻色子之间的相互作用是碰撞相互作用。

将玻色子的场算符和相互作用玻色子的二次量子化的哈密顿量代入到海森堡方程，并将简化后的原子间相互作用势代入，定义  $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$ ，并在计算过程中考虑玻色-爱因斯坦凝聚体的特性，可以得到：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g |\Psi|^2 \right] \Psi \quad (2.2)$$

此即 Gross-Pitaevskii (GP) 方程。

考虑置于对称势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体，其波函数形式可通过求解含时 GP 方程 (2.2) 得到，我们寻找如下形式的解：

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = c_1(t)\Phi_1(\mathbf{r}) + c_2(t)\Phi_2(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

$\Phi_i(\mathbf{r})$  为局域于势阱  $i$  ( $i=1,2$ ) 的解， $c_i(t) = \sqrt{N_i(t)} \exp[i\theta_i(t)]$ ， $N_i(t)$  为势阱  $i$  中的原子

数，总的原子数  $N \equiv N_1 + N_2 = |c_1|^2 + |c_2|^2$  是一个常量， $\theta_i(t)$  为势阱中 BECs 的相位。

通过  $\Phi_i(\mathbf{r})$ ，我们可以构造系统的对称和反对称解：

$$\Phi_+ = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}, \Phi_- = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \quad (2.4)$$

在对称势阱情况下  $\Phi_i(\mathbf{r})$  满足正交归一条件  $\int d\mathbf{r} \Phi_1 \Phi_2 = 0$  和  $\int d\mathbf{r} |\Phi_{1,2}|^2 = 1$ 。将其代入 GP 方程，同时引入一个描述双阱间原子数目布居数差值的变量  $\eta(t) \equiv [N_2(t) - N_1(t)]/N \equiv [|c_2|^2 - |c_1|^2]/N$  和相对相位： $\varphi(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ ，我们得到了新的原子数目布居数差与相对相位随时间演化的动力学方程：

$$\hbar \dot{\eta} = 2(E_0 + E_J) \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi - E'_J (1 - \eta^2) \sin 2\varphi \quad (2.5)$$

$$\hbar \dot{\theta} = \Delta E_0 - \eta E_U - 2(E_0 + E_J) \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \cos \varphi + E'_J \eta (2 + \cos 2\varphi) - E''_J \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi \quad (2.6)$$

其中  $E_0 = -\int d\mathbf{r} \Phi_1 H_0 \Phi_2$ ， $\Delta E_0 = \int d\mathbf{r} [\Phi_1 H_0 \Phi_1 - \Phi_2 H_0 \Phi_2]$ ， $E_U = Ng \int d\mathbf{r} \Phi_1^4$ ，

$$E_J = -Ng \int d\mathbf{r} \Phi_1 \Phi_2^3, E'_J = Ng \int d\mathbf{r} \Phi_1^2 \Phi_2^2, E''_J = Ng \left( \int d\mathbf{r} \Phi_1 \Phi_2^3 - \int d\mathbf{r} \Phi_1^3 \Phi_2 \right).$$

从上述表达式可看出，若要研究对称双阱中弱耦合 BEC 动力学演化的特性，则必需求出局域于势阱  $i$  的波函数  $\Phi_i(\mathbf{r})$ 。下面我们介绍如何用数值方法求得  $\Phi_i(\mathbf{r})$ 。

### 2.1.2 克兰克-尼克尔森法

由 John Crank 和 Phyllis Nicholson 发明的隐式差分格式，是基于求解网格中在行之间的点  $(x, t + k/2)$  处的抛物型方程

$$\frac{du(x, t)}{dt} = c^2 \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} \quad (2.7)$$

的数值近似解。应用中心差分公式得到求解  $du(x, t + k/2)/dt$  处的近似值公式，表示

为：

$$\frac{du(x, t + \frac{k}{2})}{dt} = \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + O(k^2) \quad (2.8)$$

其中  $d^2u(x, t + k/2)/dx^2$  的近似值可以由  $d^2u(x, t)/dx^2$  和  $d^2u(x, t + k)/dx^2$  近似值的平均值得到，精度为  $O(h^2)$ ，表示为：

$$\frac{d^2u(x, t + \frac{k}{2})}{dx^2} = \frac{1}{2h^2} \left[ \begin{aligned} &u(x-h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x+h, t+k) \\ &+ u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t) \end{aligned} \right] + O(h^2) \quad (2.9)$$

将式 (2.8)、(2.9) 代入式 (2.7) 中，并忽略误差项  $O(h^2)$  和  $O(k^2)$ ，然后可得到采用符号  $u_i^j = u(x_i, t_j)$  表示的差分公式：

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = c^2 \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} \quad (2.10)$$

令  $r = c^2k/h^2$ ，可得：

$$-ru_{i-1}^{j+1} + (2r+2)u_i^{j+1} - ru_{i+1}^{j+1} = (2-2r)u_i^j + r(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (2.11)$$

根据初始条件及边界条件，式 (2.11) 中右边的项都是已知的，因此可以将其化为三角形线性方程组  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  的形式，这样我们就可以通过迭代的方法求得 (2.7) 的数值解。

### 2.1.3 对称双阱中波函数的数值求解

对于 GP 方程 (2.2)，我们考虑一维的情况，并将其无量纲化和引入虚时间  $\tau = it$ ，

则其可化为：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - V_{ext}(x) - g_{1d} |\Psi|^2 \right] \Psi \quad (2.12)$$



其中  $V_{ext}$  为有效势， $g_{1d}$  描述玻色子间的相互作用强度。

选取任一试探函数  $\Psi_0$ ，然后对其归一化后得到初始函数  $\Psi = \Psi_0 / \sqrt{\int |\Psi_0|^2 dx}$ 。考虑玻色子相互作用远小于势函数时，将试探函数代入 (2.12) 并在虚时间内演化足够长的时间即可得到 BECs 对应的波函数，于是 (2.12) 式可根据克兰克-尼克森森法化为：

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_i^{j+1} - \Psi_i^j}{k} = & \frac{1}{4\hbar^2} [(\Psi_{i+1}^{j+1} - 2\Psi_i^{j+1} + \Psi_{i-1}^{j+1}) + (\Psi_{i+1}^j - 2\Psi_i^j + \Psi_{i-1}^j)] \\ & - \frac{1}{2} [V_{ext}(x_i) + g_{1d} |\Psi_i^j|^2] (\Psi_i^{j+1} + \Psi_i^j) \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中  $\Psi_i^j = \Psi(x_i, \tau_j)$ 。令： $V_i = k \cdot [V_{ext}(x_i) + g_{1d} |\Psi_i^j|^2]$ ， $A = \frac{k}{\hbar^2}$ ，有：

$$A\Psi_{i-1}^{j+1} - (2A + 2V_i + 4)\Psi_i^{j+1} + A\Psi_{i+1}^{j+1} = R_i \quad (2.14)$$

其中： $R_i = -A\Psi_{i-1}^j + (2A + 2V_i - 4)\Psi_i^j - A\Psi_{i+1}^j$ ，可化为三角形线性方程组  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  的形式。考虑到边界条件  $\Psi_\infty = \Psi_{-\infty} = 0$ ，这样我们就可以通过迭代的方法求得波函数  $\Psi$ 。

由 (2.4) 我们知道，对称势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体，其基态及激发态波函数对应  $\Phi_+$  和  $\Phi_-$ ，且  $\Phi_+$ 、 $\Phi_-$  分别具有对称性和反对称性。因此若初始的试探波函数为偶函数，则可以通过上述方法求得  $\Phi_+$ ，反之试探波函数取奇函数可求得  $\Phi_-$ 。这样通过式 (2.4) 就可求得局域于势阱  $i(i=1,2)$  的波函数  $\Phi_i(\mathbf{r})$ 。

我们可举一例以说明，假设空间中有效势的形式为  $V_{ext}(x) = ax^2 + be^{-\frac{x^2}{c}}$ ，即为一谐振子势和高斯势的线性叠加，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为和外势有关的系数，在数值计算中由式 (2.2) 无量纲化过程中确定。试探波函数分别选  $\Psi_+ = e^{-0.5(x-d)^2} + e^{-0.5(x+d)^2}$  和  $\Psi_- = e^{-0.5(x-d)^2} - e^{-0.5(x+d)^2}$ ，即分别是对称和反对称的形式，系数  $d$  与外势的选取有关，视具体的计算情况可很容易确定。根据上述方法，我们可很容易的得到  $\Phi_i(\mathbf{r})$ ，如图

2.1 所示。应用此方法，只需在程序中改变  $V_{ext}$  的形式即可求出任意的对称势阱中 BECs 的波函数  $\Phi_i(\mathbf{r})$ ，同时将  $\Phi_i(\mathbf{r})$  代入 (2.5) (2.6)，则该势阱中 BECs 的动力学性质则可以得到清楚的认识。

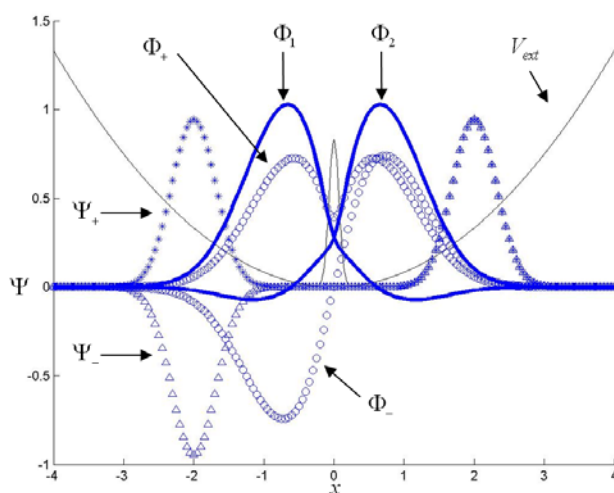


图 2.1 对称势阱中 BECs 波函数

在本节中，我们从最基本的相互作用玻色子二次量子化哈密顿量出发得到 GP 方程，再通过推导两空间分离弱耦合 BECs 动力学方程说明了计算双阱中 BECs 波函数的重要性，最后介绍了应用克兰克-尼克尔森方法通过数值计算得出任意对称双阱左右阱中 BECs 的波函数。这一套完整的方法可以用来研究任意对称势阱中 BECs 的波函数及其动力学性质，大量工作表明，不同的对称势阱对其中 BECs 动力学特性影响非常大，该特点为我们加深对 BECs 的认识将会提供极大的帮助。

## 2.2 非厄米两态系统的本征谱

上一节中，我们研究了对称双阱中 BEC 波函数的数值计算方法。在此基础上，我们考虑一个开放的玻色哈伯德两态量子系统哈密顿量 [75]

$$\hat{H}_2 = \chi(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) - 2i\gamma \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - J(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) \quad (2.15)$$

其中  $\hat{a}_j$  和  $\hat{a}_j^\dagger$  ( $j=1,2$ ) 分别是第  $j$  个格点的湮灭和产生算符。 $\chi$  是模式1离中心位能的偏差, 模式2偏差为  $-\chi$ 。另外模式1的在位能量是复数,  $\gamma$  是描述模式1的耗散强度的参数。 $J$  是两个模式间的耦合常数。这里我们仅考虑没有相互作用的动力学问题, 此时哈密顿量可以写成  $2 \times 2$  的矩阵形式

$$H_0 = \begin{pmatrix} \chi - 2i\gamma & -J \\ -J & -\chi \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

其中参数  $\chi$ 、 $J$  和  $\gamma$  都是实数, 且  $\gamma > 0$ 。对非厄米哈密顿量 (2.16) 做能量平移:

$H_0 \rightarrow H_0 + i\gamma \cdot I$ , 相当于对应的态做了变换:  $\psi \rightarrow \psi e^{\gamma t}$ 。这样可将一般的有耗散非厄

米系统过渡至另一种所谓的  $PT$ 对称形式, 其表达式为

$$H'_{PT} = \begin{pmatrix} \chi - i\gamma & -J \\ -J & -\chi + i\gamma \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

因为

$$\begin{aligned} PTH'_{PT}TP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi + i\gamma & -J \\ -J & -\chi - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\chi - i\gamma & -J \\ -J & \chi + i\gamma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

仅当  $\chi = 0$  时, 哈密顿量 (2.17) 才满足  $PT$ 对称, 即  $PTH'_{PT} = H'_{PT}TP$ 。其本征方程

$$H'_{PT}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad (2.19)$$

对应的本征值为

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{(\chi - i\gamma)^2 + J^2} = E_{\pm} - i\Gamma_{\pm} \quad (2.20)$$

其实部和虚部随  $\gamma$  的变化如图 2.2 所示:

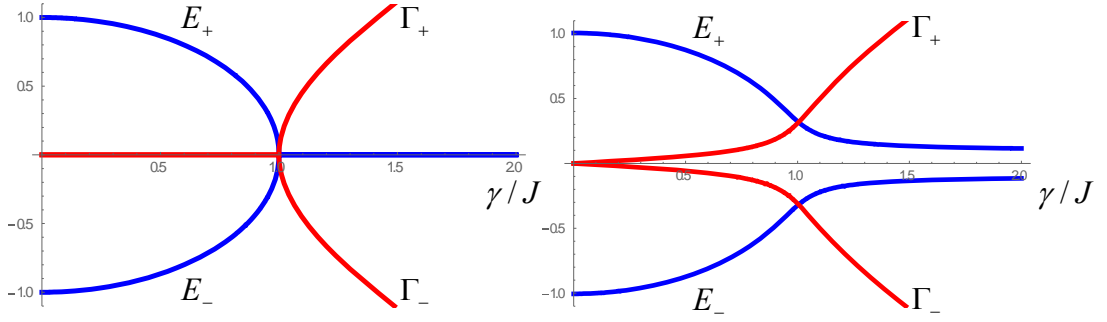


图 2.2 两能级哈密顿量本征谱的实部和虚部随  $\gamma$  的变化曲线，这里  $|J|=1$

(a)  $\chi=0$ , (b)  $\chi=0.1$

尽管哈密顿量 (2.17) 不是厄米算符，但在某些参数区间有纯粹实数谱。如当  $\chi=0$  时，在参数区间  $\gamma \leq J$ ，如图 2.2 (a) 所示，能谱是实数谱（与图 1.5 结果一样）。其对应的本征矢量同时也是  $PT$  算符  $PT$  的本征态，这个区间被看做是未破缺的  $PT$  对称区间。当  $\gamma > J$  时，能谱出现复数本征值，这个区间被看做是破缺的  $PT$  对称区间。当  $\chi \neq 0$  时，如图 2.2 (b) 所示本征值始终是复数，系统一直处于  $PT$  对称的破缺态。有耗散的哈密顿量 (2.16) 的本征值

$$\lambda'_{\pm} = -2i\gamma \pm \sqrt{(\chi - i\gamma)^2 + J^2} = E_{\pm} - i(\Gamma_{\pm} + 2\gamma)$$

虚部  $\Gamma_{\pm} + 2\gamma > 0$ ，总是负的复数谱。它们在  $\chi=0$  和  $J=\gamma$  处发生简并。当  $\gamma=0$  时，系统约化为厄米的两能级模型[75]。当  $\gamma \neq 0$  这个点就是奇异点 (EP) [9, 77-79]，非厄米系统的奇异行为本质将变得明显。在奇异点，不仅两个本征值相同而且对应的本征态重合，除去重合奇异点希尔伯特空间的非本征态又不足以作为完整的希尔伯特空间来做基矢。换句话说，处于奇异点的哈密顿量不是对角的，而是相当于 Jordan block。奇异点的出现，对系统的物理行为有很重要的影响[9, 15, 16, 80-81]。对于  $PT$  对称的哈密顿量 (2.17)，EP 点标志着本征值为复数的  $PT$  对称破缺区域的边界

[77]。

### 2.3 非厄米的两态量子系统的动力学演化方程

在没有破缺的  $PT$ 对称区域，哈密顿量 (2.17) 的本征态体现出了赝闭合行为，这就意味着引入一个合适的内积时间演化可以被用幺正的方式表达出来。不同于量子力学中守恒系统的波函数是正交归一完备的，其内积空间  $|\psi|^2$  可描述几率。系统 (2.17) 在本征值为实数的情况下，塌缩到对应本征态矢量的时间演化是守恒的，但是由于本征态矢量之间不满足正交性，故一般来说对于任意的初态将不再成立。接下来，我们研究在某一个初态下的动力学行为。

对于不随时间变化的哈密顿量，在给定某个初态：

$$\psi(t=0) = \psi_0$$

薛定谔方程  $i\partial_t\psi = H'_{PT}\psi$  可利用  $\psi(t) = U(t)\psi_0$  来计算，其中演化算符为  $U(t) = \exp(-iH'_{PT}t)$ 。根据级数展开公式

$$e^{-iH'_{PT}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iH'_{PT}t)^n \quad (2.21)$$

在展开过程中，由于

$$\begin{aligned} (H'_{PT})^2 &= \begin{pmatrix} \chi - i\gamma & -J \\ -J & -(\chi - i\gamma) \end{pmatrix}^2 = (\omega_p)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (H'_{PT})^3 &= \begin{pmatrix} \chi - i\gamma & -J \\ -J & -(\chi - i\gamma) \end{pmatrix}^3 = (\omega_p)^2 \begin{pmatrix} \chi - i\gamma & -J \\ -J & -(\chi - i\gamma) \end{pmatrix} \\ (H'_{PT})^4 &= \begin{pmatrix} \chi - i\gamma & -J \\ -J & -(\chi - i\gamma) \end{pmatrix}^4 = (\omega_p)^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\dots \end{aligned}$$

其中  $\omega_p = \sqrt{\zeta^2 + J^2}$ ,  $\zeta = \chi - i\gamma$  (本征值  $\lambda_{\pm} = \pm\omega_p$ )。当  $\omega_p \neq 0$ , 演化算符可以写成

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_p t) - \frac{i\zeta}{\omega_p} \sin(\omega_p t) & \frac{iJ}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \\ \frac{iJ}{\omega_p} \sin(\omega_p t) & \cos(\omega_p t) + \frac{i\zeta}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

然而当  $\omega_p = 0$  时, 对应的点就是奇异点。在其附近演化算符有这样的关系:

$$\lim_{\omega_p \rightarrow 0} U_{EP}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \zeta t & iJt \\ iJt & 1 + \zeta t \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

另外波函数总的模平方  $n = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ , 动力学演化由关系式

$$\dot{n} = -2\gamma(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \quad (2.24)$$

决定。我们可以发现, 总的模平方演化依赖于两个模式占据数差。而对于仅有耗散的哈密顿量 (2.16), 因为它与 (2.17) 的关系满足  $H_0 = H'_{PT} + i\mathcal{D}$ , 其对应的波函数则满足变化  $\psi(t) \rightarrow e^{-\gamma t} \psi(t)$ 。接下来我们讨论一下初态为仅能级 1 被占据的动力学演化情况, 即初态  $\psi_0 = (1, 0)^T$ 。

图 2.3 给出了  $\chi = 0$ ,  $J = 1$  时, 不同  $\gamma$  取值的系统动力学行为。左侧一系列 4 幅图描述了  $PT$  对称下, 两个能级上波函数模的平方以及两个能级上模方总和随时间变化的情况, 而右侧 4 幅图是在相同参数取值下对应能级 1 有耗散的动力学行为。右列图对应的波函数和左列图对应的波函数遵从变化关系  $\psi(t) \rightarrow e^{-\gamma t} \psi(t)$ 。我们可以发现,  $PT$  对称区间  $\gamma < J$ , 模平方的振荡周期随着  $\gamma$  的增加而增大, 当  $\gamma$  增大至接近奇异点即  $\gamma = J$  时, 模方发散到无穷大。初始  $|\psi_1|^2$  的衰减率最大, 而当  $|\psi_1|^2$  和  $|\psi_2|^2$  相当时, 增大和衰减平衡, 占据  $|\psi_2|^2$  最大时增加率最大。在  $\gamma$  取值很小的时候, 系统的动力学行为是在两个能级之间作类似 Rabi 振荡。当接近 EP 点时, 如图 2.3 左侧第三幅的两个能级占据由振荡变成平行, 在 EP 点振荡行为完全停止, 周期变得无穷大, 模方

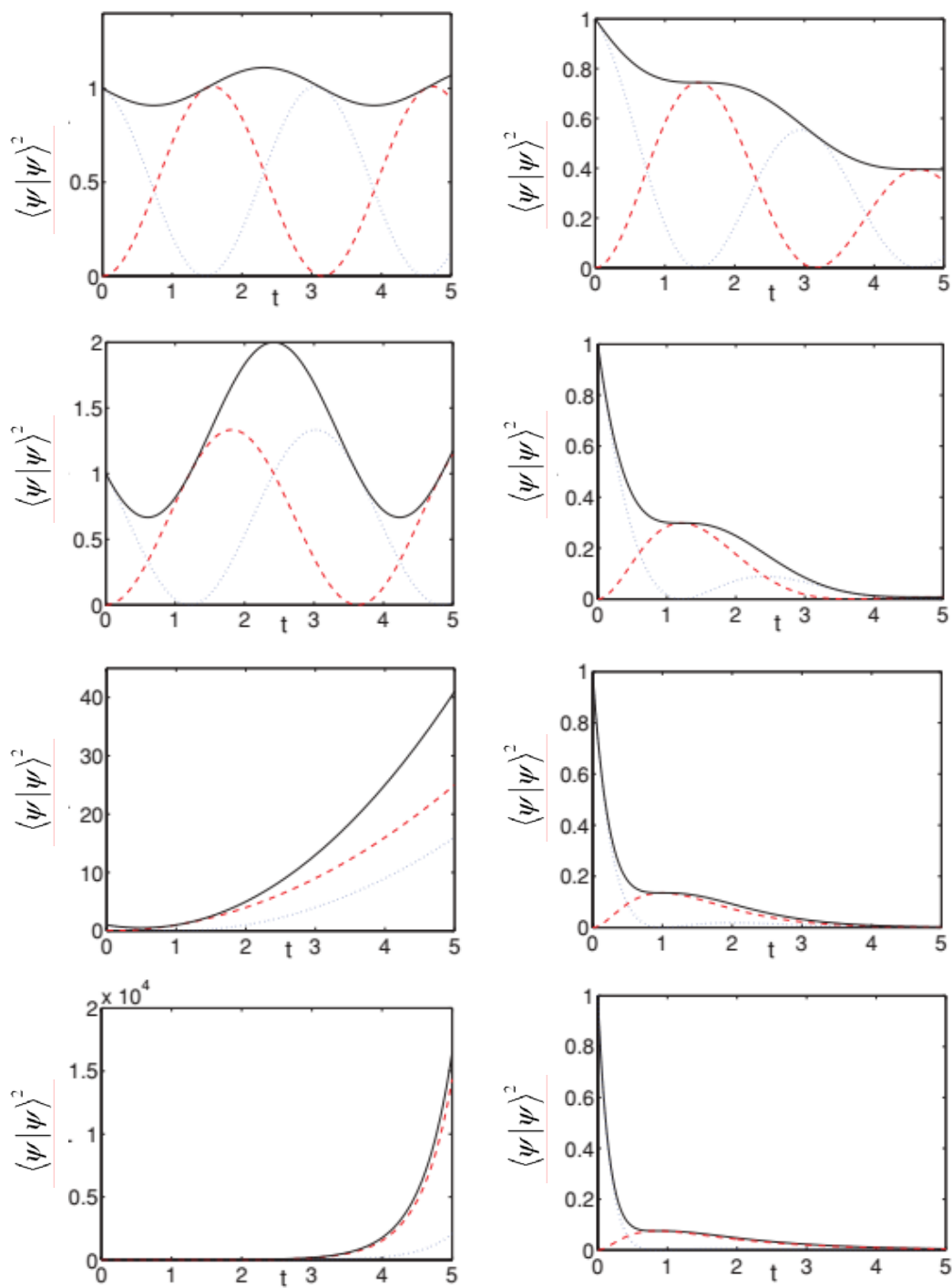


图 2.3 左侧图是  $PT$ 对称哈密顿量 (2.17) 在初态为  $\psi_0 = (1, 0)^T$  的动力学行为

右侧图是哈密顿量 (2.16) 对应的动力学行为

其中参数  $\chi = 0$ ,  $|J| = 1$  以及不同的  $\gamma$  值: 自上而下  $\gamma = 0.1, 0.5, 1, 1.5$

波函数分量的绝对值  $|\psi_1|^2$  (点线) 和  $|\psi_2|^2$  (虚线), 总的几率  $n = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$  (实线)

按照代数形式增长。这里可以通过解析方式得到  $\psi(t) = U_{EP}(t)\psi(0)$ ，对于  $\psi(0) = \psi_0 = (1, 0)^T$ ，有

$$n(t) = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 - 2Jt + 2J^2t^2$$

$\gamma$  值较大时， $PT$  对称破缺，如图 2.3 所示模方按照指数增长。

另一方面，仅有耗散的系统 (2.16) 我们将观察到模方的单一衰减情况，衰减不是按照指数变化的，直觉上是从能级中的一个发生衰减。因此，衰减是由这个能级上的占据情况决定的。当系统不是处于其本征态时，衰减是随时间变化的。相比  $PT$  对称系统而言，对仅有耗散的系统，非常有趣的是不能追踪到明显的 EP 特征。

由于波导的光波传播方程与薛定谔方程具有相似性，使得我们可能观察到具有平衡增益和耗散的光学波导结构动力学及  $PT$  对称相关的相变，这不仅在理论上被研究 [14, 16]，而且最近在实验上得到实现 [40-41]。

## 2.4 利用布洛赫球研究动力学

尽管非厄米的薛定谔方程使得模方不守恒，但描述系统的动力学与局限于布洛赫球表面的布洛赫矢量就时间演化而言是一致的。为了这点，首先定义重整化的态矢量：

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}} \quad (2.25)$$

则有耗散的哈密顿量 (2.16) 和  $PT$  对称的哈密顿量 (2.17) 的动力学由非厄米有效薛定谔方程

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi - i\gamma(1 - \kappa) & -J \\ -J & -\chi + i\gamma(1 + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$



决定，其中  $\kappa = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2$ 。另外，重整化后的态矢量满足归一性

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1 \quad (2.27)$$

接下来利用重整化的波函数定义布洛赫矢量分量

$$s_x = \frac{1}{2}(\varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*) = \frac{1}{2} \frac{\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*}{\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2} \quad (2.28a)$$

$$s_y = \frac{1}{2i}(\varphi_1^* \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2^*) = \frac{1}{2i} \frac{\psi_1^* \psi_2 - \psi_1 \psi_2^*}{\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2} \quad (2.28b)$$

$$s_z = \frac{1}{2}(\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_2^* \varphi_2) = \frac{1}{2} \frac{\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2}{\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2} \quad (2.28c)$$

三个分量满足归一化条件  $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1/4$ 。根据有效的薛定谔方程 (2.26)，我们可以计算得到

$$\dot{s}_x = -2\chi s_y + 4\gamma s_x s_z \quad (2.29a)$$

$$\dot{s}_y = 2\chi s_x + 2J s_z + 4\gamma s_y s_z \quad (2.29b)$$

$$\dot{s}_z = -2J s_y - \gamma(1 - 4s_z^2) \quad (2.29c)$$

重整化后的两能级波函数的模方和不含时，即不依赖于含时的模方和  $n = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ 。

$n$  可以通过布洛赫动力学计算得到

$$\dot{n} = \begin{cases} -4\gamma \left( s_z + \frac{1}{2} \right) n, \\ -4\gamma s_z n, \end{cases} \quad (2.30)$$

等号后的第一行是仅有耗散的哈密顿量 (2.16) 对应的波函数模方和与布洛赫矢量的关系，第二行是  $PT$ 对称下的哈密顿量 (2.17) 所具有的特点。

布洛赫动力学的一个很重要的特点就是固定点，也叫稳定态，可以通过解析计算四阶多项式的实数解得到

$$16\gamma^2 s_z^4 + 4(\chi^2 + J^2 - \gamma^2) s_z^2 - \chi^2 = 0 \quad (2.31)$$

另外  $s_y$  和  $s_x$  可以通过  $s_y = \gamma(1 - 4s_z^2)$  和归一化条件计算得到。

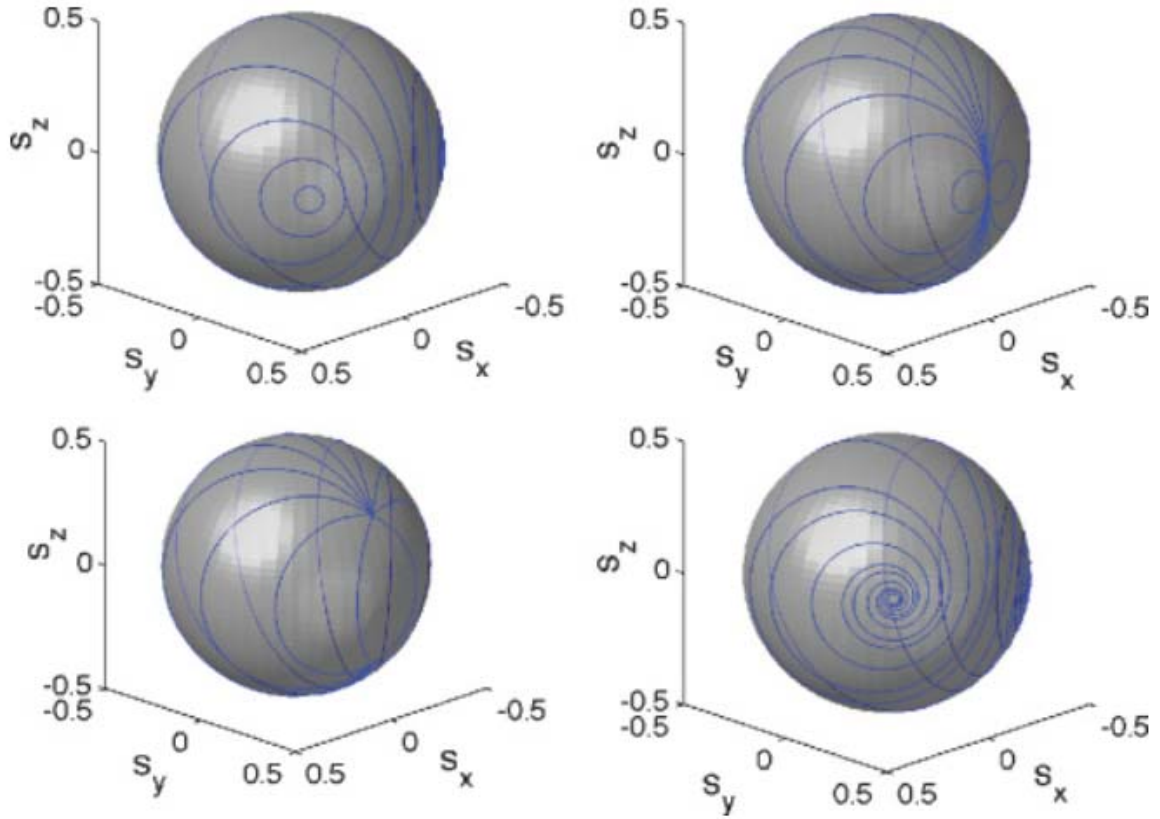


图 2.4 非厄米两能级系统的布洛赫动力学，其中  $J = 1$ ， $\chi$  和  $\gamma$  取不同值

顶部两个图和底部左侧图分别是  $\chi = 0$  和  $\gamma = 0.75, 1, 1.25$

底部右侧图对应的是  $\chi = 0.1$  和  $\gamma = 0.75$  [73]

图 2.4 给出了  $\chi = 0$  和三个不同  $\gamma$  值以及一个  $\chi = 0.1$  和  $\gamma \neq 0$  时的布洛赫动力学。左侧第一个图描述了  $\gamma < J$  时，系统围绕两个固定点中的一个做拉比类的振荡，这两个固定点都处于  $s_z = 0$  的  $x$ - $y$  平面上，与厄米情况相比，图形发生变形，中心不再是  $s_y = 0$ 。但是随着  $\gamma$  的增加，两个固定点沿着赤道朝向  $s_y = 1/2$  和  $s_x = 0$  彼此相遇。厄米情况下，即  $\chi = 0$ ， $\gamma = 0$ ，由于宇称对称则  $s_x = s_y = 0$ 。当  $\gamma \neq 0$  时，满足  $PT$  对

称的哈密顿量 (2.17) 在  $PT$ 对称区间要求  $s_z = 0$ 。

如图 2.4 所示顶部右侧描述的是奇异点  $\gamma = J$  的情形，两个固定点相遇，对称被破坏。对于更大的  $\gamma$  值，固定点中的一个变成了动力学的下沉点，而另一个固定点则变成了源点，这两个点都满足  $s_z \neq 0$ ，也就是系统偏向于占据其中的一个能级，这将被看是做有耗散的俘获。随着  $\gamma$  的增加，下沉点趋向于布洛赫球的南极靠近，而源点向北极靠近，这是由于布洛赫动力学描述剩余占据的平均值向远离耗散中心移动。对于  $\chi \neq 0$  的情况，系统不满足  $PT$ 对称，讨论的情况都将改变。对于任意小的  $\gamma$  值，固定点变成一个下沉点，一个是源点，如图 2.4 底部右侧图所示。

## 2.5 本章小结

本章一开始先讨论了 GP 方程数值解，从对称势阱中弱耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学方程出发，应用克兰克-尼克尔森法求解了对称双阱中波函数，这为第四章中三阱的动力学数值计算打下了非常好的基础。接下来，我们讨论了非厄米的两态量子系统的本征谱，考虑一个开放的玻色哈伯德两态量子系统哈密顿量，仅考虑没有相互作用时对非厄米哈密顿量做能量平移，这样可将一般的有耗散非厄米系统过渡至另一种所谓的  $PT$ 对称形式，尽管哈密顿量不是厄米算符，但在某些参数区间有纯粹实数谱。对于不同的参数取值，我们区分了未破缺的  $PT$ 对称区间和破缺的  $PT$ 对称区间，并讨论了奇异点 (EP) 的相关特性。在本章第三节中，我们介绍了非厄米的两态量子系统的动力学演化方程以及不同参数取值对系统动力学行为的影

响，观察到了系统动力学演化中 **Rabi** 振荡的特征。接下来，我们引入了布洛赫球用以研究动力学，布洛赫动力学的一个很重要的特点就是固定点，该方法将在本文第三章中用来研究  $PT$  对称的有效两能级系统及其动力学。

### 第三章 $PT$ 对称的有效两能级系统及其动力学

在过去的几十年中, 非厄米哈密顿量描述开放物理系统吸引了越来越多研究者的兴趣, 特别是  $PT$ 对称的哈密顿量实数能谱(本征值)的测量已完全得到了实现[11, 12]。在这个领域中, 科学家们在不同的物理系统中实现了实验测量, 范围从光波导结构[40-41]、平面微波腔[46]、光学腔[47-50]、电子电路[45]、回音壁模[51-52]和网格[83]等。同时, 国内外多个研究小组对  $PT$ 对称的哈密顿量相关特性进行了广泛的研究, 包括特征值、特征函数和动力学演化等。在所有的  $PT$ 对称系统中, 基于  $PT$ 对称的最小系统两能级耦合模型, 在等幅增益和损耗下的物理特性非常令人感兴趣[84-88]。也有研究将  $PT$ 对称下的两模模型推广到多模的情况, 例如玻色-哈伯德两态量子系统[75, 89-90]和一个具有两个共轭虚势的一维紧束缚链[41]。

在实验中, 二能级原子与近共振辐射场耦合可以描述成一个双模耦合系统, 两个能级之间的耦合可以用多种方式来实现。例如两模耦合的超精细能级, 可以在  $\Lambda$ 型三能级原子系统中通过拉曼激光绝热消除第三能级[91-93]产生, 这两个超精细能级可以直接通过微波场或射频场[70]进行调制。利用微波场和拉曼激光, 共同调制这种三能级系统产生了很多非常有意义的物理现象。Scully 小组发现, 电磁感应透明可以通过拉曼激光与微波场之间的相对相位来控制[71], 更多的物理特征也在两能级耦合系统中被发现[17, 73, 94], 增益和损耗也可能包含在耦合的两能级原子系统中, 实现两能级系统中的  $PT$ 或反  $PT$ 对称[13, 17, 41, 89-90, 95-96]。此外, 也可以通过激光控制, 例如激光与三能级或四能级原子[31]之间的相互作用, 来设计更

多的能级来满足  $PT$  对称性的物理系统[97]。

本章中，从理论上研究了  $PT$  对称二能级原子在三种体系中的动力学行为，即未破缺  $PT$  对称、EP 和破缺  $PT$  对称。我们首先对二能级厄米系统的时间演化进行了研究，通过  $\Lambda$  型三能级系统耦合两个光场和射频场并绝热消除第三能级得到  $PT$  对称的有效两能级系统的哈密顿量，然后讨论了系统在平衡增益和损耗下的本征值和动力学性质，重点讨论了 Rabi 振荡和相对相位对系统的影响，并给出了详细的计算结论。

### 3.1 $PT$ 对称的有效两能级系统的哈密顿量

根据第一章我们通过大失谐条件下绝热消除了激发能级，可以得到如 (1.27) 式有效的两能级的哈密顿量。为了研究  $PT$  对称的物理特点 ( $\chi = 0$ )，我们考虑  $g = G$  和  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ，则厄米的有效哈密顿量变成了

$$H'_{eff} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \Omega e^{i\phi} \\ 1 - \Omega e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

其中能级平移了常数项  $\hbar(\Delta + G^2/\Delta)$ ，这里  $\hbar G^2/\Delta \equiv 1$ ，而  $\Omega = \Omega'\Delta/G^2$ 。

我们考虑一个具有平衡增益和损耗的有效二能级模型，其哈密顿量可以通过  $\Lambda$  型三能级系统通过一个激发态  $|2\rangle$  绝热消除大失谐情况下得到：

$$H_{eff} = -i\gamma|1\rangle\langle 1| + (1 - \Omega e^{i\phi})|1\rangle\langle 3| + i\gamma|3\rangle\langle 3| + (1 - \Omega e^{-i\phi})|3\rangle\langle 1| \quad (3.2)$$

其中  $(1 - \Omega e^{\pm i\phi})$  描述态  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$  之间的有效耦合， $\Omega$  是射频场和原子作用的耦合强度， $\gamma$  是增益和耗散的幅值， $\phi$  是射频场和激光场之间的相对相位。这里先讨论  $\gamma = 0$  的情况，其对应的系统是一个标准的厄米系统。图 3.1 给出的能谱有两个能级分别是

$E_{\pm} = \pm\sqrt{(1-2\Omega\cos\phi+\Omega^2)}$ 。在  $\Omega < 1$  时，这两个能级可以很好地分开，并有能隙；在  $\Omega = 1$ ， $\phi = 0$  处两个能级将会重合；当  $\Omega$  远大于 1 时，能隙将进一步拉开。

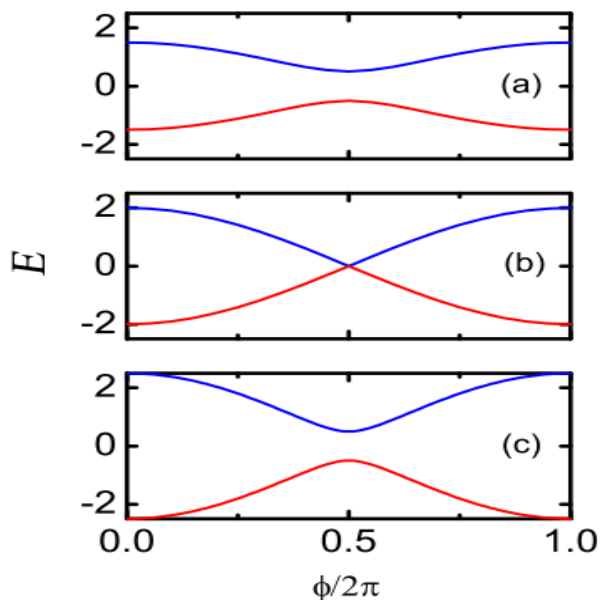


图 3.1  $\gamma = 0$  厄米系统的本征谱。

(a)  $\Omega = 0.5$ , (b)  $\Omega = 1.0$ , (c)  $\Omega = 1.5$

方程 (3.1) 的厄米哈密顿量动力学性质可以通过求解相关 Schrödinger 方程得

到：

$$i\partial_t\psi = H'_{eff}\psi \quad (3.3)$$

考虑初始条件  $\psi(t=0) = \psi_0$ ，动力学演化方程可以写为：

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi_0$$

时间演化算符  $\hat{U}(t) = \exp(-iH'_{eff}t)$ ，可以从下面表达式中解析得到

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & -i\frac{(1-\Omega e^{i\phi})}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \\ -i\frac{(1-\Omega e^{-i\phi})}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}$$

其中  $\omega_1 = |1 - \Omega e^{i\phi}|$ 。作为一个具体的例子，我们设置初始状态为  $\psi_0 = (1, 0)^T$ ，可以在  $t$  时刻获得这两种状态的动力学

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)|^2 &= \cos^2 \omega_1 t \\ |\psi_3(t)|^2 &= \sin^2 \omega_1 t \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中  $|\psi_1(t)|^2$  和  $|\psi_3(t)|^2$  是  $|1\rangle$  态和  $|3\rangle$  态的占据几率，图 3.2 显示了 Rabi 振荡周期为  $\pi/\omega_1$  不同的  $\Omega$  下两种状态的几率演化。

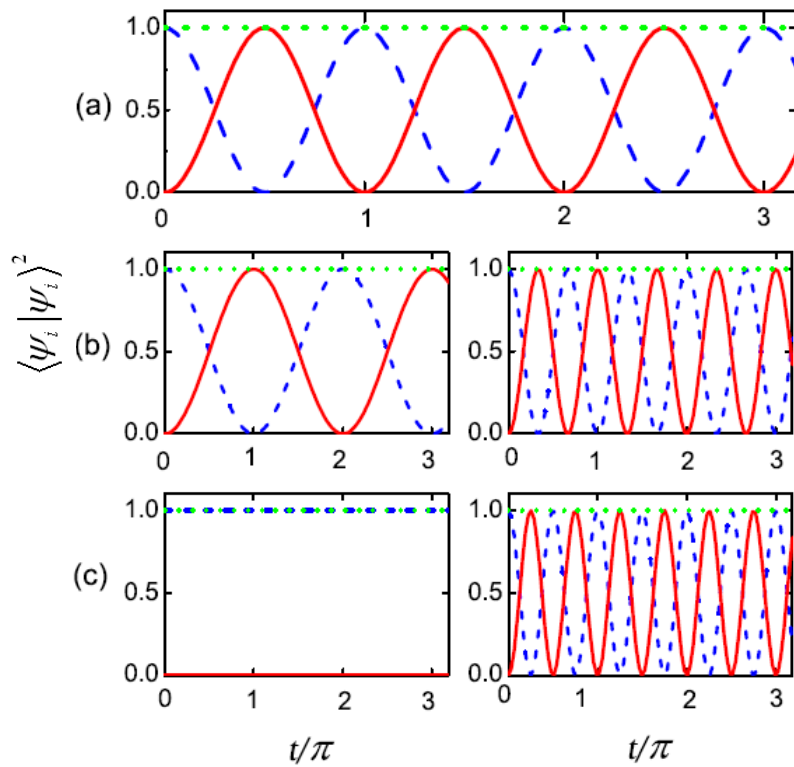


图 3.2 当  $\gamma = 0$  时厄米系统几率的动力学演化

红色实线对应态  $|3\rangle$  的几率，蓝色虚线对应态  $|1\rangle$  的几率，绿色点线对应总几率的演化

(a)  $\Omega = 0$ ，没有射频场；(b)  $\Omega = 0.5$ ，射频场不为零；(c)  $\Omega = 1$ ，射频场不为零

(b) 和 (c) 左侧一系列图相对相位  $\phi = 0$ ；(b) 和 (c) 右侧一系列图相对相位  $\phi = \pi$

当  $\Omega = 0$  且  $\omega_1 = 1$  时，如图 3.2 (a) 所示，仅有双光子项影响 Rabi 振荡。图 (b)



和 (c) 左侧一列, 相对相位  $\phi = 0$ , 随着  $\Omega$  的增加, 振荡周期增大, 相比图 3.2 (a) 表明射频场的加入使得振荡周期增大。而图 3.2 (c) 左图所示当  $\Omega = 1$ 、 $\phi = 0$  时, Rabi 振荡不存在, 射频场和两个光学场的相互抵消使得 Rabi 振荡不再发生。然而, 当  $\phi = \pi$  时, 振荡周期随  $\Omega$  的增加而减少, 如图 3.2 (b)、(c) 中右图所示。对于厄米系统的情况, 我们可以看到总几率始终是 1, 不随时间变化。

在增益和耗散 ( $\gamma \neq 0$ ) 存在的情况下,  $PT$ 对称的哈密顿量 (3.2) 的本征值为

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{|1 - \Omega e^{i\phi}|^2 - \gamma^2} \quad (3.5)$$

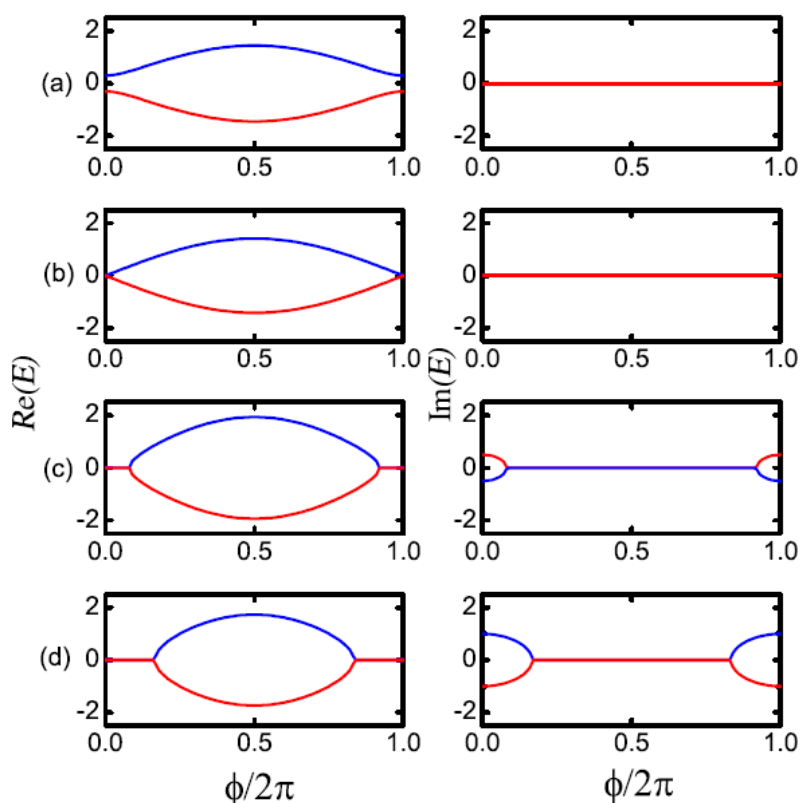


图 3.3 相对相位是  $\phi/2\pi$  时  $PT$ 对称两能级系统的本征值实部 (左侧图) 与虚部 (右侧图)

(a)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.4$ ; (b)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$ ; (c)  $\Omega = 1.0$ ,  $\gamma = 0.5$ ; (d)  $\Omega = 1.0$ ,  $\gamma = 1.0$

图 3.3 描述了具有  $PT$ 对称的二能级系统在不同的  $\Omega$  和  $\gamma$  的情况下, 本征值的实

部和虚部随着相对相位  $\phi$  的变化规律。定义  $\gamma_{PT} \equiv |1 - \Omega e^{i\phi}|$ 。当  $\gamma < \gamma_{PT}$  时，如图 3.3

(a)所示本征谱是实的。当  $\gamma = \gamma_{PT}$  时，图 3.3(b)显示的是在  $\phi = 0$  和  $\phi = 2\pi$  时  $E_+ = E_-$  本征能量重合，它是  $PT$  对称区间的边界。当  $\gamma > \gamma_{PT}$ ，本征值将出现成对互为复共轭的复的本征值，即  $PT$  对称自发破缺，如图 3.3 (c) 和 (d) 所示。

### 3.2 动力学演化

从动力学演化方程 (3.3) 可以很容易地计算非厄米两能级量子系统的动力学特征，对于奇异点 (EP) 以外的情况，演化算符为：

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t) & -i \frac{(1 - \Omega e^{i\phi})}{\omega} \sin(\omega t) \\ -i \frac{(1 - \Omega e^{-i\phi})}{\omega} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

其中，角频率

$$\omega = \sqrt{|1 - \Omega e^{i\phi}|^2 - \gamma^2} \quad (3.7)$$

当  $\gamma = 0$ ， $\omega = \omega_1$  时，与前面图 3.3 描述厄米的情形一致。在奇异点 ( $\gamma = \gamma_{PT}$ )，自发  $PT$  对称破缺能谱的奇异性在实验中已被观察到[40]，这可能会产生一些新的影响，例如手征性行为 and 状态交换过程[95-96]。因此，我们还要关注在参数接近奇异点时，系统的动力学演化，如  $\omega \rightarrow 0$  时的物理行为。在这个极限下，时间演化算符为：

$$\hat{U}_{EP}(t) \approx \begin{pmatrix} 1 - \gamma t & -i(1 - \Omega e^{i\phi})t \\ -i(1 - \Omega e^{-i\phi})t & 1 + \gamma t \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

对于初始态  $\psi_0 = (1, 0)^T$ ，我们可以发现在奇异点外两个能级上的模方是：

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)|^2 &= \left| \cos(\omega t) - \gamma \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right|^2 \\ |\psi_3(t)|^2 &= \left| i(1 - \Omega e^{-i\phi}) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $|\psi_{1,3}(t)|^2$  是含时的周期 Rabi 振荡函数。周期  $\pi/\omega$  依赖  $\gamma$ 、 $\Omega$  和  $\phi$ ，具体的依赖关系如方程 (3.7) 所示。图 3.4 详细地描述了初始状态的一些典型情况，左侧 3 幅图对应  $\phi=0$  时的动力学情况，右侧 3 幅图对应的是  $\phi=\pi$  时系统的动力学特征。

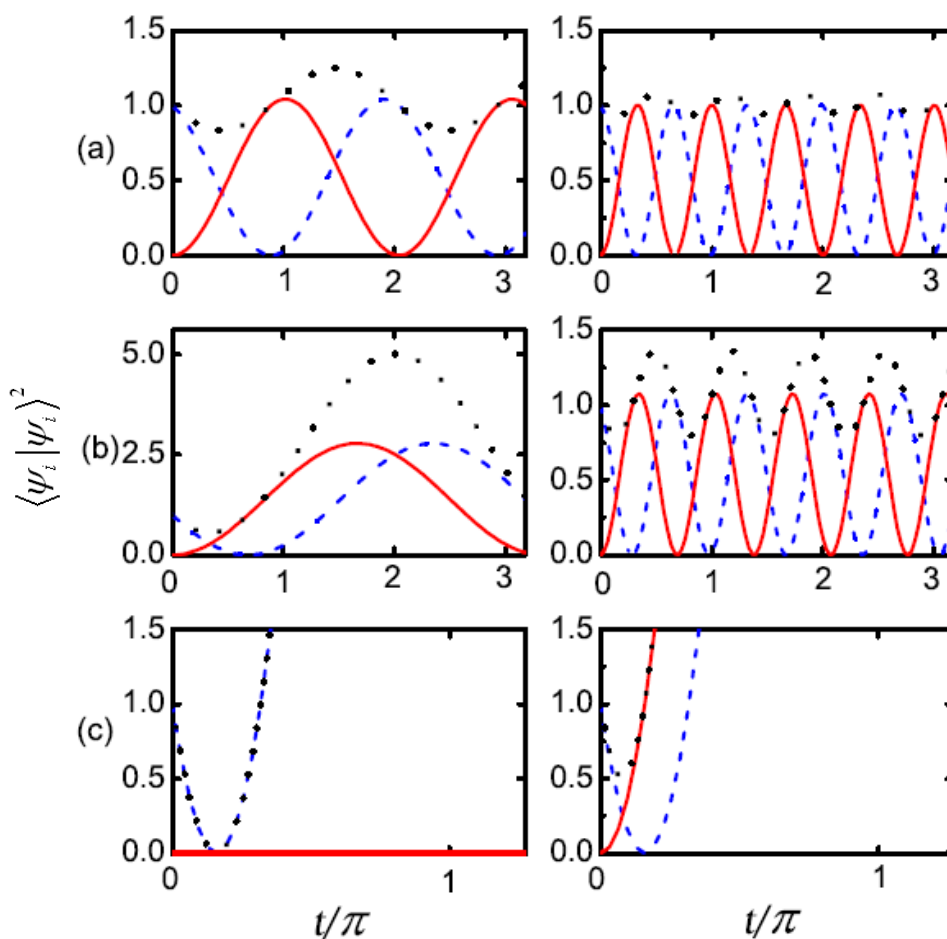


图 3.4 非厄米系统的模方的动力学演化

(a)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.1$ ; (b)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.4$ ; (c)  $\Omega = 1$ ,  $\gamma = 2$ ;

左侧三幅图  $\phi = 0$ , 右侧三幅图  $\phi = \pi$

红色实线对应  $|3\rangle$  态的模方, 蓝色虚线对应  $|1\rangle$  态的模方, 黑色的点线对应模方的和。

同时，图 3.4 的前两行，即 (a) 和 (b)，分别描述了在  $PT$  对称区域 ( $\gamma < \gamma_{PT}$ )，相同的  $\Omega$  不同  $\gamma$  时方程 (3.8) 的动力学特征。从图 3.4 (a)、(b) 和 (c) 来看，沿着纵向随着  $\gamma$  的增大 ( $\gamma$  取值 0.1, 0.4 和 2)，我们发现图像包络振幅逐渐增大。此外， $\phi = 0$  对应的周期大于  $\phi = \pi$ 。最后一行，图 3.4 (c) 给出了在  $\gamma \geq \gamma_{PT}$  时的两种情况，当  $\Omega = 1$ ， $\phi = 0$ ， $\gamma > \gamma_{PT}$  (这里  $\gamma_{PT} = 0$ )，由于射频场和双光子过程共同作用的相干导致如图 3.4(c) 左图所示  $|\psi_3(t)|^2$  一直是 0，而  $|\psi_1(t)|^2$  先减小后增加到无穷大。

事实上按照方程 (3.9)，当  $\Omega = 1$  和  $\phi = 0$  时，不管  $\gamma$  是否为 0， $|\psi_3(t)|^2$  始终为 0。

当  $\gamma = \gamma_{PT}$ ，根据方程 (3.8)，算符  $\hat{U}_{EP}(t)$  作用下的波函数其对应的模方为：

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)|^2 &= |1 - \gamma t|^2 \\ |\psi_3(t)|^2 &= |-i(1 - \Omega e^{-i\phi})t|^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中  $|\psi_1(t)|^2$  先减小后增加，同时，如图 3.4 (c) 右图所示  $|\psi_3(t)|^2$  始终在增加。总之，在  $PT$  对称区域， $|\psi_{1,3}(t)|^2$  的时间演化是周期性的 Rabi 振荡；在  $PT$  对称破缺区域，振荡被破坏，取而代之的是指数式增长。

### 3.3 布洛赫动力学

在量子力学中布洛赫球面是一种对于双态系统之纯态空间的几何表示法。这里用来描述  $PT$  对称下的有效两能级系统在不同初态下其动力学特征，更容易了解其动力学规律。为了和厄米情况进行比较，我们引入重整化的态矢量可以被定义为[75, 84]

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2}} \quad (3.11)$$

其满足任意时刻归一的条件  $|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2 = 1$ 。然后我们开始处理  $\varphi_j$  随时间演化的初始状态  $(1,0)^T$ 。

如图 3.5 (a) 所示,  $|\varphi_{1,3}(t)|^2$  在  $PT$  对称区域随时间的演化类似拉比振荡。如图 3.5 (b) 和 (c) 所示, 在  $PT$  对称破缺区间演化趋于稳定; 图 3.5 (d) 描述的力学与图 3.4 (c) 左图类似。为了更好地了解该系统的相关物理特点, 根据哈密顿量 (3.2), 我们定义非厄米的有效薛定谔方程

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\gamma(1-\kappa) & (1-\Omega e^{i\phi}) \\ (1-\Omega e^{-i\phi}) & i\gamma(1+\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

其中  $\kappa = |\varphi_1|^2 - |\varphi_3|^2$ 。进一步通过类似的方法, 可以用布洛赫矢量表示为:

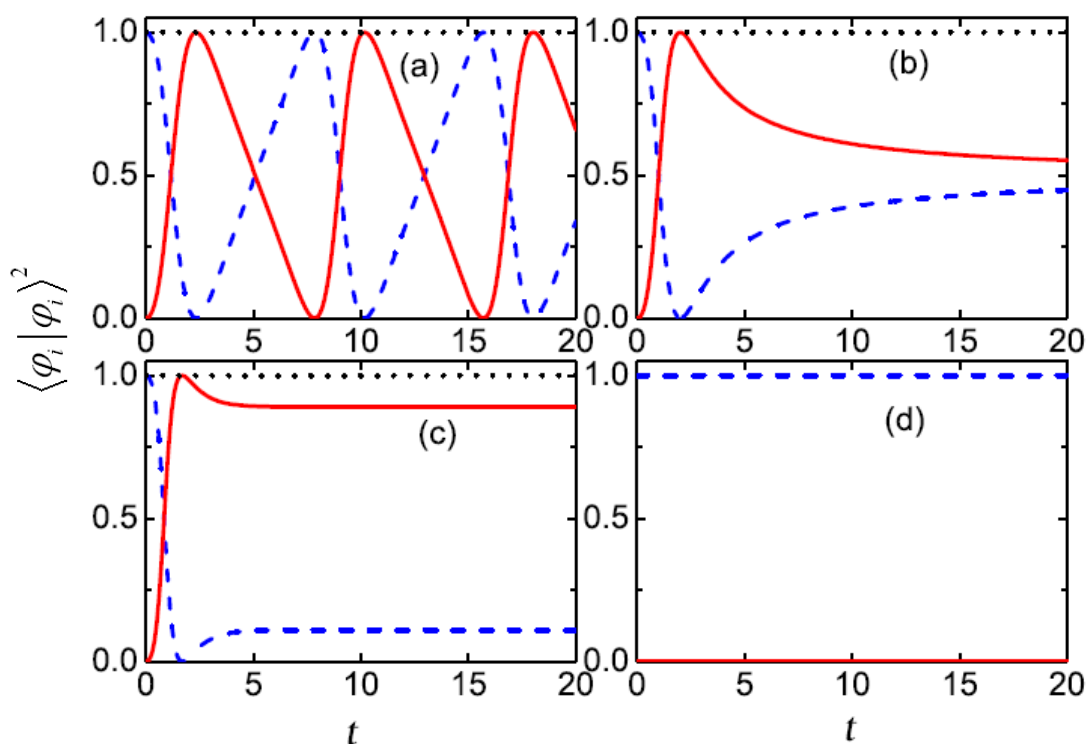


图 3.5 初态为  $(1,0)^T$ ,  $\phi = 0$ ,  $\Omega$ 、 $\gamma$  值不同时重整化态随时间的演化

(a)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.3$ ; (b)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$ ; (c)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.8$ ; (d)  $\Omega = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ;

红色的实线对应  $|\varphi_3|^2$ , 蓝色的虚线描述  $|\varphi_1|^2$ , 黑色的点线是与时间无关的  $|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2$

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{1}{2}(\varphi_1^* \varphi_3 + \varphi_1 \varphi_3^*) \\ s_y &= \frac{1}{2i}(\varphi_1^* \varphi_3 - \varphi_1 \varphi_3^*) \\ s_z &= \frac{1}{2}(\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_3^* \varphi_3) \end{aligned}$$

它总是限制在布洛赫球面上，满足  $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1/4$  [18]。然后从公式 (3.12) 我们可以推导出广义布洛赫运动方程：

$$\begin{aligned} \dot{s}_x &= 4\gamma s_z s_x + 2\Omega s_z \sin \phi \\ \dot{s}_y &= 4\gamma s_z s_y - 2(1 - \Omega \cos \phi) s_z \\ \dot{s}_z &= -\gamma(1 - 4s_z^2) + 2s_y - 2\Omega(s_y \cos \phi + s_x \sin \phi) \end{aligned} \quad (3.13)$$

利用四阶 Runge-Kutta 算法，我们得到了不同参数下非厄米系统的布洛赫动力学演化。

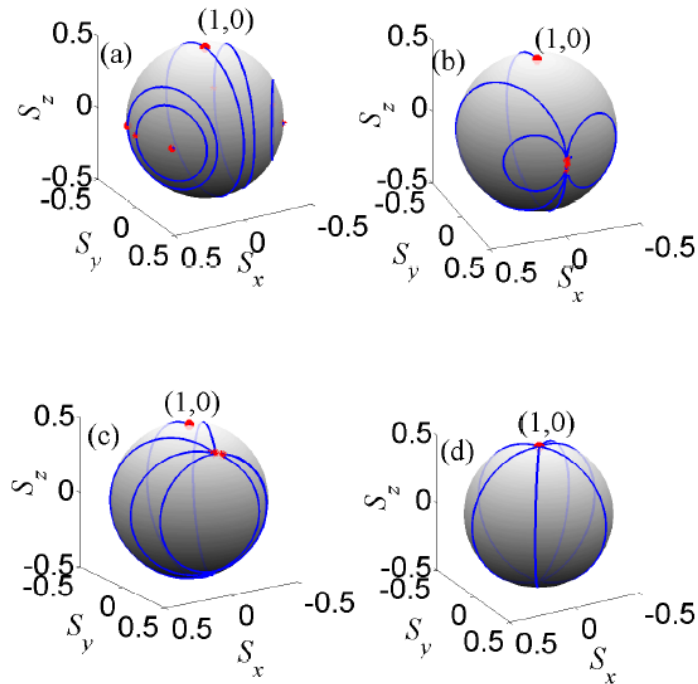


图 3.6 有效布洛赫动力学

(a)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.3$ ; (b)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$ ; (c)  $\Omega = 0.5$ ,  $\gamma = 0.8$ ; (d)  $\Omega = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ;

红色星号 (\*) 是每个演化的初始态矢量对应的布洛赫矢量位置

图 3.6 给出了不同  $\gamma$ 、 $\Omega$ 、 $\phi$  值情况下一些典型的有效布洛赫动力学实例。图 3.6 (a) 描述了当  $\gamma < \gamma_{PT}$  时除了固定点外，任意初始状态的演化都对应布洛赫球面上的一个封闭圆，每个封闭圆围绕两个固定点中的一个。例如初态  $(1,0)^T$  (顶部 “\*”) 的动力学演化始终在它所在的闭合圆里。当  $\gamma = \gamma_{PT}$  时，奇异点对应的动力学如图 3.6 (b) 所示，固定点只有一个，所有的初始点都朝向固定点演化，包括初态  $(1,0)^T$ 。而当  $\gamma > \gamma_{PT}$  时， $PT$  对称破缺，固定点也是两个，图 3.6 (c) 中初始态对应的布洛赫矢量用 “\*” 标了出来。我们给出了在  $z$  轴正方向的一个固定点附近的初始态演化，结果发现它们都演化到了另一个固定点。因此这两个固定点分别被定义为源点和下沉点。接下来我们分析一下固定点的表达形式。首先考虑 (3.12) 薛定谔方程对应的哈密顿量的定态方程：

$$\mu \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\gamma(1-\kappa) & (1-\Omega e^{i\phi}) \\ (1-\Omega e^{-i\phi}) & i\gamma(1+\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

第一行左乘  $\varphi_1^*$ ，第二行左乘  $\varphi_2^*$ ，则可以得到两个方程

$$\mu |\varphi_1|^2 = -i\gamma(1-2s_z^0) |\varphi_1|^2 + (1-\Omega e^{i\phi}) \varphi_1^* \varphi_2 \quad (3.15a)$$

$$\mu |\varphi_2|^2 = (1-\Omega e^{-i\phi}) \varphi_2^* \varphi_1 + i\gamma(1+2s_z^0) |\varphi_2|^2 \quad (3.15b)$$

然后通过 (3.15a) - (3.15b) 和 (3.15a) + (3.15b)，我们可以得到

$$\mu (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) = 2\mu s_z^0 = -i\gamma(1-4(s_z^0)^2) + 2is_y^0 - 2i\Omega(s_y^0 \cos\phi + s_x^0 \sin\phi) \quad (3.16)$$

$$\mu (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) = \mu = 2s_x^0 - 2\Omega(s_x^0 \cos\phi - s_y^0 \sin\phi) \quad (3.17)$$

其中定态本征值  $\mu$  我们可以通过 (3.17) 带入到 (3.16) 消掉，得到新的方程后，

根据方程左右实部和虚部对应相等，可以得到两个关系式：

$$s_z^0(s_x^0(1 - \Omega \cos \phi) + \Omega s_y^0 \sin \phi) = 0 \quad (3.18)$$

$$-\gamma(1 - 4(s_z^0)^2) + 2s_y^0(1 - \Omega \cos \phi) - 2\Omega s_x^0 \sin \phi = 0 \quad (3.19)$$

从这两个关系式我们可以得到  $PT$  对称区间和奇异点以及  $PT$  对称破缺固定点的表达式。接下来从三个方面来讨论其结果：

(i) 当根据 (3.18) 中

$$s_z^0 = 0 \quad (3.20)$$

且  $s_x^0(1 - \Omega \cos \phi) + \Omega s_y^0 \sin \phi \neq 0$

$$s_x^0 \neq -\frac{\Omega \sin \phi}{1 - \Omega \cos \phi} s_y^0$$

从 (3.19) 式，我们可以得到

$$s_y^0 = \frac{\gamma + 2\Omega s_x^0 \sin \phi}{2(1 - \Omega \cos \phi)} \quad (3.21)$$

根据  $(s_x^0)^2 + (s_y^0)^2 = 1/4$ ，我们可以

$$s_x^0 = \frac{-\Omega \gamma \sin \phi \pm \sqrt{\omega^2(1 - \Omega \cos \phi)^2}}{2(1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2)}$$

当  $\omega^2 > 0$  时，也就是  $PT$  对称区间

$$s_x^0 = \frac{-\Omega \gamma \sin \phi \pm \omega(1 - \Omega \cos \phi)}{2(1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2)} \quad (3.22)$$

当  $\omega^2 < 0$  时， $s_x^0$  没有实数解，故不予考虑。在这里 (3.20)、(3.21) 和 (3.22) 是我们得到的  $PT$  对称区间固定点的表达式。

(ii) 当



$$s_z^0 = 0 \quad (3.23)$$

且  $s_x^0(1 - \Omega \cos \phi) + \Omega s_y^0 \sin \phi = 0$  时, 我们可以得到

$$s_x^0 = -\frac{\Omega \sin \phi}{1 - \Omega \cos \phi} s_y^0 \quad (3.24)$$

根据 (3.19) 式, 可得

$$s_y^0 = \frac{\gamma(1 - \Omega \cos \phi)}{2(1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2)} \quad (3.25)$$

根据  $(s_x^0)^2 + (s_y^0)^2 = 1/4$ , 我们可以发现

$$0 = 1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2 - \gamma^2 = \omega^2$$

这正是奇异点的条件, 说明 (3.23)、(3.24) 和 (3.25) 是  $PT$  对称系统相变点固定点具有的布洛赫矢量的表达形式。我们可以发现其只有一个固定点, 这一点从图 3.6

(b) 的数值计算结果也得到了证明。

(iii) 当  $s_z^0 \neq 0$ , 根据 (3.18), 则必须

$$s_x^0(1 - \Omega \cos \phi) + \Omega s_y^0 \sin \phi = 0$$

我们可以得到

$$s_x^0 = -\frac{\Omega \sin \phi}{1 - \Omega \cos \phi} s_y^0 \quad (3.26)$$

根据 (3.19), 我们可以得到

$$s_y^0 = \frac{\gamma(1 - 4(s_z^0)^2)(1 - \Omega \cos \phi)}{2(1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2)} \quad (3.27)$$

因为  $(s_x^0)^2 + (s_y^0)^2 + (s_z^0)^2 = 1/4$ , 我们将 (3.26) 和 (3.27) 带入发现

$$1 - 4(s_z^0)^2 = \frac{1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2}{\gamma^2}$$

则

$$(s_z^0)^2 = \frac{\gamma^2 - (1 - 2\Omega \cos \phi + \Omega^2)}{4\gamma^2} = -\frac{\omega^2}{4\gamma}$$

这里仅当  $\omega^2 < 0$  时  $s_z^0$  有实数解，即这里仅当系统处于  $PT$  对称破缺区间，布洛赫矢量才有实数解。 $PT$  对称破缺区间  $z$  轴具有非零解

$$s_z^0 = \pm \frac{|\omega|}{2\gamma} \quad (3.28)$$

我们总结一下三种情况对应的固定点的特点：

(a) 在  $PT$  对称区间  $\gamma < \gamma_{PT}$ ，固定点满足关系 (3.20)、(3.21) 和 (3.22)。

我们发现固定点仅在  $x$ - $y$  平面分量不为 0，而  $z$  轴投影始终为 0。与参考文献[69]的模型相比，我们可以通过调控相对相位得到布洛赫球面赤道上任意取值的固定点，这有助于实验上很好的控制动力学演化。例如，随着  $\Omega$  和  $\phi$  的变化， $s_y^0$  不仅有正的取值，也可以有负的值。即使在厄米的情况下  $\gamma = 0$ ，由于相位  $\phi$  和  $\Omega$ ， $s_y^0$  可以是非零值。

(b) 然而，在奇异点，即  $\gamma = \gamma_{PT}$  时，所有的初始状态将会沿布洛赫球表面相应的曲线回到仅有的一个固定点，如关系式 (3.23)、(3.24) 和 (3.25)。其仍然处于布洛赫球赤道上，与图 3.6 (b) 所示相符。不同于[75]文中的结果： $s_x^0 = 0$ ，当  $\phi \neq 0$  或  $\pi$  的时候，我们可以有  $s_x^0 \neq 0$  的固定点取值。图 3.6 (b) 仅仅给出了  $\phi = 0$  或者  $\pi$  时，固定点  $s_x^0 = s_z^0 = 0$  和  $s_y^0 = 1/2$  时的有效布洛赫动力学。该模型提高了参数的多样性，

有助于研究 EP 的潜在其它特性。

(c) 当  $PT$  对称性破缺 ( $\gamma > \gamma_{PT}$ ) 时, 存在两个固定点: (3.26)、(3.27) 和 (3.28)。  $s_x^0$  与  $s_y^0$  随  $\gamma$  的增加而减小。与前面几个公式 (3.20) - (3.25) 相比,  $z$  轴投影不再为零。  $s_z^0 = \pm|\omega|/2\gamma$  被标记为 “ $(\pm)$ ”。图 3.6 (c) 显示, 在布洛赫球上的任意初始态都朝向固定点(-)演化, 即使是初始点靠近另一个固定点(+)的附近, 也会演化至(-)。因此, 固定点(+)被定义为动力学的源点, 另一个点(-)是动力学的下沉点。图 3.6 (d) 介绍了在  $\Omega=1$  和  $\phi=0$ , 在固定点  $s_x^0 = s_y^0 = 0$  和  $s_z^0 = \pm 1/2$  (对应状态  $(1,0)^T$  和  $(0,1)^T$ ) 的相干相消动力学特征, 它解释了图 3.4 (c) 左图和图 3.4 (d) 中动力学演化不随时间变化的原因 (除了图 3.6 之外, 我们研究的初态都是  $(1,0)^T$ )。此外,  $s_z^0$  的出现是  $PT$  对称破缺的特征, 固定点对研究  $PT$  对称系统动力学演化具有重要的意义。

综上所述, 我们考虑了具有平衡的增益和耗散的有效二能级哈密顿量。当系统是守恒的厄米系统时, 动力学演化遵循 Rabi 振荡, 而振荡周期通过调节射频频率和相对相位来控制; 但是, 射频场和两模光场作用相抵时, 振荡消失。

### 3.4 本章小结

对于具有  $PT$  对称性的有效二能级系统, 我们研究了  $PT$  对称区间和奇异点 (EP) 和  $PT$  对称破缺区间的动力学行为。更进一步, 我们用重整化态矢量研究了三种条件下的有效布洛赫动力学演化。由于动力学与固定点紧密相关, 我们计算得到了三种

区间对应的固定点表达形式。发现当  $z$  方向固定点分量不为零时  $PT$  对称发生破缺，同时在  $x$ - $y$  平面上的投影完全由相位、光场强度和射频场强度决定，这将非常有助于相关实验的实施。

## 第四章 中间阱有耗散的三阱系统的动力学研究

本章我们将要研究的是中间阱有耗散的三阱系统动力学，这个模型不同于具有平衡的增益和耗散的  $PT$  对称系统，没有区间可以使得其本征值都为实数。我们研究的模型，由于有耗散的阱位于中间，当其余两个阱所具有的化学势和相互作用等具有对称分布时，其本征态中有一个是暗态，对应本征值为 0，投影至该态上的分量不会随时间变化，因此在处理有耗散系统时具有可借鉴之处，这是引发我们研究兴趣的重要原因。

### 4.1 模型和背景介绍

在量子力学图象中，用来描述一个物理系统的哈密顿量必须是厄米的，保证系统具有正的能量本征值和粒子数守恒，但这种情况在实际中过于严格。光学中，有用到非厄米哈密顿量描述光在复数折射率介质中的传播[16, 98–102]。最近，玻色-爱因斯坦凝聚（BEC）中可以通过窄的电子束或窄的激光束[10, 103–104]来实现原子操控，这促进了原子系统的耗散模拟。

耗散过程的系统，可以通过负虚化学势非厄米哈密顿量来描述[11, 13, 19, 20–22, 64–67, 75, 89]。这是因为有耗散的系统，在本征空间含时的相位因子  $\exp(-iEt/\hbar)$  中，能量  $E$  的虚部会贡献出一项  $\exp(\text{Im}(E)t/\hbar)$ ，仅当复数能量的虚部为负时才能描述系统随时间耗散的特征。与之相反，当哈密顿量加入虚部为正的势能时，可描述有增益的系统。此外，还可以利用主方程引进耗散项来解决有耗散系统

的研究[18, 23, 105–109]。更重要的是, 在大多数情况下, 耗散是一种不良的破坏因素, 因此人们尽一切可能努力避免, 比如通过内在机制来平衡耗散[10, 110–111], 利用可控的耗散来探测量子系统[24], 利用系统和库之间的耦合来设计了光学超晶格中的有效耗散过程[23]等。在实验和理论上, 很多研究小组都投入了大量的精力来研究非厄米系统的动力学[23, 111–114]。

少阱系统的研究揭示了各种有趣的量子现象, 例如, 两阱或者三阱中的玻色爱因斯坦凝聚体已经在理论和实验上被广泛研究[74, 115–130]。在过去几年中, 双阱系统中的非线性约瑟夫森振荡和自俘获现象是两个重要的发现。然而, 最近更多的关注投给了三阱系统, 其通过调整隧穿和相互作用参数以及化学势, 可以得到更多更丰富的物理图象[127–129]。例如, 在周期性驱动下的三阱系统, 由于隧穿的相干性被破坏, 理论上 Dark Floquet 态被发现[125, 127]。因此, 暗态可以在三阱系统(三个量子态)中得到控制和实现。在开放的系统中更加丰富的物理图像也被发现, 例如混沌现象和引起自陷的分岔机制在三个耦合的凝聚态系统中已经被研究[132–133]。此外, 光在波导传播的过程中, Kerr 非线性相互作用会导致各种有趣的量子现象[130]。因此, 当耗散和非线性相互作用共同作用于三阱系统时, 有望在系统的动力学演化中获得更多新颖的特征。

本章主要研究非厄米三阱系统的量子动力学, 我们首先研究了在没有非线性相互作用下三个局域态上系数模平方的时间演化情况, 通过薛定谔方程的解析解, 直接给出了当两边阱的化学势相同情况下其随时间的变化关系。结果发现有一个本征态是暗态, 其本征值为零, 在暗态上的投影不依赖于时间和损耗因子的变化而变化。但当两边的化学势不相同, 暗态不再是本征态, 这也印证了在本文第一章 1.3.3

节中的结论：暗态存在的条件(1.33)中，在没有射频场时， $\Delta_1 = \Delta_2$ 才有暗态解，在这里相当于两边的化学势相同的条件。此外，当考虑三阱的非线性项时，三阱中模的平方将很快减少，这些结果仍然适用于具有相似结构的奇数阱系统。

## 4.2 线性情形下的模型与解析解

考虑中间势阱中含有虚化学势的耦合三阱系统，一般情况下，波函数 $|\psi(t)\rangle$ 是在三个局域格点上的叠加态：

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle + c_3(t)|3\rangle \quad (4.1)$$

其中， $c_i(t)$ 是三个局域态 $|i\rangle$  ( $i=1,2,3$ )上对应的振幅。在这个局域格点空间中，忽略空间对态的影响，因此系统的动态方程可以写成[65-67] (令 $\hbar=1$ )：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

其中，哈密顿量为

$$H = \begin{pmatrix} \mu_1 + g_1 |c_1|^2 & -J & 0 \\ -J & \mu_2 + g_2 |c_2|^2 & -J \\ 0 & -J & \mu_3 + g_3 |c_3|^2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

化学势的 $\mu_1$ 和 $\mu_3$ 是实数。 $\mu_2 = \eta - i\alpha$ 是复数，是 $|2\rangle$ 态的有效耗散 ( $\alpha > 0$ ) 或增益 ( $\alpha < 0$ ) [19, 75, 89]。 $g_i$ 是 $|i\rangle$ 态上 Kerr 非线性强度，而 $J$ 是耦合强度。令 $J=1$ ，所有的能量都以 $J$ 作为单位[132]。

我们首先讨论最简单的情况，即化学势对称分布 ( $\mu_1 = \mu_3$ )，并且忽略相互作用项 $g_i = 0$ 。令 $c_i(t) = c_i^0 \exp(-i\lambda_i t)$ ，将其带入到薛定谔方程(4.2)中，可以得到哈密

顿量 (4.3) 的本征方程, 进一步地通过久期方程可求得其本征值

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 \pm \Theta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

和相应的三个本征态矢量:

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 - \mu_2 \\ 1 \end{pmatrix}, |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \mu_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

其中:

$$\Theta = \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 8}$$

我们不需要对它们进行归一化, 因为归一化因子不会影响最终结果。本征矢量的左矢  $\langle\psi_2| = (1, \lambda_3^* - \mu_2^*, 1)$  与右矢不正交。因此, 有必要确定  $H^+$  的希尔伯特空间, 定义为  $|\tilde{\psi}_i\rangle = |\psi_i^*\rangle$ , 其左矢为  $\langle\tilde{\psi}_i| = \langle\psi_i^*|$ 。这里, 符号\*表示所有复数的复共轭。这些本征向量一起构成一个双正交基, 其完备关系[25]

$$\sum_k \frac{|\psi_k\rangle\langle\tilde{\psi}_k|}{\langle\tilde{\psi}_k|\psi_k\rangle} = 1 \quad (4.6)$$

正交态满足

$$\frac{\langle\psi_k|\tilde{\psi}_{k'}\rangle}{\langle\psi_k|\tilde{\psi}_k\rangle} = \delta_{kk'} \quad (4.7)$$

这里在第一章的 1.2.2 节(1.11)已做了相关介绍。需要注意的是, 本征矢量  $\psi_1$  是一个暗态, 它是左右两阱中两个局域态的叠加。完备性要求任意归一化的初始态

$|\psi_0\rangle = (c_1^0, c_2^0, c_3^0)^T$  可以在三个本征矢量(4.5)做展开, 表示为

$$|\psi(0)\rangle = A_1|\psi_1\rangle + A_2|\psi_2\rangle + A_3|\psi_3\rangle \quad (4.8)$$

其中, 其中系数  $A_i$  是  $c_i^0$  的组合, 例如归一化的  $|\psi_1\rangle$  对应  $A_1 = (c_3^0 - c_1^0)/\sqrt{2}$ 。在  $t$  时刻,



波函数的演化

$$|\psi(t)\rangle = A_1 e^{-i\lambda_1 t} |\psi_1\rangle + A_2 e^{-i\lambda_2 t} |\psi_2\rangle + A_3 e^{-i\lambda_3 t} |\psi_3\rangle \quad (4.9)$$

在局域格点空间，时间演化算符  $C$  矩阵作用波函数[10]

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) & C_{13}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) & C_{23}(t) \\ C_{31}(t) & C_{32}(t) & C_{33}(t) \end{pmatrix} |\psi(0)\rangle \quad (4.10)$$

根据本征态矢量(4.5), 我们可以得到

$$S^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\chi_2} & \frac{1}{\chi_3} \\ 0 & \frac{\lambda_3 - \mu_2}{\chi_2} & \frac{\lambda_2 - \mu_2}{\chi_3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\chi_2} & \frac{1}{\chi_3} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

其中  $\chi_{2,3}$  分别是  $|\psi_{2,3}\rangle$  的归一化系数。  $S^+$  的逆矩阵为

$$\tilde{S} = (S^+)^{-1} = \frac{(S^+)^*}{|S^+|} \quad (4.12)$$

其中

$$|S^+| = \frac{\sqrt{2}\Theta}{\chi_2\chi_3} \quad (4.13)$$

$$(S^+)^* = \begin{pmatrix} -\frac{\Theta}{\chi_2\chi_3} & 0 & \frac{\Theta}{\chi_2\chi_3} \\ \frac{(\lambda_2 - \mu_2)}{\sqrt{2}\chi_3} & -\frac{\sqrt{2}}{\chi_3} & \frac{(\lambda_2 - \mu_2)}{\sqrt{2}\chi_3} \\ -\frac{(\lambda_3 - \mu_2)}{\sqrt{2}\chi_2} & \frac{\sqrt{2}}{\chi_2} & -\frac{(\lambda_3 - \mu_2)}{\sqrt{2}\chi_2} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

可通过  $C$  计算得到，其中

$$C = S^+ \text{Diag}(e^{-i\lambda_1 t}, e^{-i\lambda_2 t}, e^{-i\lambda_3 t}) \tilde{S} \quad (4.15)$$

$S^+$  是格点空间和本征矢量空间的变换矩阵，其逆矩阵为  $\tilde{S}$ ，这些算符不要求一定是

么正的。实际上, 通过将本征矢量  $|\psi_i\rangle$  或  $|\tilde{\psi}_i\rangle$  逐行的写入到一个方矩阵, 算符  $S^+$  和  $\tilde{S}^+$  满足  $S^+\tilde{S} = \tilde{S}S^+ = 1$ , 且  $\tilde{S}^+S = S\tilde{S}^+ = 1$ 。这样, 方程 (4.15) 中含时的矩阵元素  $C_{ij}(t)$  可以确定为

$$\begin{aligned} C_{11}(t) &= C_{33}(t) = \frac{1}{2}e^{-i\lambda_1 t} + \frac{1}{2}f_+(t) \\ C_{31}(t) &= C_{13}(t) = -\frac{1}{2}e^{-i\lambda_1 t} + \frac{1}{2}f_+(t) \\ C_{22}(t) &= f_-(t) \\ C_{12}(t) &= C_{21}(t) = C_{23}(t) = C_{32}(t) = \frac{1}{\Theta}(e^{-i\lambda_3 t} - e^{-i\lambda_2 t}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \frac{\lambda_2 - \mu_2}{\Theta} e^{-i\lambda_2 t} - \frac{\lambda_3 - \mu_2}{\Theta} e^{-i\lambda_3 t} \\ f_-(t) &= \frac{\lambda_2 - \mu_2}{\Theta} e^{-i\lambda_3 t} - \frac{\lambda_3 - \mu_2}{\Theta} e^{-i\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (4.17)$$

系数  $C_{ij}$  的对称性直接反映了局域格点空间的哈密顿量。对于任意初始状态  $|\psi(0)\rangle$ , 我们可以由系数  $C_{ij}$  推断出  $\psi(t)$  态的演化形式, 例如第  $i$  个局域态的振幅

$$c_i(t) = C_{i1}(t)c_1^0 + C_{i2}(t)c_2^0 + C_{i3}(t)c_3^0$$

相应地, 每个局域态系数模的平方为

$$P_i(t) = |c_i(t)|^2 \quad (4.18)$$

其所有和为

$$P_{all}(t) = \sum_i P_i(t) \quad (4.19)$$

为了简单起见, 我们假设左右两阱中的化学势为 0, 而且局域态  $|2\rangle$  的化学势是一个纯虚数, 即  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ ,  $\mu_2 = -i\alpha$ 。在本章接下来的部分中, 我们主要讨论  $\alpha > 0$ , 即系统仅有耗散的物理行为。容易看到, 当  $\alpha^2 < 8$  时本征值  $\lambda_{2,3}$  中的  $\Theta$  是正实数, 当  $\alpha^2 > 8$  时本征值  $\lambda_{2,3}$  中的  $\Theta$  是纯虚数, 这将大大的改变方程  $f_{\pm}$  对时间的依赖性。当

$\alpha^2 < 8$  时, 我们可根据  $\Theta = |\Theta|$ , 得到方程  $f_{\pm}(t)$  为

$$f_{\pm}(t) = \pm e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \frac{\sin(\frac{1}{2}|\Theta|t \pm \beta)}{\sin \beta} \quad (4.20)$$

其中  $\beta = \arcsin(|\Theta|/\sqrt{8})$ 。公式 (4.20) 中的正弦函数, 描述了从  $f_{\pm}(0) = 1$  开始的振荡衰减过程。我们发现临界阻尼发生在  $\alpha^2 = 8$ , 在其它情况下, 当  $\alpha^2 > 8$  时,  $\Theta = i|\Theta|$ , 系统进入过阻尼区

$$f_{\pm}(t) = \pm e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \frac{\sinh(\frac{1}{2}|\Theta|t \pm \beta')}{\sinh \beta'} \quad (4.21)$$

其中  $\beta' = \operatorname{arcsinh}(|\Theta|/\sqrt{8})$ 。因为  $|\alpha| > |\Theta|$ , 方程 (4.21) 中  $f_{\pm}(t)$  的衰减项  $e^{-\alpha t/2}$  将由单调递增的双曲正弦函数来补偿, 从而导致过阻尼, 与化学势参数  $\alpha^2 < 8$  区域中关系式 (4.20) 相比衰减较慢。以初始态  $c_1^0 = 1$  且  $c_2^0 = c_3^0 = 0$  为例, 三个态的  $P$  值分别为:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= |C_{11}(t)|^2 = \frac{1}{4}|f_+(t) + 1|^2 \\ P_3(t) &= |C_{31}(t)|^2 = \frac{1}{4}|f_+(t) - 1|^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

和

$$P_2(t) = |C_{21}(t)|^2 = \frac{2}{|\Theta|^2} e^{-\alpha t} \begin{cases} 1 - \cos(|\Theta|t), & \alpha^2 < 8 \\ \cosh(|\Theta|t) - 1, & \alpha^2 > 8 \end{cases} \quad (4.23)$$

如图 4.1 所示给出了三种不同  $\alpha$  值局域态上系数模平方的时间演化。当  $\alpha = 1$  时, 我们发现  $P_1(t)$  和  $P_3(t)$  在相同的平衡值 0.25 处进行明显的振荡。 $\alpha = 2$  时, 模平方值迅速地达到它们的平衡值 0.25, 具有明显的阻尼振荡特征。而当  $\alpha = 3$  时,  $P_1(t)$  的减小和  $P_3(t)$  的增加将慢得多, 这是过阻尼的典型行为, 在这两种情况下的  $P_2(t)$  快速振荡到一个几乎可以忽略的值, 这意味着中间阱的泄漏。另外我们发现在  $t \rightarrow +\infty$  的极

限下,  $P_i$  的平衡值和  $\alpha$  无关, 在这个极限下  $e^{-i\lambda_{2,3}t} \rightarrow 0$  且  $f_{\pm}(t) \rightarrow 0$ 。对于任意初始态, 波函数  $|\psi(t)\rangle$  变为:

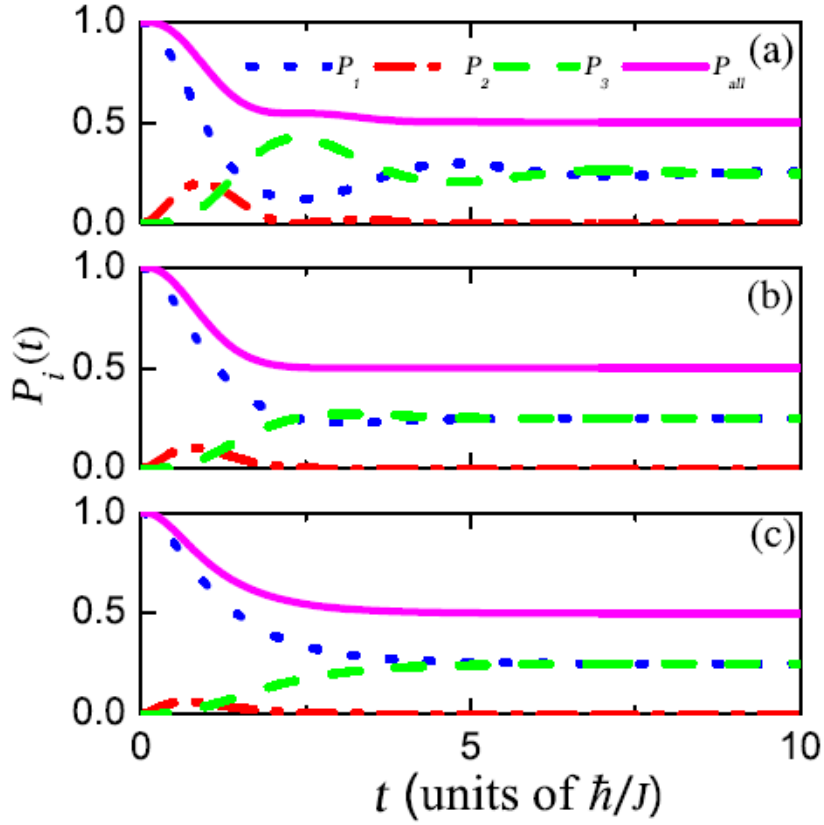


图 4.1 每个阱局域态上系数的模平方  $P_i(t)$  和总模平方  $P_{all}$  (粉红色实线) 的时间演化图

其中耗散因子  $\alpha = 1$  (a 图),  $\alpha = 2$  (b 图),  $\alpha = 3$  (c 图)

$$\text{初始态 } c_1^0 = 1, c_2^0 = c_3^0 = 0, \mu_1 = \mu_3 = \eta = 0$$

$$|\psi(t \rightarrow +\infty)\rangle = \frac{c_3^0 - c_1^0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

其对应的模平方是

$$P_{1,3}(t \rightarrow +\infty) = \frac{(c_1^0 - c_3^0)^2}{4} \quad (4.25)$$

$$P_2(t \rightarrow +\infty) = 0 \quad (4.26)$$

这表明，稳定态就是暗态  $|\psi_1\rangle$ ，在其上的投影将永久保持。对初态  $c_1^0 = 1$  和  $c_2^0 = c_3^0 = 0$ ，显而易见，总的模平方  $P_{all}(t \rightarrow +\infty) = 0.5$ ，如图 4.1 所示它不随  $\alpha$  的变化而变化。这些结果表明，因为在暗态上的投影不会随时间改变，耗散得到了明显的抑制，对于其它的初始态也会发生类似的情况，甚至包括暗态  $|\psi_1\rangle$  自身 [20, 75, 133-137]。

当考虑不为零的化学势对应的非厄米系统时，通过  $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle$  来计算三个局域态上的系数，然后根据公式 (4.18) 得到模平方  $P_i(t)$ 。在左阱和右阱的化学势不相等时，即  $\mu_1 \neq \mu_3$ ，暗态  $|\psi_1\rangle$  不再是系统的本征态 [73, 90]。一个直接的结果就是，所有三个态的  $P_i(t)$  在  $t \rightarrow +\infty$  将发生耗散。如图 4.2 所示，当  $\alpha = 2$ ， $\mu_1 = 0.1$ 、 $\mu_3 = 0.5$  时，我们给出了左右两阱化学势不同时，对应各阱  $P_i(t)$  和  $P_{all}$ （粉红色实线）的模平方随时间演化的趋势。显然，初态  $(1,0,0)^T$  在初始时刻几率  $P_1 = 1$ ，从 1 衰减到 0，同时  $P_{2,3}$  在短暂的时间内增加然后减小到零。

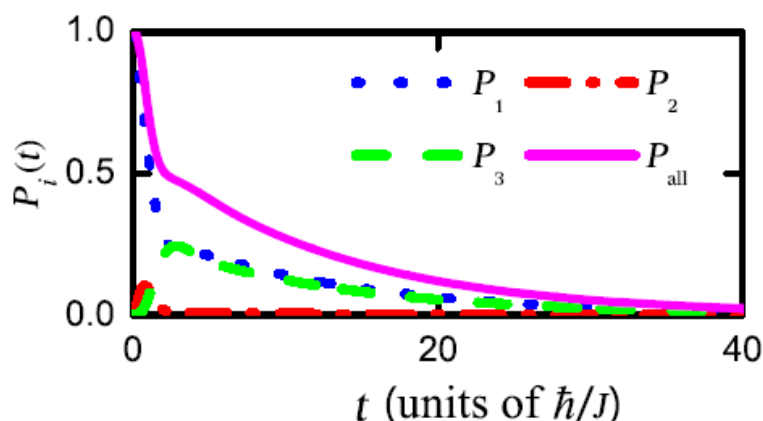


图 4.2 化学势不同时对应各阱  $P_i(t)$  和  $P_{all}$ （粉红色实线）模平方的时间演化

$$\text{初始态 } c_1^0 = 1, c_2^0 = c_3^0 = 0, \mu_1 = 0.1, \mu_3 = 0.5, \alpha = 2$$

在左右两阱处于平衡条件时，即化学势  $\mu_1 = \mu_3$ ，研究  $\mu_2$  实部  $\eta$  对每个态演化的影响是非常有意义的。例如，我们设  $\mu_1 = \mu_3 = 0.5$ 、 $\alpha = 2$ ， $\mu_2$  的实部  $\eta$  从 0 到 6。如图 4.3 所示，我们发现模平方  $P_{i,3}$  的振荡时间随着  $\eta$  的增大越来越长，有效地减慢了  $P_i$  之和达到平衡的过程，然而这并不影响  $t \rightarrow +\infty$  时趋于稳定态的分布。

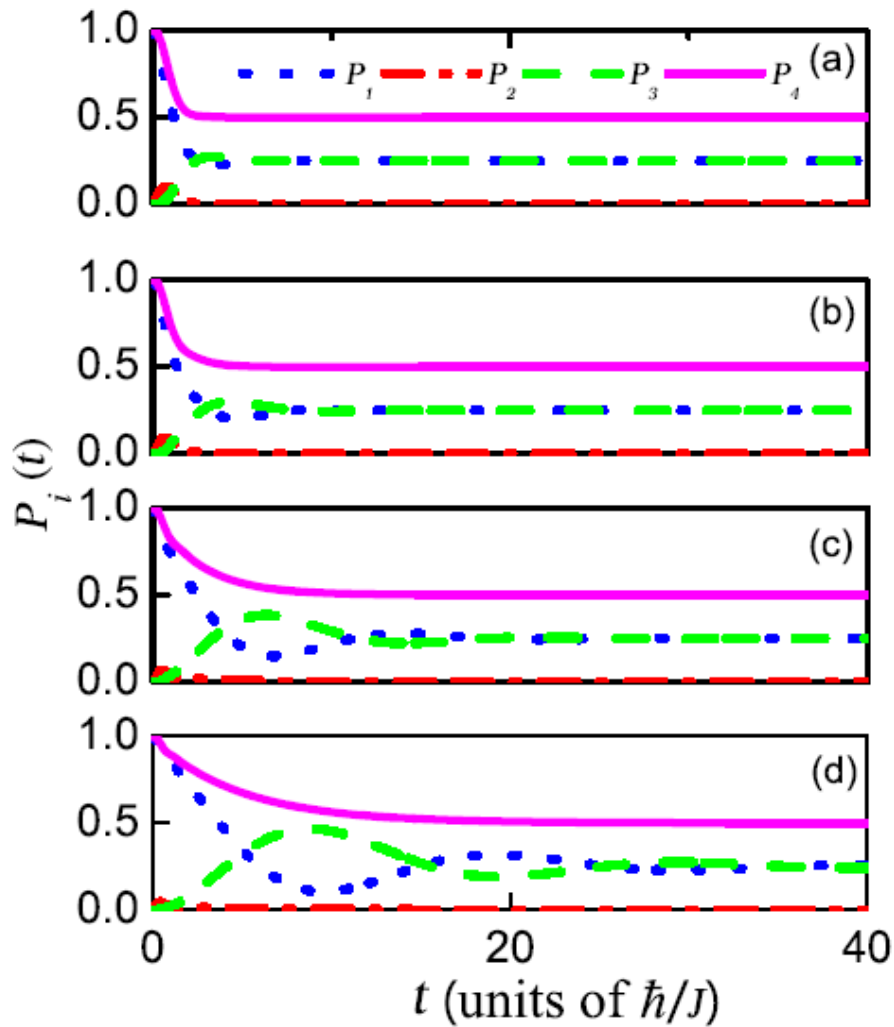


图 4.3  $\mu_1 = \mu_3 = 0.5$ 、 $\alpha = 2$  时， $\mu_2$  实部  $\eta$  对  $P_i(t)$  随时间演化的影响

(a)  $\eta = 0$ , (b)  $\eta = 2$ , (c)  $\eta = 4$ , (d)  $\eta = 6$

### 4.3 应用数值方法分析非线性相互作用下的动力学演化

当哈密顿量 (4.3) 中考虑非线性相互作用时, 本章 4.2 节中的解析解是不成立的。通过变分法解方程 (4.1), 我们需要考虑几个近似:

(a) 首先, 方程 (4.1) 中波函数的时间演化通过三个局部态的叠加来描述 [122-124]; 另一方面, 非线性方程组 (4.2) 中的非线性项又会破坏这种叠加。在相邻阱中的隧穿概率很小时, 这些区域的非线性相互作用是可以忽略的, 叠加态的方法对于方程 (4.1) 是适用的。

(b) 同时, 我们将波函数  $|\psi(t)\rangle$  分解为时间和空间两个部分的直积, 忽略其依赖关系, 这个已经在计算双阱中 BEC 的研究中得到了验证 [139]。

(c) 此处不考虑局域态的空间依赖性, 尽管这些状态的重叠决定了隧穿强度  $J$  和相互作用  $g_i$  [80, 140-141]。为了研究非线性系统的动力学, 我们在格点空间上应用逐次迭代法计算含时哈密顿量, 即从任意初始的归一化态  $|\psi(0)\rangle$  开始,  $t + \delta t$  时刻的波函数由  $t$  时刻的波函数演化得到, 即:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \exp(-iH[t]\delta t)|\psi(t)\rangle \quad (4.27)$$

含时哈密顿量  $H[t]$  可以通过方程 (4.3) 中的相互作用项  $|c_i(t)|^2$  来描述。因此, 我们可以将演化时间  $t$  分成足够多的小时间步长  $\delta t$ , 数值上得到精度高的时间演化解决方法。我们注意到, 这个不同于双阱中有耗散的 BEC 含时 GP 方程 [75, 138] 或者 BEC 在波导中的受阻拦传输 [135-137], 动能项的缺失使解的收敛性变得容易得多。

我们现在讨论不同非线性参数的典型数值结果, 对于非零相互作用项仅存在于

中间阱时, 即如图 4.4 (a), (b) 所示, 考虑  $g_1 = g_3 = 0$ 、 $g_2 = 3$ , 且不同的耗散  $\alpha = 1$  和  $\alpha = 3$  的情形, 这与图 4.1 (b) 和 (c) 无相互作用的情况下的结果相同, 这表明  $g_2$  并不影响在  $t \rightarrow \infty$  时  $P_i(t)$  随时间的演化。对于三个相同的相互作用参数  $g_1 = g_2 = g_3 = 3$ , 我们则观察到了完全不同的行为, 非线性项  $g_{1,3}$  明显地将暗态的投影降到了很低的水平, 而且  $P_i$  随着  $\alpha$  的增大而减小。当左右两阱相互作用项不相等即  $g_1 \neq g_3$  时, 将会完全破坏相干特性, 导致波包的完全消失。

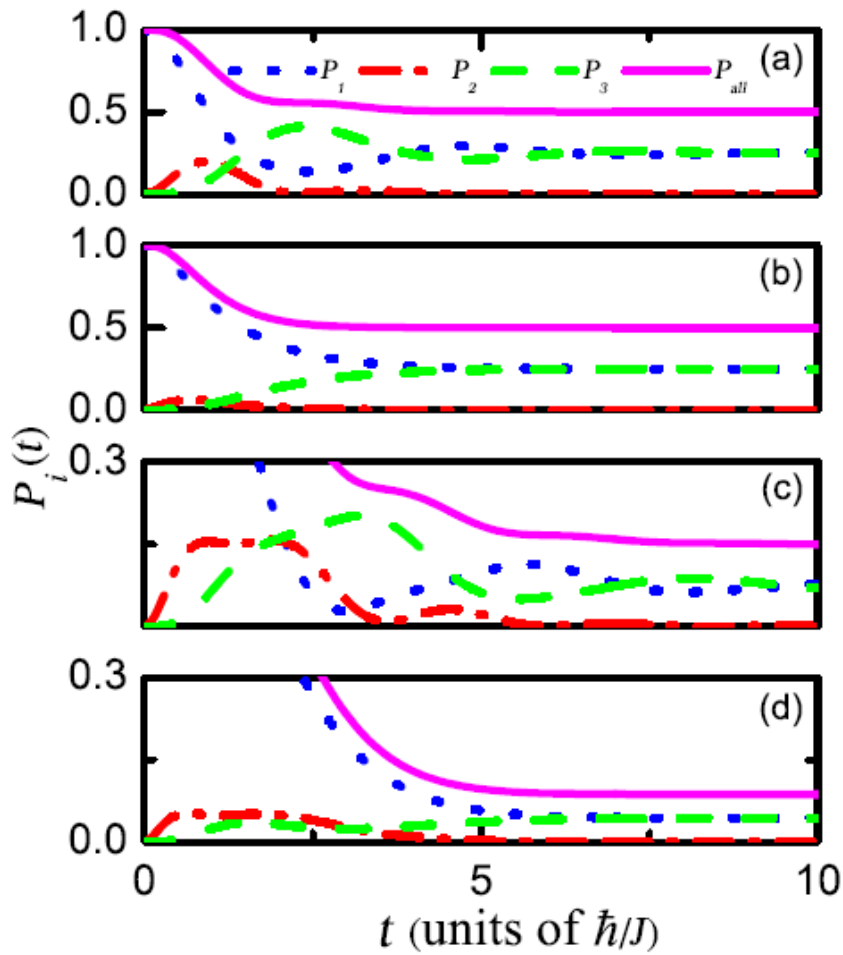


图 4.4  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ , 初态  $c_1^0 = 1$ 、 $c_2^0 = c_3^0 = 0$  时, 不同非线性参数下  $P_i(t)$  随时间变化的数值

计算结果

(a)  $g_1 = g_3 = 0$ 、 $g_2 = 3$ ,  $\alpha = 1$ ; (b)  $g_1 = g_3 = 0$ 、 $g_2 = 3$ ,  $\alpha = 3$ ;



$$(c) \ g_1 = g_2 = g_3 = 3, \ \alpha = 1; \quad (d) \ g_1 = g_2 = g_3 = 3, \ \alpha = 3;$$

#### 4.4 推广到任意奇数阱的情况

我们处理中间阱有耗散的三阱模型时，发现当  $\mu_1 = \mu_3$  且  $g_i = 0$  时有暗态。在此基础上，讨论了不同参数和不同相互作用下的时间演化。这些结果可以推广到一般的只有中间阱有耗散、并只与相邻阱有耦合的  $(2n+1)$  阱系统。为了简单起见，我们首先考虑五阱模型，其哈密顿量为：

$$H_5 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \mu_3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \mu_5 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

其中  $\mu_3 = -i\alpha$  且  $\mu_{i \neq 3} = 0$ ，且  $|3\rangle$  态和剩余的阱耦合。通过计算  $|H_5 - EI| = 0$ ，我们可以得到：

$$E^3(E^2 + i\alpha E - 4) = 0 \quad (4.29)$$

对于本征值  $E = 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_4 + c_5 &= 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

其中  $c_i$  是态  $|i\rangle$  的系数。方程 (4.30) 的解不是唯一的，对应在中问阱中有一个节点结构，其它阱的系数加起来为零的三重暗态(详情见附录)。因此，这里可用本章第 4.3 节中的数值方法来分析这个模型的动力学。但从方程 (4.30) 中，我们可以发现由于  $c_3 = 0$ ，在  $E = 0$  的本征向量投影对  $|3\rangle$  态没有贡献，因此它不依赖于任何参数，所以这个本征向量的投影不会随时间变化。为了进一步的解释它，通过应用方程

(4.27) 所述数值方法，我们可以发现当  $|\psi(0)\rangle = (1,0,0,0,0)^T$  时，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{all}(t) = 3/4$$

如图 4.5 所示为  $E = 0$  的本征向量中的投影，其远大于三阱系统。

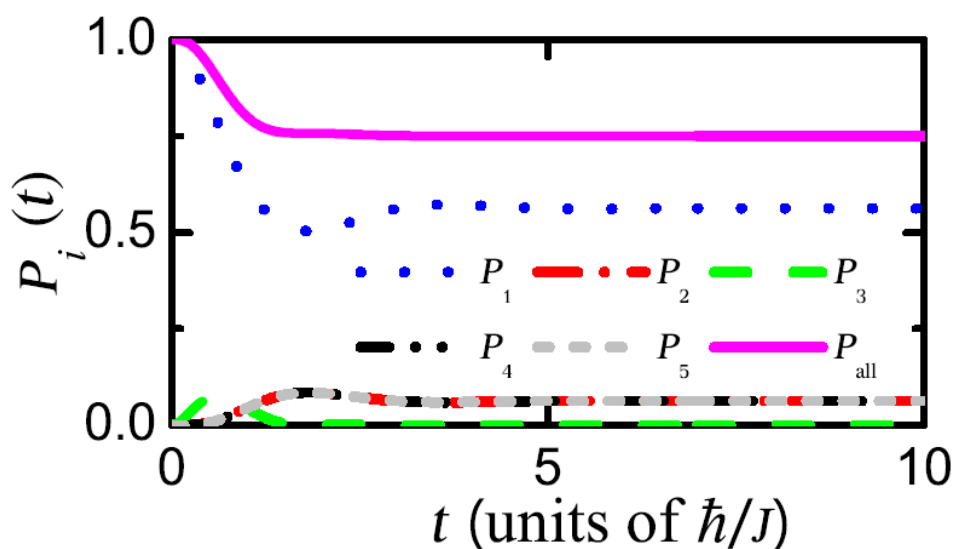


图 4.5 初态为  $|\psi(0)\rangle = (1,0,0,0,0)^T$  时五阱系统模数平方随时间的变化

其中非线性相互作用项  $g_i = 0$ ，耗散因子  $\alpha = 2$

因此，研究一个任意的  $(2n+1)$  系统时，设  $\mu_{n+1} = -i\alpha$  且  $\mu_{j \neq n+1} = 0$ ，通过相同的数值计算过程，我们可以找到一个规律：在初态为  $|\psi(0)\rangle = (1,0,0,\dots,0)^T$  时， $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{all}(t) = 1 - 1/2n$ ，与上述结果相同。这提供了一个很好的应用，可以用更多的阱来构造复杂的暗态，随时间动态演化的稳态对应投影到暗态上的几率也将更大，为减少系统耗散提供了一个很好的方案。

## 4.5 本章小结

在这一章中，我们详细的分析了三阱系统随时间的动态演化过程，当左右两阱的化学势是实数且相等时，总有一个暗态，其投影不随时间和耗散因子  $\alpha$  的变化而变化。但是存在一个临界值，两边阱的模方将从阻尼振荡过渡到过阻尼衰减至平衡态。当左右两阱的化学势不均匀时，暗态不再是系统的本征态，波函数在三个阱的系数模方将会衰减为零。此外，当左右两阱引入一致的非线性相互作用项时，暗态的投影将明显减弱，但不会消失。随着损耗因子的增加，投影也减小。然而，在中间阱的相互作用不起作用时，暗态被证明是抑制耗散的关键。此外，两种相互作用强度会促进耗散。当将研究从三阱系统推广  $(2n+1)$  阱系统时，我们发现在没有相互作用项时，趋于稳定的总模方遵循  $1-1/2n$  的规律不变，其可用来加强信号在某些介质内传播时的抗耗散能力。



## 第五章 总结和展望

### 5.1 总结

大多量子系统必须被看做是开放系统，对其研究过程中非厄米理论将起着至关重要的作用。应用非厄米理论对开放系统的持续研究，是量子力学理论探索微观系统对环境作用下系统特征变化的重要延伸。

我们首先介绍了  $PT$  对称算符，以及实验中如何采用光与原子实现反  $PT$  对称的哈密顿量，接下来以  $PT$  对称的双阱模型为例，介绍了研究非厄米系统的一些基础理论，重点研究了其双正交完备基矢。介绍了  $\Lambda$  型三能级原子在两模光场作用下，通过大失谐近似可绝热消除激发能级，从而实现两个基态能级和光场的耦合。在此基础上，我们介绍了如何利用大失谐近似计算得到一个有效的两能级哈密顿量，研究了  $\Lambda$  型三能级系统暗态的精确解方法。应用克兰克-尼克尔森法数值方法求解 GP 方程研究对称势阱中 BECs 的动力学方程的工作，为研究三阱动力学相关数值计算打下了非常好的基础。接下来，我们介绍了非厄米的两态量子系统的本征谱，区分了未破缺的  $PT$  对称区间和破缺的  $PT$  对称区间，并讨论了奇异点 (EP) 的相关特性。同时，介绍了非厄米的两态量子系统的动力学演化方程以及不同参数取值对系统动力学行为的影响，进一步的引入了布洛赫球用以研究动力学。

本论文中，我们主要研究了具有  $PT$  对称性的有效二能级系统其  $PT$  对称区间和奇异点 (EP) 和  $PT$  对称破缺区间的动力学行为。更进一步，我们用重整化态矢量研究了三种条件下的有效布洛赫动力学演化。由于动力学与固定点紧密相关，我们

计算得到了三种区间对应的固定点表达形式。发现当  $z$  方向固定点分量不为零时  $PT$  对称发生破缺，同时在  $x$ - $y$  平面上的投影完全由相位、光场强度和射频场强度决定，这将非常有助于相关实验的实施。

接着我们详细研究了三阱系统随时间的动态演化过程，当左右两阱的化学势是实数且相等时，总有一个暗态，其投影不随时间和耗散因子  $\alpha$  的变化而变化。但是存在一个临界值，两边阱的模方将从阻尼振荡过渡到过阻尼衰减至平衡态。当左右两阱的化学势不均匀时，暗态不再是系统的本征态，波函数在三个阱的系数模方将会衰减为零。此外，当左右两阱引入一致的非线性相互作用项时，暗态的投影将明显减弱，但不会消失。随着损耗因子的增加，投影也减小。然而，在中间阱的相互作用不起作用时，暗态被证明是抑制耗散的关键。此外，两种相互作用强度会促进耗散。当将研究从三阱系统推广  $(2n+1)$  阱系统时，我们发现在没有相互作用项时，趋于稳定的总模方遵循  $1-1/2n$  的规律不变，其可用来加强信号在某些介质内传播时的抗耗散能力。

综上所述，本论文重点研究了  $PT$  对称的有效两能级系统及其动力学和中间阱有耗散的三阱系统的动力学。相比标准的  $PT$  对称二能级系统，我们所研究的  $PT$  对称的有效两能级系统是可以进行高精度控制的，我们的成果对研究复杂  $PT$  对称模型的动力学行为有非常重要的意义。在对中间阱有耗散的三阱系统的动力学进行研究时，我们不仅研究了其动力学特征，更是将研究成果推广到了  $(2n+1)$  阱系统，实验上可以用来提高信号在某些介质内传播时抗耗散性能的方法，对于实验有重要的指导意义。

## 5.2 展望

鉴于非厄米系统对研究物理模型的优势，我们将更进一步研究光与原子相互作用的其它模型的物理性质的研究：

1、如光与四能级原子相互作用的模型在平衡的增益和耗散情况下的动力学研究，以及此类系统纠缠问题的研究。

2、在激光调制的超晶格中，满足不同统计特性的玻色或者费米冷原子在  $PT$  对称所呈现的物理特性。

3、研究  $PT$  对称系统在奇异点所具有的一些新奇特性，结合目前最新进展的实验，给出其合理的理论解释。





## 附录 中间阱有耗散的五阱系统的本征解

对于哈密顿量(4.28)的本征方程

$$H_5 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \mu_3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \mu_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} \quad (\text{I})$$

如前所述, 这里  $\mu_3 = -i\alpha$  且  $\mu_{i \neq 3} = 0$ 。我们可以根据久期方程得到本征值:

$$|H_5 - EI| = \begin{vmatrix} -E & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -E & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -i\alpha - E & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -E \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{II})$$

化解后可得方程(4.29)  $E^3(E^2 + i\alpha E - 4) = 0$ 。求解可得

$$E = 0, 0, 0, \frac{1}{2}(-i\alpha \pm \sqrt{16 - \alpha^2}) \quad (\text{III})$$

由(I)得到以下方程组

$$-c_3 = Ec_1 = Ec_2 = Ec_4 = Ec_5 \quad (\text{IV})$$

$$-c_1 - c_2 - i\alpha c_3 - c_4 - c_5 = Ec_3 \quad (\text{V})$$

当本征值  $E = 0$  时, 根据(IV), 可得

$$c_3 = 0$$

而同时根据(V)可得

$$-c_1 - c_2 - c_4 - c_5 = 0$$

这就是(4.30)的推导。我们可以发现四个未知数 $c_{i \neq 3}$ 仅有一个方程，故其解不唯一，

有三重简并。当本征值不为零时，即 $E_{\pm} = \frac{1}{2}(-i\alpha \pm \sqrt{16 - \alpha^2})$ ，根据(IV)可知

$$c_1 = c_2 = c_4 = c_5 \neq 0 \quad (\text{VI})$$

$$c_3 = -E_{\pm} c_1$$

将以上两个式子带入到(V)式，发现正好是(4.29)的关系式，因此我们可以得到本征值为非零解时的本征态的形式：

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ -E_{\pm} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad (\text{VII})$$

## 参考文献

- [1] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2002).
- [2] N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press (2011).
- [3] P. M. Radmore and P. L. Knight, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **15**, 561-573 (1982).
- [4] G. Gamow, *Z. Phys. A* **51**, 204 (1928).
- [5] G. Dattoli, A. Torre, and R. Mignani, *Phys. Rev. A* **42**, 1467 (1990).
- [6] J. Okolowicz, M. Płoszajczak, and I. Rotter, *Phys. Rep.* **374**, 271 (2003).
- [7] N. Moiseyev, *Phys. Rep.* **302**, 212 (1998).
- [8] M. V. Berry, *Czech. J. Phys.* **54**, 1039 (2004).
- [9] E. M. Graefe, M. Höning, and H. J. Korsch, *J. Phys. A* **43**, 075306 (2010).
- [10] V. S. Shchesnovich<sup>1</sup> and V. V. Konotop, *Phys. Rev. A* **81**, 053611 (2010).
- [11] C. M. Bender and S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
- [12] C. M. Bender, S. Boettcher, and P. N. Meisinger, *J. Math. Phys.* **40**, 2201 (1999)
- [13] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401 (2002).
- [14] R. El-Ganainy, K. G. Makris, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, *Opt. Lett.* **32**, 2632 (2007).
- [15] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, *Phys. Rev.*

Lett. **100**, 030402 (2008).

[16] S. Klaiman, U. Gunther, and N. Moiseyev, Phys. Rev. Lett. **101**, 080402 (2008).

[17] P. Peng, W. Cao, C. Shen, W. Qu, J. Wen, L. Jiang and Y. Xiao, Nature. Phys. **12**, 1139 (2016).

[18] A. L. Boite, G. Orso, and C. Ciuti, Phys. Rev. Lett. **110**, 233601 (2013).

[19] D. Dast, D. Haag, H. Cartarius, and Guter Wunner, Phys. Rev. A **90**, 052120 (2014).

[20] C. M. Bender, Rep. Prog. Phys. **70**, 947–1018 (2007).

[21] A. Mostafazadeh and A. Batal, J. Phys. A **37**, 11645 (2004).

[22] B. Zhu, R. Lu and S. Chen, Phys. Rev. A **89**, 062102 (2014).

[23] S. Diehl, A. Micheli, A. Kantian, B. Kraus, H. P. Buchler and P. Zoller, Nature. Phys. **4**, 878 (2008).

[24] I. Vidanović, D. Cocks, and W. Hofsterter, Phys. Rev. A **89**, 053614 (2014).

[25] W. D. Heiss, and H. L. Harney, Eur. Phys. J. D **17**, 149 (2001).

[26] L. Chen, R. Li, N. Yang, D. Chen, L. Li, Proc. Romanian Acad. A **13**, 46 (2012); P. Li, L. Li, and B. Malomed, Phys. Rev. E **89**, 062926, (2014); B. Liu, L. Li, and D. Mihalache, Rom. Rep. Phys. **67**, 802–818 (2015). P. Li, B. Liu, L. Li, and D. Mahalache, Rom. J. Phys. **61**, 577 (2016).

[27] W. H. Hu, L. Jin, Y. Li, and Z. Song, Phys. Rev. A **86**, 042110 (2012); S. Lin, X. Z. Zhang, and Z. Song, Phys. Rev. A **92**, 012117 (2015); S. Lin, X. Z. Zhang, C. Li, and Z. Song, Phys. Rev. A **94**, 042133 (2016).

[28] B. Zhu, R. Lu and S. Chen, Phys. Rev. A **91**, 042131(2015); Phys. Rev. A **93**, 032129

(2016).

[29] C. Yin, H. Jiang, L. Li, R. Lü, S. Chen, Phys. Rev. A **97**, 052115, <http://arxiv.org/abs/1802.04169> (2018).

[30] D. Haag, D. Dast, A. Lohle, H. Cartarius, J. Main, and G. Wunner, Phys. Rev. A **89**, 023601 (2014).

[31] C. Hang, G. Huang, and V. V. Konotop, Phys. Rev. Lett. **110**, 083604 (2013).

[32] L. Du, Z. Xu, C. Yin, and L. Guo, Chin. Phys. Lett. **35**, 050301 (2018).

[33] L. Moralesmolina, S. A. Reyes J. Phys. B Atom Mol & Opt Phys. **44**, 205403 (2012).

[34] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, et al. Phys Rev Lett, **100**, 103904 (2008).

[35] S. Longhi, Phys. Rev. B, **80**, 308-310 (2009).

[36] L. Guo, L. Du, C. Yin, Y. Zhang, and S. Chen, Phys. Rev. A **97**, 032109 (2018).

[37] D. Dast, D. Haag, H. Cartarius, J. Main and G. Wunner, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 375301 (2013).

[38] N. A. H. Cartarius and G. Wunner, Int J Theor Phys **54**, 4054 (2015).

[39] C. M. Bender, M V Berry and A. Mandilara, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, L467–L471 (2002).

[40] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev and D. Kip, Nature. Phys. **6**, 192 (2010).

[41] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou and D. N. Christodoulides, Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2009).

- [42] K. Zhao, F. M. Schaden, and Z. Wu. Phys. Rev. A **81**, 042903 (2010).
- [43] L. Feng. et. al. Science **333**, 6043. (2011).
- [44] J. Rubinstein, P. Sternberg, and Q. Ma. Phys. Rev. Lett. **99**, 167003 (2007).
- [45] J. Schindler, A. Lie, M. C. Zheng, F. M. Ellis and T. Kottos, Phys. Rev. A **84**, 040101 (2011).
- [46] S. Bittner, B. Dietz, U. Günther, H. L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter and F. Schäfer, Phys. Rev. Lett. **108**, 024101 (2012).
- [47] L. Chang, X. Jiang, S. Hua, C. Yang, J. Wen, L. Jiang, G. Li, G. Wang, and M. Xiao, Nature. Photon. **8**, 524 (2014).
- [48] L. Feng, Z. J. Wong, R-M. Ma, Y. Wang, and X. Zhang, Science **346**, 972 (2014)
- [49] H. Hodaei, M. A. Miri, M. Heinrich, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, Science **346**, 975 (2014).
- [50] H. Hodaei, M. A. Miri, A. U. Hassan, W. E. Hayenga, M. Heinrich, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, Opt. Lett. **40**, 4955 (2015).
- [51] B. Peng, S. K. Ozdemir, F. Lei, F. Monifi, M. Gianfreda, G. L. Long, S. Fan, F. Nori, C. M. Bender, and L. Yang, Nature. Phys. **10**, 394 (2014);
- [52] H. Jing, S. K. Özdemir, Z. Geng, J. Zhang, X -Y Lü, B. Peng, L. Yang and F. Nori, Scientific Reports **5**, 9663 (2015).
- [53] N. Katz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, R. McDermott, M. Neeley, M. Steffen, E. M. Weig, A. N. Cleland, J. M. Martinis, and A. N. Korotkov, Science **312**, 1498 (2006).

- [54] A. H. Myerson, D. J. Szwer, S. C. Webster, D. T. C. Allcock, M. J. Curtis, G. Imreh, J. A. Sherman, D. N. Stacey, A. M. Steane, and D. M. Lucas, Phys. Rev. Lett. **100**, 200502 (2008).
- [55] J. A. Sherman, M. J. Curtis, D. J. Szwer, D. T. C. Allcock, G. Imreh, D. M. Lucas, and A. M. Steane, Phys. Rev. Lett. **111**, 180501 (2013).
- [56] M. V. Berry and D. H. J. ÓDell, J. Phys. A **31**, 2093 (1998).
- [57] W. D. Heiss, J. Phys. A **45**, 444016 (2012).
- [58] M. Liertzer, L. Ge, A. Cerjan, A. D. Stone, H. E. Türeci, and S. Rotter, Phys. Rev. Lett. **108**, 173901 (2012).
- [59] N. Hatano and D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **77**, 570 (1996).
- [60] G. Refael, W. Hofstetter, and D. R. Nelson, Phys. Rev. B **74**, 174520 (2006).
- [61] G. L. Giorgi, Phys. Rev. B **82**, 052404 (2010).
- [62] X. Z. Zhang and Z. Song, Phys. Rev. A **87**, 012114 (2013).
- [63] J. Otterbach and M. Leshchko, Phys. Rev. Lett. **113**, 070401 (2014).
- [64] T. E. Lee and C.-K. Chan, Phys. Rev. X. **4**, 041001 (2014).
- [65] R. Livi, R. Franzosi, and G.-L. Oppo, Phys. Rev. Lett. **97**, 060401(2006)
- [66] G. S. Ng, H. Hennig, R. Fleischmann, T. Kottos, and T. Geisel, New J. Phys. **11**, 073045 (2009)
- [67] V. A. Brazhnyi, V. V. Konotop, V. M. Perez-Garcia, and H. Ott, Phys. Rev. Lett. **102**, 144101 (2009).
- [68] B. Liu, L-B Fu, S.-P. Yang, and J. Liu, Phys. Rev. A **75**, 033601 (2007)

- [69] B. K. Berntson, thesis  *$\mathcal{PT}$ -Symmetric Models in Classical and Quantum Mechanics*. the degree of Master of Science in Theoretical Physics from Imperial College London (2012).
- [70] M. S. Shahriar and P. R. Hemmer, Phys. Rev. Lett. **65**, 1865 (1990).
- [71] H. Li, V. A. Sautenkov, Y. V. Rostovtsev, G. R. Welch, P. R. Hemmer, and M. O. Scully, Phys. Rev. A **80**, 023820 (2009).
- [72] D. A. Steck, Quantum and Atom Optics, available online at <http://steck.us/teaching> (2006).
- [73] B. Luo, H. Tang and H. Guo J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42**, 235505 (2009).
- [74] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [75] E.-M. Graefe, H. J. Korsch, and A. E. Niederle, Phys. Rev. A **82**, 013629 (2010).
- [76] M. V. Berry and M. Wilkinson, Proc. R. Soc. London A **392**, 15 (1984).
- [77] E. M. Graefe, U. Gunther, H. J. Korsch, and A. E. Niederle, J. Phys. A **41**, 255206 (2008).
- [78] W. D. Heiss, Phys. Rev. E **61**, 929 (2000).
- [79] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators (Springer Verlag, Berlin, 1966).
- [80] C. Dembowski, H.-D. Graf, H. L. Harney, A. Heine, W. D. Heiss, H. Rehfeld, and A. Richter, Phys. Rev. Lett. **86**, 787 (2001).
- [81] H. Cartarius, J. Main, and G. Wunner, Phys. Rev. Lett. **99**, 173003 (2007).
- [82] J. Wiersig, S. W. Kim, and M. Hentschel, Phys. Rev. A **78**, 053809 (2008).



- 
- [83] M. Wimmer, M. -A. Miri, D. Christodoulides and U. Peschel, *Scientific Reports* **5**, 17760 (2015).
- [84] Y. Ben-Aryeh, A. Mann and I. Yaakov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 12059 (2004).
- [85] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, and B. K. Meister, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 040403 (2007).
- [86] E.-M. Graefe, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 444015 (2012).
- [87] X. Lian, H. Zhong, Q. Xie, X. Zhou, Y. Wu and W. Liao, *Eur. Phys. J. D.* **68**, 189 (2014).
- [88] M. Baradaran and H. Panahi, *Chin. Phys. B*, **26**, 060301 (2017).
- [89] E.-M. Graefe, H. J. Korsch, and A. E. Niederle, *Phys. Rev. Lett* **101**, 150408 (2008).
- [90] B. Zhu, R. Lü, and S. Chen, *Phys. Rev. A* **91** 042131 (2015); *Phys. Rev. A* **93**, 032129 (2016).
- [91] K. Bergmann, H Theuer, and B. W. Shore, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1003(1998).
- [92] M. Alexanian and S. K. Bose, *Phys. Rev. A* **52**, 2218 (1995).
- [93] X.-L. Sun, J.-W. Zhang, P.-F. Cheng, Y.-N. Zuo, and L.-J. Wang, *Chin. Phys. B* **27**, 023101(2018)
- [94] S. Novikov, T. Sweeney, J. E. Robinson, S. P. Premaratne, B. Suri, F. C. Wellstood, and B. S. Palmer, *Nature Phys.* **12**, 75 (2016).
- [95] T. J. Milburn, J. Doppler, C. A. Holmes, S. Portolan, S. Rotter, and P. Rabl, *Phys. Rev. A* **92**, 052124 (2015)
- [96] H. Menke, M. Klett, H. Cartarius, J. Main, and G. Wunner, *Phys. Rev. A* **93**, 013401

(2016).

[97] Hao Y and Gu Q, Phys. Rev. A **83**, 043620 (2011).

[98] S. Longhi, Phys. Rev. Lett. **103**, 123601 (2009).

[99] A. A. Sukhorukov, Z. Xu, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **82**, 043818 (2010).

[100] X. Luo, J. H. Huang, H. H. Zhong, X. Z. Qin, Q. T. Xie, Y. S. Kivshar, and C. H. Lee, Phys. Rev. Lett. **110**, 243902 (2013).

[101] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, Phys. Rev. Lett. **100**, 030402 (2008).

[102] H. Ramezani, D. N. Christodoulides, V. Kovanis, I. Vitebskiy, and T. Kottos, Phys. Rev. Lett. **109**, 033902 (2012).

[103] T. Gericke, C. Utfeld, N. Hommerstad, and H. Ott, Las. Phys. Lett. **3**, 415 (2006).

[104] T. Gericke, P. Würtz, D. Reitz, T. Langen, and H. Ott, Nature. Phys. **4**, 949 (2008).

[105] S. Diehl, A. Tomadin, A. Micheli, R. Fazio, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **105**, 015702 (2010).

[106] F. Verstraete, M. M. Wolf, and J. Ignacio Cirac, Nature. Phys. **5**, 633 (2009).

[107] D. Witthaut, F. Trimborn, and S. Wimberger, Phys. Rev. Lett. **101**, 200402 (2008).

[108] E. G. Dalla Torre, E. Demler, T. Giamarchi, and E. Altman, Nature. Phys. **6**, 806 (2010).

[109] J. Doppler, A. A. Mailybaev, J. Böhm, U. Kuhl, A. Girschik, F. Libisch, T. J. Milburn, P. Rabl, N. Moiseyev and S. Rotter, Nature **537**, 76 (2016).

[110] W. D. Heiss and G. Wunner, Eur. Phys. J. D **71**, 312 (2017).

- [111] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, and M. Greiner, *Nature (London)* **462**, 74 (2009).
- [112] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr, *Nature (London)* **467**, 68 (2010).
- [113] T. E. Lee, F. Reiter, and N. Moiseyev, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 250401 (2014).
- [114] H. Cao and J. Wiersig, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 61 (2015).
- [115] R. Gati, M. K. Oberthaler, *J. Phys. B* **40**, R61 (2007).
- [116] F.S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, M. Inguscio, *Science* **293**, 843 (2001).
- [117] T. Anker, M. Albiez, R. Gati, S. Hunsmann, B. Eiermann, A. Trombettoni, M.K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020403 (2005).
- [118] M. Albiez, R. Gati, J. Foelling, S. Hunsmann, M. Cristiani, M.K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010402 (2005).
- [119] T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross, M. K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204101 (2010).
- [120] S. Levy, E. Lahoud, I. Shomroni, J. Steinhauer, *Nature* **449**, 579 (2007).
- [121] L. J. LeBlanc, A.B. Bardon, J. McKeever, M.H.T. Extavour, D. Jervis, J.H. Thywissen, F. Piazza, A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 025302 (2011).
- [122] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4950 (1997).
- [123] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **55**, 4318

(1997).

[124] S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, and S. R. Shenoy, *Phys. Rev. A* **59**, 620 (1999).

[125] Y. Du, Z. Liang, W. Huang, H. Yan, and S. Zhu, *Phys. Rev. A* **90**, 023821 (2014).

[126] M. Semczuk, W. Gunton, W. Bowden, and K. W. Madison, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 055302 (2014).

[127] B. Liu, L. Fu, S. Yang and J. Liu, *Phys. Rev. A* **75**, 033601 (2007).

[128] K. Nemoto, C. A. Holmes, G. J. Milburn, and W. J. Munro, *Phys. Rev. A* **63**, 013604 (2000).

[129] X. Luo, L. Li, L. You and B. Wu, *New J. Phys.* **16**, 013007 (2014).

[130] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[131] R. Franzosi and V. Penna, *Phys. Rev. A* **65**, 013601 (2001).

[132] R. Franzosi and V. Penna, *Phys. Rev. E* **67**, 046227 (2003).

[133] H. Ramezani and T. Kottos, *Phys. Rev. A* **82**, 043803 (2010).

[134] N. Moiseyev and L. S. Cederbaum, *Phys. Rev. A* **72**, 033605 (2005).

[135] P. Schlagheck and T. Paul, *Phys. Rev. A* **73**, 023619 (2006).

[136] K. Rapedius and H. J. Korsch, *Phys. Rev. A* **77**, 063610 (2008).

[137] K. Rapedius and H. J. Korsch, *J. Phys. B* **42**, 044005 (2009).

[138] H. Zheng, Y. Hao and Q. Gu, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**, 065301 (2013).

[139] S. Giovanazzi, Ph.D. thesis, SISSA-ISAS, 1998 (unpublished).

[140] X. Zhang, J. Chai, J. Huang, Z. Chen, Y. Li, and B. A. Malomed, *Opt. Exp.* **22**,

13927-13939 (2014).

[141] Z. Chen, J. Huang, J. Chai, X. Zhang, Y. Li, and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **91**, 053821 (2015)



## 攻读学位期间取得的研究成果

发表论文:

- 1、 **Lei Du**, Zhihao Xu, Chuanhao Yin, and Liping Guo, Dynamical evolution of an effective two-level system with  $PT$  symmetry, *Chin. Phys. Lett.*, **35**(5), 050301 (2018)
- 2、 Liping Guo, **Lei Du**, Chuanhao Yin, Yunbo Zhang, and Shu Chen, Dynamical evolutions in non-Hermitian triple-well system with complex potential, *Phys. Rev. A* **97**, 032109 (2018)
- 3、 L.P. Guo, **L. Du**, and Y. Zhang, Probing spin exchange interaction in two-species bosons in optical lattices by cavity-enhanced light scattering, *EUR PHYS J D*, **55**, 531–537 (2009)
- 4、 Sisi Feng, Miaoli Zhu, Liping Lu, **Lei Du**, Yunbo Zhang, Tianwei Wang, Rationally designed chiral Ni<sub>5</sub>L<sub>6</sub> clusters with the in situ generated tridentate ligand. Hydrothermal synthesis, crystal structures, morphology and magnetic properties, *Dalton Trans.*, 2009, 6385–6395
- 5、 **杜磊**, 应用克兰克-尼克尔森法求解对称势阱中的 BECs 波函数, *山西大学学报自然科学版*, 33(4): 547~550, 2010
- 6、 **杜磊**, 曹石, 孟东原, TE<sub>10</sub> 波在矩形波导管中传播的计算机模拟, *山西大学学报自然科学版*, 30(4): 473~475, 2007

- 7、 **杜磊**, 刘武洲, 郭利平, TE10 波在矩形波导管中传播的计算机测量及动态反馈模拟, 中国测试, 33(5):94-97, 2007
- 8、 **杜磊**, 反射式速调管工作特性的计算机动态模拟及测量, 中国测试, 中国测试, 33(4):91-94, 2007

获得专利:

- 9、 发明专利: 一种用于物流配送领域的路径优化方法, ZL201510066971.0, 中华人民共和国国家知识产权局, 2017.12.5, 山西大学, **排名: 1**
- 10、 发明专利: 一种鼠类运动能力检测方法与系统, ZL200710139429.9, 中华人民共和国国家知识产权局, 2009.5.6, 山西大学, **排名: 1**



## 致 谢

博士的求学生涯即将告一段落，由于个人原因博士的求学过程相对比较艰难，拖了很长时间。上博士期间，山西大学理论物理研究所浓厚的科研氛围和良好的工作环境，导师们兢兢业业、献身科学的精神在我心中留下了深刻的印象。博士期间的寒窗苦读充满了探索的艰辛，同时也在不断的取得成果和收获喜悦，对我的人生成长是一个难得的历练。

值此论文完成之际，首先要感谢我的导师张云波教授，在他的指导和辛勤培养下，才使我有机会接触到了冷原子物理这个神奇的领域，相关知识的学习、科研技能的训练，不仅使我大开眼界，更是让我终身受益。在研究生和博士期间，张老师对我的工作和生活都给予了极大的关心和帮助，他对科学研究孜孜不倦的探索精神、敏锐的洞察力、严谨的治学态度更是我终生学习的榜样。

感谢梁九卿教授、李卫东教授、聂一行教授、刘福虎教授、李禄教授、李志坚教授、张素英教授，在理论所我学到了很多知识；感谢郜江瑞院长、马杰院长、周富国书记、裴建文书记、刘文全书记等物电学院的领导对我工作、学习和生活等方面给予的关怀和帮助。

感谢父母对我无私的付出和关爱，很荣幸能一直陪伴在你们的身边，感谢我的爱人郭利平一直以来对我的支持和帮助，感谢徐志浩、王利、李军奇、张临杰、张一、杨荣国、王建明、王晓波、张文学、杨光晔、王海生、等同事和好友的鼓励，感谢郝亚江、张永平、尹传昊、陈星、陈宝明、周海涛、杨保东、李保春、贾新娟、

尹相国、杨利民、张杰、王红梅、张彦伟、梁成功、蔚晓红、吕晓龙、陈立、刘艳霞、毛丽君等学友的无私帮助和友好合作，与大家不断讨论和交流，让我在相关领域的研究中不断成长。

感谢我挚爱的亲人们，谢谢你们多年来的关怀、理解和无尽的爱。

感谓我生活了二十年的母校，我永远的精神家园！

杜磊

2018年6月于山西大学理论物理研究所

## 个人简况及联系方式

### 个人简况:

杜磊, 男, 山西娄烦人, 中国共产党党员

- 1998.9——2002.6, 山西大学物理电子工程学院, 物理教育 本科
- 2006.9——2008.6, 山西大学物理电子工程学院, 凝聚态物理 硕士
- 2008.9——现在, 山西大学物理电子工程学院, 凝聚态物理 博士
- 2002.7——现在, 山西大学物理电子工程学院, 教师

### 联系方式:

- 电话: 13191065101
- 电子信箱: dulei@sxu.edu.cn

## 承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 月 日

## 学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日