



2020 届硕士学位论文

# 一维 $p$ 波超导体中的量子相变

|      |                        |
|------|------------------------|
| 作者姓名 | 武璟楠                    |
| 指导教师 | 徐志浩 副教授                |
| 学科专业 | 凝聚态物理                  |
| 研究方向 | 冷原子物理                  |
| 培养单位 | 理论物理研究所                |
| 学习年限 | 2017 年 9 月至 2020 年 6 月 |

二〇二〇年六月

山西大学

2020 届硕士学位论文

# 一维p波超导体中的量子相变

|      |                        |
|------|------------------------|
| 作者姓名 | 武璟楠                    |
| 指导教师 | 徐志浩 副教授                |
| 学科专业 | 凝聚态物理                  |
| 研究方向 | 冷原子物理                  |
| 培养单位 | 理论物理研究所                |
| 学习年限 | 2017 年 9 月至 2020 年 6 月 |

二〇二〇年六月

**Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2020**

Quantum phase transitions in one-dimensional p-wave  
superconductors

|                   |                                  |
|-------------------|----------------------------------|
| Student Name      | Jing-nan Wu                      |
| Supervisor        | Associate Prof. Zhi-hao Xu       |
| Major             | Condensed Matter Physics         |
| Specialty         | Cold Atom Physics                |
| Department        | Institute of Theoretical Physics |
| Research Duration | 2017.09-2020.06                  |

June, 2020

## 目 录

|   |     |
|---|-----|
| 中文摘要.....                                 | I   |
| ABSTRACT.....                             | III |
| 第一章 绪论.....                               | 1   |
| 1.1 拓扑绝缘体.....                            | 1   |
| 1.1.1 拓扑绝缘体简介.....                        | 1   |
| 1.1.2 一维 Su-Schrieffer-Heeger(SSH)模型..... | 1   |
| 1.2 拓扑超导体.....                            | 4   |
| 1.2.1 拓扑超导体简介.....                        | 4   |
| 1.2.2 Majorana 费米子.....                   | 5   |
| 1.2.3 一维 Kitaev 模型.....                   | 6   |
| 1.2.4 Bogoliubov-de Gennes(BdG)方法.....    | 7   |
| 1.3 本文安排.....                             | 11  |
| 第二章 一维准周期调制模型.....                        | 13  |
| 2.1 Aubry-André 模型.....                   | 13  |
| 2.2 具有迁移率边的类 Aubry-André 模型.....          | 15  |
| 2.2.1 长程跃迁模型.....                         | 15  |
| 2.2.2 特殊非公度势模型.....                       | 17  |
| 2.3 一维 p 波超导体中的广义 Aubry-André 模型.....     | 19  |
| 2.3.1 一维 p 波超导体中的 Aubry-André 模型.....     | 19  |
| 2.3.2 一维 p 波超导中的长程跃迁模型.....               | 22  |
| 2.3.3 一维 p 波超导中的缓变势模型.....                | 24  |
| 2.4 小结.....                               | 27  |
| 第三章 一维化学势调制的 p 波超导体中的拓扑量子相变.....          | 29  |
| 3.1 简介.....                               | 29  |
| 3.2 理论模型与方法.....                          | 30  |
| 3.3 结果分析与讨论.....                          | 31  |
| 3.3.1 周期调制的 p 波超导线.....                   | 31  |

---

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 3.3.2 准周期调制的 p 波超导导线.....  | 36 |
| 3.4 小结.....                | 41 |
| 第四章 总结与展望.....             | 43 |
| 4.1 总结.....                | 43 |
| 4.2 展望.....                | 43 |
| 参考文献.....                  | 45 |
| 攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目..... | 55 |
| 致 谢.....                   | 57 |
| 个人简况及联系方式.....             | 59 |
| 承 诺 书.....                 | 61 |
| 学位论文使用授权声明.....            | 63 |

---

# Contents

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chinese Abstract</b> .....   | I   |
| <b>ABSTRACT</b> .....   | III |
| <b>Chapter 1 Introduction</b> .....   | 1   |
| 1.1 Topological insulators .....  | 1   |
| 1.1.1 Introduction to topological insulators.....   | 1   |
| 1.1.2 One-dimensional Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model .....  | 1   |
| 1.2 Topological superconductor .....  | 4   |
| 1.2.1 Introduction to topological superconductors .....   | 4   |
| 1.2.2 Majorana fermion .....  | 5   |
| 1.2.3 One-dimensional Kitaev model.....   | 6   |
| 1.2.4 Bogoliubov-de Gennes(BdG) method.....   | 7   |
| 1.3 Arranging of this article .....   | 11  |
| <b>Chapter 2 One-dimensional quasi-periodic modulated model</b> .....   | 13  |
| 2.1 Aubry-André model .....   | 13  |
| 2.2 Generalized Aubry-André model with mobility edges .....   | 15  |
| 2.2.1 Long-range hopping model .....  | 15  |
| 2.2.2 Specific incommensurate potential model.....  | 17  |
| 2.3 Generalized Aubry-André model in one-dimensional p-wave superconductors .....   | 19  |
| 2.3.1 Aubry-André model in one-dimensional p-wave superconductors .....   | 19  |
| 2.3.2 Long-range hopping model in one-dimensional p-wave superconductors.....   | 22  |
| 2.3.3 Slow-varying potential model in one-dimensional p-wave superconductors.....   | 24  |
| 2.4 Summary .....   | 27  |
| <b>Chapter 3 Topological quantum phase transitions in one-dimensional p-wave superconductors with modulated chemical potentials</b> ..... | 29  |
| 3.1 Introduction.....   | 29  |
| 3.2 Theoretical model and method.....   | 30  |
| 3.3 Results analysis and discussion .....   | 31  |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.3.1 Periodically modulated p-wave superconducting wire.....        | 31        |
| 3.3.2 Quasi-periodically modulated p-wave superconducting wire ..... | 36        |
| 3.4 Summary .....  | 41        |
| <b>Chapter 4 Summary and Outlook.....</b>                            | <b>43</b> |
| 4.1 Summary .....  | 43        |
| 4.2 Outlook .....  | 43        |
| <b>References .....</b>  | <b>45</b> |
| <b>Research Achievements.....</b>                                    | <b>55</b> |
| <b>Acknowledgment .....</b>  | <b>57</b> |
| <b>Personal Profiles .....</b>                                       | <b>59</b> |
| <b>Letter of Commitment .....</b>                                    | <b>61</b> |
| <b>Authorization Statement.....</b>                                  | <b>63</b> |

## 中文摘要

Majorana 费米子的反粒子是其自身，它满足 Non-Abelian(非阿贝尔)统计，是容错拓扑量子计算的有效候选之一。自 Majorana 费米子被提出以来，对它的寻找从未停止。最近人们发现在拓扑超导体中元激发的零能准粒子与 Majorana 费米子有相同的特性，为研究 Majorana 费米子提供理论基础。我们主要研究的是一维 p 波超导量子线中局域在两端的 Majorana 零模。

本论文首先介绍了拓扑绝缘体和拓扑超导体的相关概念，讨论了安德森局域化现象以及一维 Aubry-André(AA)模型的相关性质，根据自对偶性质求出该模型的扩展-局域的转变点，该模型不存在迁移率边。紧接着我们介绍了几种具有迁移率边的类 AA 模型，它们具有精确的迁移率边的解析表达式。在加入 p 波超导后，这些模型表现出丰富的拓扑量子相，并且存在复杂的迁移率边。本论文主要研究了一维具有特殊化学势调制的 p 波超导量子线中的量子相变。它可以用 Bogoliubov-de Gennes 方法求解。当系统参数  $b \neq 0$ ，调制频率  $\alpha$  为有理数时，系统经历从拓扑非平庸相到拓扑平庸相的转变，伴随着 Majorana 零模的消失和  $Z_2$  拓扑不变量的改变。我们发现相变强烈地依赖化学势强度  $V$  和相移  $\delta$ 。对于某些特定的  $\alpha$  和  $\delta$ ，相变的临界强度  $V$  是无穷大。对于非公度的情况( $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ )，我们可以通过分析低能谱，最低激发态的波函数， $Z_2$  拓扑不变量和表征波函数局域的逆参与率(IPR)来确定系统的相图。以  $\delta = 0$  为例，体系出现了三个相，拓扑非平庸超导相，拓扑平庸超导相，拓扑平庸安德森绝缘相。对于拓扑非平庸的超导相，它具有由  $Z_2$  拓扑不变量表征的 Majorana 零模。通过计算 IPR，我们发现拓扑平庸超导相和拓扑平庸安德森绝缘相的最低激发态表现出不同的标度特征：对于拓扑平庸超导相，最低激发态的 IPR 随尺寸的增加而趋于零，而对于平庸 Anderson 局域相，它保持有限值。

关键词： p 超导体； Majorana 费米子；  $Z_2$  拓扑不变量



**ABSTRACT**

The most remarkable feature of the Majorana fermion is that its antiparticle is itself and due to the non-Abelian statistics of the Majorana fermion, it becomes the one of the powerful candidates of the fault-tolerant topological quantum computing. One has never stopped looking for the Majorana fermion since it was born. Recently, one finds that the zero-energy quasiparticle excitations in the topological superconductor have the similar properties as the Majorana fermion, which provides the theoretical basis for the study of the Majorana fermion. We mainly study the Majorana zero modes in the one-dimensional p-wave superconducting quantum wire with the modulated chemical potentials.

We first introduce the related concepts of the topological insulators and the topological superconductors and discuss the phenomenon of the Anderson localization and the properties of the one-dimensional Aubry-André (AA) model. Due to the self-duality property, the well-known AA model presents a metal to insulator transition without mobility edges. Some generalized AA models which have the mobility edges in compactly analytic forms are found. By adding the p-wave superconductivity, those models show rich topological quantum phases and complex mobility edges. In this thesis, we consider a one-dimensional p-wave superconducting quantum wire with the specific modulated chemical potentials which can be solved by the Bogoliubov-de Gennes method. When the parameter  $b \neq 0$  and  $\alpha$  is a rational number, the system undergoes a transition from topologically nontrivial phase to topologically trivial phase which is accompanied by the disappearance of the Majorana fermions and the changing of the  $Z_2$  topological invariant of the bulk system. We find the phase transition strongly depends on the strength of potential  $V$  and the phase shift  $\delta$ . For some certain special parameters

$\alpha$  and  $\delta$ , the critical strength  $v$  of the phase transition is infinity. For the incommensurate case, i.e.  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ , the phase diagram is identified by analyzing the low-energy spectrum, the amplitudes of the lowest excitation states, the  $Z_2$  topological invariant and the inverse participation ratio (IPR) which characterizes the localization of the wave functions. Three phases emerge in such case for  $\delta = 0$ , topologically nontrivial superconductor, topologically trivial superconductor and topologically trivial Anderson insulator. For a topologically nontrivial superconductor, it displays zero-energy Majorana fermions with a  $Z_2$  topological invariant. By calculating the IPR, we find the lowest excitation states of the topologically trivial superconductor and topologically trivial Anderson insulator show different scaling features. For a topologically trivial superconductor, the IPR of the lowest excitation state tends to zero with the increase of the size, while it keeps a finite value for different sizes in the trivial Anderson localization phase.

**Keywords:** p-wave superconductor; Majorana fermions;  $Z_2$  topological invariant

## 第一章 绪论

### 1.1 拓扑绝缘体

#### 1.1.1 拓扑绝缘体简介

1980年, Klitzing 等人发现了量子霍尔效应, 这是具有划时代意义的发现<sup>[1]</sup>。在量子霍尔效应中, 强磁场将电子的运动限制在整个材料中, 但是在其表面存在导电边缘态。近年来有研究表明, 绝缘体的能带中存在拓扑非平庸相时, 该系统会有稳定的导电边缘态, 且此时不需要外部磁场的存在。Moore 和 Balents 用拓扑绝缘体一词来描述此类系统, 是固体物理学中研究的热点之一<sup>[2-4]</sup>。

拓扑绝缘体是一种新的量子态。它和普通绝缘体一样, 它们的能带结构中都有能隙的存在。但是拓扑绝缘体的边缘态受自旋轨道耦合和时间反演对称性的保护, 使得有些电子能够穿过能隙, 即在边缘上具有导电性。科学家们已经对拓扑绝缘体进行了深入的研究。一般情况下, 拓扑绝缘体分为一维拓扑绝缘体(量子线)<sup>[5]</sup>, 二维拓扑绝缘体和三维拓扑绝缘体。2005年, Kane 等人在理论上预言量子自旋霍尔态在石墨烯体系中存在<sup>[6]</sup>。随后, Bernevig 等人预言量子自旋霍尔态在 HgTe/CdTe 量子阱中存在, 而且还发现了在 HgTe/CdTe 量子阱中有平庸绝缘体向二维拓扑绝缘体的转变<sup>[7]</sup>。2007年, Molenkamp 小组通过实验证实了二维拓扑绝缘体在 HgTe/CdTe 量子阱中存在, 观察到量子自旋霍尔效应所特有的导电边缘态<sup>[8]</sup>。同时, 祁晓亮等人首次提出了能带反转实现拓扑量子态的理论模型<sup>[9]</sup>。2011年杜瑞瑞等人在 InAs/GaSb 半导体量子阱中也实现了二维拓扑绝缘体<sup>[10]</sup>。2006年, 科学家们发现量子自旋霍尔态的拓扑性可以推广到三维系统<sup>[11-13]</sup>。三维拓扑绝缘体的表面有自旋极化的二维狄拉克费米子, 形成狄拉克锥结构。理论上预测在 Bi<sub>1-x</sub>Sb 合金内存在三维拓扑绝缘体<sup>[14]</sup>, 并且用角分辨光发射光谱(ARPES)测量观察到了拓扑非平庸态<sup>[15]</sup>。紧接着, 人们预测在 Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub>, Sb<sub>2</sub>Te 和 Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub><sup>[16-17]</sup>等化合物中有三维拓扑绝缘体并得到实验验证<sup>[18]</sup>。关于拓扑绝缘体的研究激起了人们广泛的兴趣, 相当多的理论和实验工作对此进行了研究<sup>[19-25]</sup>。这些工作证明了拓扑绝缘体在自然界中普遍存在。

#### 1.1.2 一维 Su-Schrieffer-Heeger(SSH)模型

一维 Su-Schrieffer-Heeger(SSH)模型是 Su 等人在研究一维聚乙炔时提出的一维紧束缚二聚化模型<sup>[26-28]</sup>, 它被认为是最简单的拓扑绝缘体模型。2018年, Rizzo 小组

和 Gröning 小组都通过实验得到了一维拓扑绝缘体，即石墨烯纳米线，使理论预测成为了现实<sup>[29-30]</sup>。SSH 模型描述了无自旋的费米子在一维链中的跃迁运动，如图 1.1 所示。该链由  $L$  个原胞构成，每个原胞中包含两个格点，一个在子格点 A (红色圆圈)，另一个在子格点 B (黄色圆圈)。

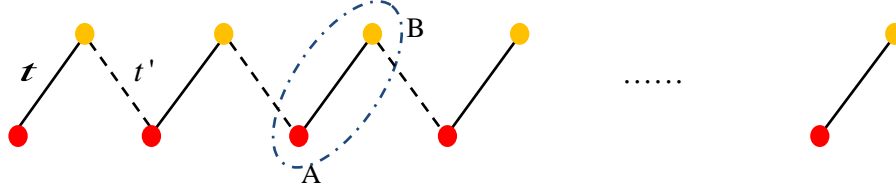


图 1.1 SSH 模型。

一维 SSH 模型的哈密顿量为：

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^L \left( t \hat{a}_n^\dagger \hat{b}_n + t' \hat{a}_{n+1}^\dagger \hat{b}_n + H.c. \right) \quad (1.1)$$

其中， $t$  表示原胞内最近邻格点间的跃迁强度， $t'$  表示原胞间最近邻格点间的跃迁强度。 $\hat{a}_n^\dagger$ ， $\hat{b}_n^\dagger$ ， $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$  分别表示在 A 格点和 B 格点电子的产生(湮灭)算符。为了更好的研究该模型的拓扑性质，我们可以将哈密顿量(1.1)变换到动量空间。将傅里叶变换：

$$\hat{a}_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikn} \hat{a}_k \quad (1.2)$$

$$\hat{b}_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikn} \hat{b}_k \quad (1.3)$$

带入哈密顿量(1.1)得到：

$$\hat{H} = \sum_k \Psi_k^\dagger h_k \Psi_k \quad (1.4)$$

其中：

$$\Psi_k = \left( \hat{a}_k, \hat{b}_k \right)^T \quad (1.5)$$

$$h_k = \begin{pmatrix} 0 & t + t' e^{-ik} \\ t + t' e^{ik} & 0 \end{pmatrix} = h_x \sigma_x + h_y \sigma_y \quad (1.6)$$

其中， $h_x = t + t' \cos k$ ， $h_y = t' \sin k$ 。 $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  是泡利矩阵。 $h_k$  满足手性对称性，

$\sigma_z h_k \sigma_z = -h_k$ 。求解其薛定谔方程可以得到在动量空间的本征值:

$$E_k = \pm \sqrt{h_x^2 + h_y^2} = \pm \sqrt{t^2 + t'^2 + 2tt' \cos k} \quad (1.7)$$

及其相应的本征态:

$$|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{h_x - ih_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}, -1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

如图 1.2 所示, 我们展示了动量空间的能谱图。当跃迁强度  $t \neq t'$  时, 能谱中有能隙存在, 其大小为  $2|t-t'|$ 。当  $t = t'$  时, 能隙在布里渊区的边界处关闭, 即  $k = \pm\pi$ 。

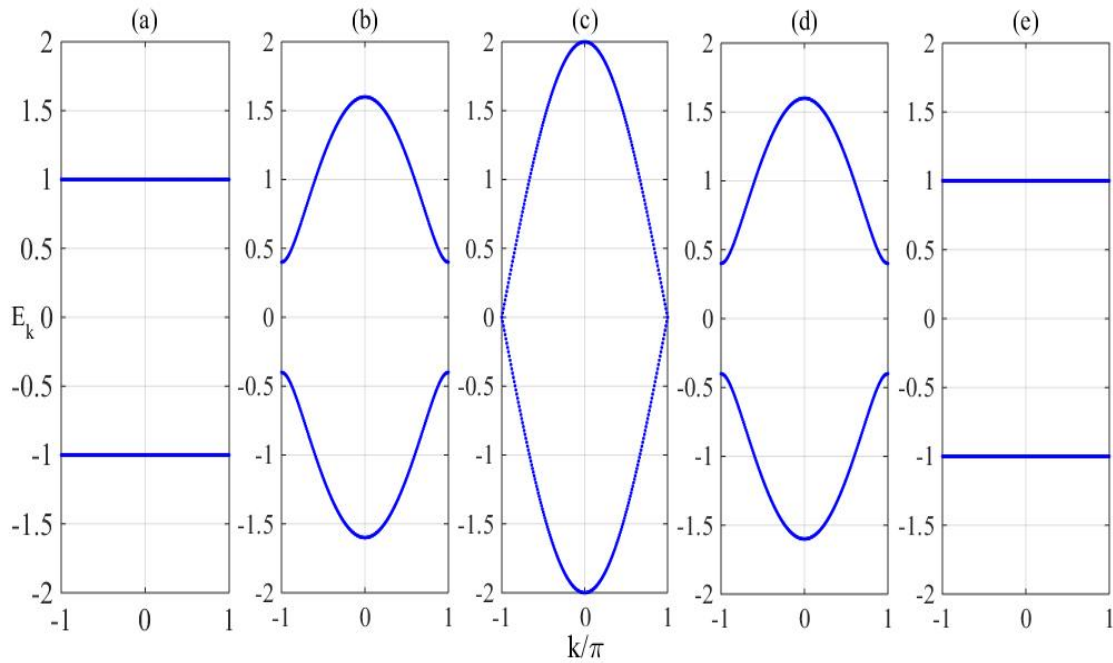


图 1.2 不同参数条件下, 动量空间的能谱<sup>[26]</sup>

(a)  $t=1, t'=0$ ; (b)  $t=1, t'=0.6$ ; (c)  $t=t'=1$ ; (d)  $t=0.6, t'=1$ ; (e)  $t=0, t'=1$ 。

此时, SSH 模型处于金属相。图 1.2(a)-(e)中最大的变化是能隙关闭随后又打开。在此过程中系统在  $t = t'$  经历一个量子相变。但是从能谱中不能看出相变前后的拓扑性质。在  $t > t'$  和  $t < t'$  两个区间中的拓扑性质可以由 Zak (Berry) 相位得到的拓扑不变量 (绕数) 来表示。Zak 相位的定义为<sup>[31]</sup>:

$$\gamma = \int_0^{2\pi} dk \frac{\langle \psi_k | i\partial_k | \psi_k \rangle}{\langle \psi_k | \psi_k \rangle} \quad (1.9)$$

将本征波函数(1.8)式带入(1.9)式可以得到:

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dk \frac{h_x \partial_k h_y - h_y \partial_k h_x}{h_x^2 + h_y^2} = \nu \pi \quad (1.10)$$

其中  $\nu$  是绕数，其表达式为：

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dk \frac{h_x \partial_k h_y - h_y \partial_k h_x}{h_x^2 + h_y^2} \quad (1.11)$$

根据绕数的定义(1.11)式，当  $h_x^2 + h_y^2 = 0$  时，绕数  $\nu$  的定义无效。由本征能量(1.7)可知，能隙关闭的点为  $h_x = h_y = 0$ ，此时绕数的定义无效。为了获得更加直观的理解，在图 1.3 中，我们显示了与图 1.2 中能谱相对应的绕数情况。 $\nu = 0$  表示拓扑平庸相， $\nu = 1$  表示拓扑非平庸相。故  $t > t'$  的区间内对应于拓扑平庸相， $t < t'$  的区间内对应于拓扑非平庸相<sup>[32]</sup>。

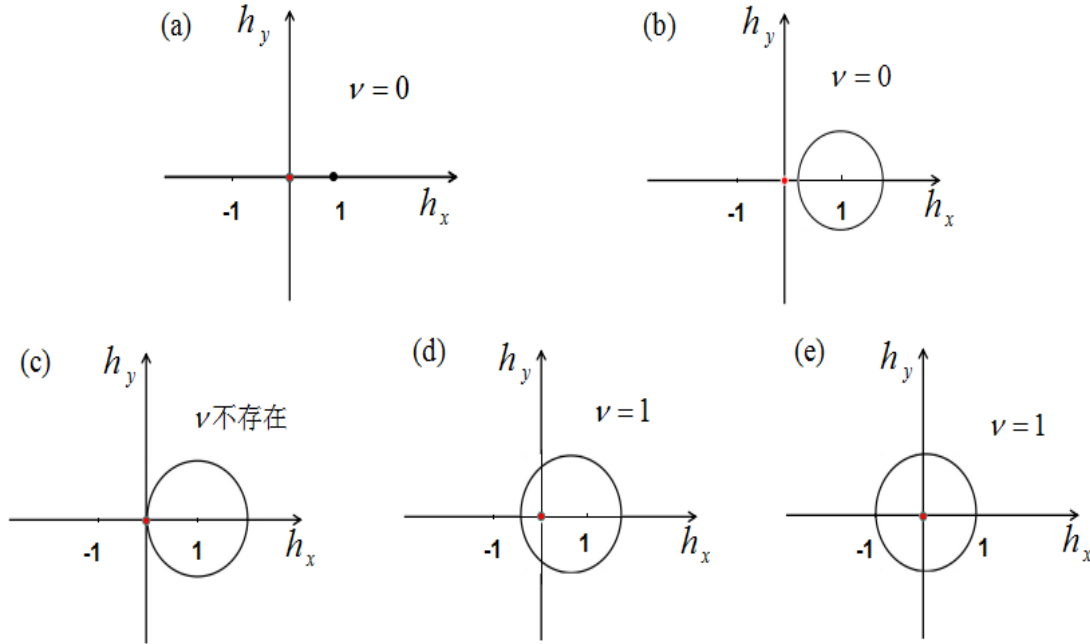


图 1.3 不同参数条件下的绕数  $(h_x - t)^2 + h_y^2 = t'^2$  <sup>[26]</sup>

(a)  $t = 1, t' = 0$ ; (b)  $t = 1, t' = 0.6$ ; (c)  $t = t' = 1$ ; (d)  $t = 0.6, t' = 1$ ; (e)  $t = 0, t' = 1$ 。

## 1.2 拓扑超导体

### 1.2.1 拓扑超导体简介

拓扑超导体<sup>[33-38]</sup>与拓扑绝缘体类似，能谱中存在能隙，并且在能隙中会出现边缘态。由于超导体中 U(1) 规范对称性的破缺，其 Bogoliubov 准粒子<sup>[39]</sup>可以由电子-

空穴线性叠加构成。拓扑超导体表面激发的是没有能量的电子或空穴。我们认为，零能 Bogoliubov 准粒子的电子部分和空穴部分相等，具有 Majorana 费米子的性质。对于一维拓扑超导体来说，它的拓扑性表现为在一维链的两端存在局域的 Majorana 零模。由于 Majorana 费米子满足非阿贝尔统计性质，它是容错拓扑量子计算的有利候选之一，为构造容错量子计算机提供了理论基础。近年来有关拓扑超导体以及 Majorana 零模的研究引起了人们的巨大关注。

### 1.2.2 Majorana 费米子

二十世纪三十年代，Majorana 求解了 Dirac 相对论协变的电子运动方程，提出了与电子和正电子不同的粒子——Majorana 费米子，它的反粒子是其自身<sup>[40]</sup>。经过几十年的发展，这一理论的巨大意义被充分认识，尽管 Majorana 费米子是一个“古老”的概念，但它仍然是现代物理学中研究的热点问题。在粒子物理学中，中微子被认为可能是 Majorana 费米子，至今仍然有很多实验在试图证明中微子是 Majorana 费米子<sup>[41]</sup>。在暗物质中具有弱相互作用且有质量的粒子也很有可能是 Majorana 费米子。这些预测很有可能在大型强子对撞机上进行的实验中得到批判性的检验。凝聚态物理学家们也为在各种各样的固体系统中追寻 Majorana 费米子的身影而不懈努力。与高能物理学家追求的 Majorana 费米子不同，在固体系统中的基本组分不是基本粒子，而是电子和离子。因此在固体系统中找到 Majorana 费米子十分困难。但是，在超导系统中，电子 U(1) 规范对称性的破缺提供了产生 Majorana 费米子的可能性。超导体系中的电子-空穴叠加后的零能 Bogoliubov 准粒子与 Majorana 费米子的性质类似。一般情况下，我们可以通过破坏 s 波超导体的宇称或时间反演对称性来解除其自旋简并，等效地得到无自旋的费米子，使得准粒子的反粒子是其自身。由于费米子的统计规律，无自旋费米子满足奇宇称配对，即它们必须以非平庸的形式配对。在拓扑超导体中，Majorana 费米子以零能激发态 (Majorana 零模) 的形式出现。

为了表示 Majorana 费米子，我们可以将一个电子的产生 (湮灭) 算符写为复数形式：

$$\hat{c}_j^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{j,1} - i\hat{\gamma}_{j,2}), \hat{c}_j = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{j,1} + i\hat{\gamma}_{j,2}) \quad (1.12)$$

其中  $\hat{\gamma}_{j,1}$  和  $\hat{\gamma}_{j,2}$  分别表示局域在空间同一个点上的两个 Majorana 费米子。由此，Majorana 费米子算符  $\hat{\gamma}$  可以用电子的产生 (湮灭) 算符表示为：

$$\hat{\gamma}_{j,1} = c_j^\dagger + c_j, \hat{\gamma}_{j,2} = (c_j - c_j^\dagger)/i \quad (1.13)$$

$\hat{\gamma}$  算符满足它的反粒子是其自身的特性, 即:  $\hat{\gamma}_{j,1} = \hat{\gamma}_{j,1}^\dagger, \hat{\gamma}_{j,2} = \hat{\gamma}_{j,2}^\dagger$ 。Majorana 费米子的产生(湮灭)算符满足反对易关系:

$$\{\hat{\gamma}_{i,\alpha}, \hat{\gamma}_{j,\beta}\} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \quad (1.14)$$

那么, 费米子的粒子数  $\hat{n}_j$  可以用 Majorana 费米子算符  $\hat{\gamma}$  表示为:

$$\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j = \frac{1}{2}(1 + i\hat{\gamma}_{j,1}\hat{\gamma}_{j,2}) \quad (1.15)$$

根据泡利不相容原理,  $\hat{n}_j$  可以取 0 或 1, 所以 Majorana 费米子对  $i\hat{\gamma}_{j,1}\hat{\gamma}_{j,2}$  可以取 -1 和 1。我们知道, 一对 Majorana 费米子等价于一个狄拉克电子<sup>[41]</sup>。我们想要研究 Majorana 费米子的性质, 必须找到独立且局域在不同格点上的 Majorana 费米子。对于一维拓扑超导系统来说, 最简单的就是在 p 波配对的超导体中寻找 Majorana 零模。

### 1.2.3 一维 Kitaev 模型

一维系统中最简单的形式是 Kitaev 提出的 p 波超导模型, 其哈密顿量为<sup>[42]</sup>:

$$\hat{H} = \sum_j \left[ -t(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j) - \mu \left( \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j - \frac{1}{2} \right) + (\Delta \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1}^\dagger + \Delta^* \hat{c}_{j+1} \hat{c}_j) \right] \quad (1.16)$$

其中,  $j=1, \dots, L$  是格点数,  $t$  是最近邻电子的跃迁强度,  $\mu$  是化学势,  $\Delta$  是产生或湮灭相邻格点的一对电子的 p 波配对势强度。 $\hat{c}_i^\dagger$  ( $\hat{c}_i$ ) 是费米子的产生(湮灭)算符。利用 Majorana 费米子算符(1.12)式将哈密顿量(1.16)写为:

$$\hat{H} = \frac{i}{2} \sum_j \left[ (-t + |\Delta|) \hat{\gamma}_{j,1} \hat{\gamma}_{j+1,2} + (t + |\Delta|) \hat{\gamma}_{j,2} \hat{\gamma}_{j+1,1} - \mu \hat{\gamma}_{j,1} \hat{\gamma}_{j,2} \right] \quad (1.17)$$

我们考虑两种极限情况:

(1). 当  $|\Delta| = t = 0$  时, 哈密顿量(1.17)可以写为:

$$\hat{H} = -\frac{i}{2} \sum_j \mu \hat{\gamma}_{j,1} \hat{\gamma}_{j,2} \quad (1.18)$$

此时, 每一个格点上的两个 Majorana 费米子形成一个狄拉克费米子, 对应于平庸态。其基态如图 1.4(a)所示。

(2). 当  $|\Delta| = t, \mu = 0$  时, 哈密顿量(1.17)可以写为:

$$\hat{H} = it \sum_j \hat{\gamma}_{j,2} \hat{\gamma}_{j+1,1} \quad (1.19)$$

此时, 系统中只有相邻格点的跃迁项。我们可以重新定义一组狄拉克费米子:



$$\hat{a}_j = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{j,2} + i\hat{\gamma}_{j+1,1}), \hat{a}_j^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{j,2} - i\hat{\gamma}_{j+1,1}) \quad (1.20)$$

从而得到哈密顿量(1.19)的基态。哈密顿量(1.19)用新定义的狄拉克费米子算符(1.20)表示为:

$$\hat{H} = 2t \sum_{j=1}^{L-1} \left( \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \frac{1}{2} \right) \quad (1.21)$$

其基态如图 1.4(b)所示。由于哈密顿量(1.19)中不包括  $\hat{\gamma}_{1,1}$  和  $\hat{\gamma}_{L,2}$ , 表明在一维链的两端出现了独立的 Majorana 费米子, 此时对应于拓扑非平庸态。

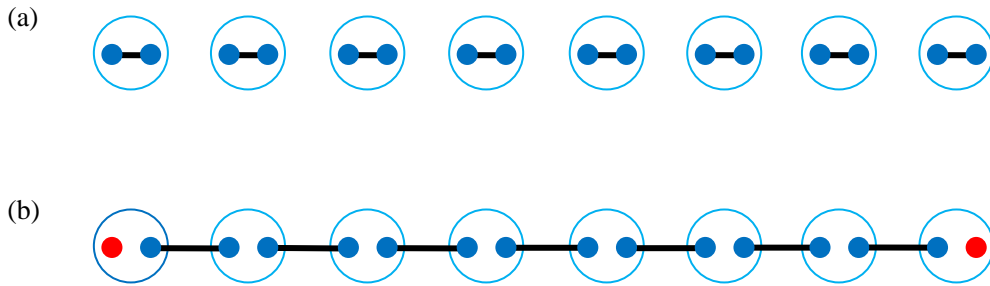


图 1.4 Kitaev 链中平庸态和拓扑非平庸态的示意图

(a)  $|\Delta| = t = 0$  时的基态; (b)  $|\Delta| = t, \mu = 0$  时的基态。

由此可以看出, 一维p波超导体中存在Majorana零模。我们在动量空间下研究该系统的拓扑性质。在周期性边界条件下, 通过傅里叶变换得到动量空间的哈密顿量:

$$\hat{H} = \sum_k \left[ (-2t \cos k - \mu) \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + i\Delta \sin k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_{-k}^\dagger + i\Delta^* \sin k \hat{c}_k \hat{c}_{-k} \right] \quad (1.22)$$

其准粒子激发谱为:

$$E_k = \pm \sqrt{(2t \cos k + \mu)^2 + (2|\Delta| \sin k)^2} \quad (1.23)$$

当  $|\mu| = 2t$  时, 体系的能隙关闭, 可以将上述拓扑非平庸相和平庸相分开。目前, 已经有实验构造出了Kitaev模型, 得到了Majorana零模存在的实验依据<sup>[43-46]</sup>。

#### 1.2.4 Bogoliubov-de Gennes(BdG)方法

一维 p 波超导体的哈密顿量为:

$$\hat{H} = \sum_i \left[ \left( -t\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \Delta\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1}^\dagger + H.c. \right) + V_i \hat{n}_i \right] \quad (1.24)$$

由于哈密顿量(1.24)中存在非对角的部分, 我们可以通过 Bogoliubov-de Gennes(BdG)变换使其对角化<sup>[47-49]</sup>。先定义一套新的费米子(准粒子)算符:

$$\hat{\eta}_n^\dagger = \sum_{i=1}^L [u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger + v_{n,i} \hat{c}_i] \quad (1.25)$$

$$\hat{\eta}_n = \sum_{i=1}^L [u_{n,i} \hat{c}_i + v_{n,i} \hat{c}_i^\dagger] \quad (1.26)$$

其中  $i=1, \dots, L$  是格点数,  $n$  是能级指标且  $n=1, \dots, L$ 。  $u_{n,i}$  和  $v_{n,i}$  均为实数。  $\hat{\eta}_n^\dagger$  和  $\hat{\eta}_n$  是准粒子的产生(湮灭)算符, 满足反对易关系:

$$\{\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_m^\dagger\} = \delta_{nm} \quad (1.27)$$

$$\{\hat{\eta}_n, \hat{\eta}_m\} = \{\hat{\eta}_n^\dagger, \hat{\eta}_m^\dagger\} = 0 \quad (1.28)$$

对角化后的哈密顿量可以写为:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^L E_n \left( \hat{\eta}_n^\dagger \hat{\eta}_n - \frac{1}{2} \right) \quad (1.29)$$

准粒子的产生算符  $\hat{\eta}_n^\dagger$  和对角化后的哈密顿量(1.29)的对易关系为:

$$[\hat{\eta}_n^\dagger, \hat{H}]_- = -E_n \hat{\eta}_n^\dagger = -\sum_{i=1}^L E_n [u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger + v_{n,i} \hat{c}_i] \quad (1.30)$$

同样, 可以计算准粒子的产生算符  $\hat{\eta}_n^\dagger$  和未对角化哈密顿量(1.24)的对易关系:

$$\begin{aligned} [\hat{\eta}_n^\dagger, \hat{H}]_- &= \left[ \sum_{i=1}^L [u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger + v_{n,i} \hat{c}_i], \hat{H} \right]_- \\ &= \left[ \sum_{i=1}^L u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger, \hat{H} \right]_- + \left[ \sum_{i=1}^L v_{n,i} \hat{c}_i, \hat{H} \right]_- \end{aligned} \quad (1.31)$$

在这里, 为了方便我们先计算(1.31)式中的第一部分  $\left[ \sum_{i=1}^L u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger, \hat{H} \right]_-$ , 在开边界条件下,

$u_{n,L+1} = u_{n,0} = 0$ ,  $v_{n,L+1} = v_{n,0} = 0$ , 费米子的产生算符  $\hat{c}_i^\dagger$  与动能项的对易关系为:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{j=1}^L u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger, \sum_{i=1}^{L-1} t \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} \right]_- &= \sum_{i,j=1}^{L-1} [u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger t \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} - t \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger] \\ &= \sum_{i,j=1}^{L-1} u_{n,j} t [-\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{i+1} - \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} \hat{c}_j^\dagger] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j=1}^{L-1} u_{n,j} t \left[ -\hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{i+1} + \hat{c}_{i+1} \hat{c}_j^\dagger) \right] \\
 &= -\sum_{i,j=1}^{L-1} u_{n,j} t \hat{c}_i^\dagger \delta_{i+1,j} \\
 &= -\sum_{i=1}^{L-1} u_{n,i+1} t \hat{c}_i^\dagger \tag{1.32}
 \end{aligned}$$

同理可得：

$$\left[ \sum_{j=1}^L u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger, \sum_{i=1}^{L-1} t \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} \right]_- = -\sum_{i=1}^{L-1} u_{n,i+1} t \hat{c}_i^\dagger \tag{1.33}$$

费米子的产生算符  $\hat{c}_i^\dagger$  与  $\mathbf{p}$  波配对项的对易关系为：

$$\begin{aligned}
 \left[ \sum_{j=1}^L u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger, \sum_{i=1}^{L-1} \Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} \right]_- &= \sum_{i,j=1}^{L-1} \left[ u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger \Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} - \Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger \right] \\
 &= \sum_{i,j=1}^{L-1} u_{n,j} \Delta \left[ \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} - \hat{c}_i (\delta_{i+1,j} - \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{i+1}) \right] \\
 &= \sum_{i,j=1}^{L-1} u_{n,j} \Delta \left[ (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i + \hat{c}_i \hat{c}_j^\dagger) \hat{c}_{i+1} - \hat{c}_i \delta_{i+1,j} \right] \\
 &= \sum_{i,j=1}^{L-1} u_{n,j} \Delta \left[ \delta_{ij} \hat{c}_{i+1} - \hat{c}_i \delta_{i+1,j} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^{L-1} u_{n,j} \Delta \hat{c}_{j+1} - \sum_{i=1}^{L-1} u_{n,i+1} \Delta \hat{c}_i \\
 &= \sum_{i=1}^{L-1} (u_{n,i-1} - u_{n,i+1}) \Delta \hat{c}_i \tag{1.34}
 \end{aligned}$$

同理可得：

$$\left[ \sum_{j=1}^L u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger, \sum_{i=1}^{L-1} \Delta \hat{c}_{i+1}^\dagger \hat{c}_i^\dagger \right]_- = 0 \tag{1.35}$$

费米子的产生算符  $\hat{c}_i^\dagger$  与化学势项的对易关系为：

$$\begin{aligned}
 \left[ \sum_{j=1}^L u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger, \sum_{i=1}^L V_i \hat{n}_{i+1} \right] &= \sum_{i,j=1}^L \left[ u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger V_i \hat{n}_{i+1} - V_i \hat{n}_{i+1} u_{n,j} \hat{c}_j^\dagger \right] \\
 &= \sum_{i,j=1}^L u_{n,j} V_i \left[ \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i - \hat{c}_i^\dagger (\delta_{ij} - \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i) \right] \\
 &= \sum_{i,j=1}^L u_{n,j} V_i \left[ (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i^\dagger + \hat{c}_i^\dagger) \hat{c}_i - \hat{c}_i^\dagger \delta_{ij} \right] \\
 &= -\sum_{i=1}^L u_{n,i} V_i \hat{c}_i^\dagger
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

综合(1.32)式-(1.36)式可以得到, (1.31)式中的第一部分可以写为:

$$\left[ \sum_{i=1}^L u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger, \hat{H} \right]_- = \sum_{i=1}^{L-1} \left[ (u_{n,i+1} + u_{n,i-1}) t \hat{c}_i^\dagger + (u_{n,i-1} - u_{n,i+1}) \Delta \hat{c}_i \right] - \sum_{i=1}^L u_{n,i} V_i \hat{c}_i^\dagger \tag{1.37}$$

同理, (1.31)式中的第二部分可以写为:

$$\left[ \sum_{i=1}^L v_{n,i} \hat{c}_i, \hat{H} \right]_- = \sum_{i=1}^{L-1} \left[ -(v_{n,i-1} + v_{n,i+1}) t \hat{c}_i + (v_{n,i+1} - v_{n,i-1}) \Delta \hat{c}_i^\dagger \right] + \sum_{i=1}^L v_{n,i} V_i \hat{c}_i \tag{1.38}$$

综合(1.37)式和(1.38)式可以得到:

$$\begin{aligned}
 \left[ \hat{\eta}_n^\dagger, \hat{H} \right]_- &= \sum_{i=1}^L \hat{c}_i^\dagger \left[ (u_{n,i+1} + u_{n,i-1}) t + (v_{n,i+1} - v_{n,i-1}) \Delta - u_{n,i} V_i \right] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^L \hat{c}_i \left[ (u_{n,i-1} - u_{n,i+1}) \Delta + (v_{n,i-1} + v_{n,i+1}) t + v_{n,i} V_i \right]
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

比较(1.30)式和(1.39)式, 对应系数相等可以得到 BdG 方程:

$$(u_{n,i+1} + u_{n,i-1}) t - u_{n,i} V_i + (v_{n,i+1} - v_{n,i-1}) \Delta = -E_n u_{n,i} \tag{1.40}$$

$$(u_{n,i-1} - u_{n,i+1}) \Delta + (v_{n,i-1} + v_{n,i+1}) t + v_{n,i} V_i = -E_n v_{n,i} \tag{1.41}$$

利用狄拉克函数的性质, 可以将 BdG 方程(1.40)式和(1.41)式写为:

$$\sum_{j=1}^L \left[ \left[ -t(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) + \delta_{j,i} V_i \right] u_{n,j} - \Delta(\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1}) v_{n,j} \right] = E_n u_{n,i} \tag{1.42}$$

$$\sum_{j=1}^L \left[ -\Delta(\delta_{j,i-1} - \delta_{j,i+1})u_{n,j} + \left[ t(\delta_{j,i-1} + \delta_{j,i+1}) - \delta_{j,i}V_i \right] v_{n,j} \right] = E_n v_{n,i} \quad (1.43)$$

令  $\hat{h}_{i,j} = -t(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) + V\delta_{j,ii}$ ,  $\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta(\delta_{j,i-1} - \delta_{j,i+1})$ , 则 BdG 方程(1.42)式和(1.43)式可以写为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta} & -\hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

其中,  $\hat{h} = \sum_{j=1}^L \hat{h}_{ij}$ ,  $\hat{\Delta} = \sum_{j=1}^L \hat{\Delta}_{ij}$ ,  $u_n^T = (u_{n,1}, \dots, u_{n,L})$ ,  $v_n^T = (v_{n,1}, \dots, v_{n,L})$ 。通过求解BdG方程(1.44)

可以得到系统的本征值及其相应的本征态。

### 1.3 本文安排

整个论文以拓扑系统为出发点, 主要介绍了一维(准)周期势调制下 p 波超导体中的拓扑量子相变。首先介绍了拓扑超导体、拓扑绝缘体和 Majorana 费米子的概念及其理论模型, 还介绍了可以将哈密顿量对角化的 Bogoliubov-de Gennes(BdG)方法。第二章主要介绍了经典的 AA 模型以及具有迁移率边的模型。随后, 介绍了加入 p 波超导体后的一维(准)周期调制模型。论文的第三章主要通过精确对角化方法从理论和数值方面研究了在特殊化学势调制下的 p 波超导量子线中的拓扑相变。希望我们的结果能对一维拓扑量子相变问题有所贡献。



## 第二章 一维准周期调制模型

### 2.1 Aubry-André 模型

1958年, 美国物理学家Anderson<sup>[50]</sup>首次研究了无序晶体中电子的运动, 提出了强无序系统中电子局域化的概念, 与之前将无序系统中的电子运动当做微扰处理的观点在本质上有很大不同, 为人们在凝聚态物理中研究无序系统提供了一个新的方向。Anderson认为导体中加入杂质后, 导体内电子会停止运动, 此时导体不再具有导电性而表现出绝缘体的特性。为了更好地表示局域化的特性, 他提出了扩展态和局域态的概念。扩展态是指电子在周期性排列的晶格中的运动是共有化的, 其本征波函数呈现布洛赫波函数<sup>[51]</sup>的形式; 局域态是指晶格的周期性被随机的无序杂质破坏, 导致电子被局域在某处, 其本征波函数在空间中具有指数衰减的特点。随后, Anderson提出了安德森(Anderson)局域化的概念, 当无序强度超过某个临界值时, 电子波函数发生指数衰减, 导致体系处于局域态。对于一维或者二维的系统, 任意的随机弱无序都会使系统处于局域态<sup>[52-54]</sup>。而在三维系统中, 随着无序强度的增加, 系统将经历从金属相到安德森绝缘相的转变<sup>[55]</sup>。

Aubry-André(AA)模型<sup>[56]</sup>是一个一维准周期系统, 其哈密顿量可以写为:

$$\hat{H} = -t \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + H.c.) + \sum_j V_j \hat{n}_j \quad (2.1)$$

其中,  $t$  是跃迁强度,  $V_j$  是化学势, 其表达式为,  $V_j = 2V \cos(2\pi j\alpha + \delta)$ 。在这里,  $V$  是化学势强度,  $\alpha$  取无理数,  $\delta$  是相移。根据本征方程:

$$\hat{H} \phi_n = E_n \phi_n \quad (2.2)$$

得到单粒子的定态薛定谔方程:

$$-t(\phi_{n,j+1} + \phi_{n,j-1}) + 2V \cos(2\pi j\alpha + \delta) \phi_{n,j} = E_n \phi_{n,j} \quad (2.3)$$

$\phi_{n,j}$  是第  $n$  个本征态在第  $j$  个格点上的几率幅。由于 AA 模型的自对偶性, 我们可以对基矢作如下变换:

$$\Phi_{n,j'} = \sum_j e^{2\pi i \alpha j' j} \phi_{n,j} \quad (2.4)$$

令  $\delta = 0$ , 将(2.4)式带入(2.3)式可以得到:

$$V(\Phi_{n,j'+1} + \Phi_{n,j'-1}) - 2t \cos(2\pi j' \alpha) \Phi_{n,j'} = E_n \Phi_{n,j'} \quad (2.5)$$

其中,  $j'$  是对偶空间的格点指标,  $\Phi_{n,j'}$  是在对偶空间中第  $n$  个本征态在第  $j'$  个格点

上的几率幅。(2.5)式是(2.3)式的对偶方程，两式的结构相同。当本征波函数在原来的空间中呈现局域态的性质时，在相应的对偶空间将表现出扩展态的性质，反之亦然。因此很容易得到，当 $|V|=|t|$ 时，系统发生扩展态向局域态的转变。

逆参与率 (inverse participation ratio, IPR) 是描述局域化使用率较广的一个参数，其定义为<sup>[57]</sup>：

$$\text{IPR}(E_n) = \frac{\sum_j |\phi_{n,j}|^4}{\left(\sum_j |\phi_{n,j}|^2\right)^2} \quad (2.6)$$

IPR是某个能级的本征波函数占据格点数的倒数，它可以用来区分本征态是局域态还是扩展态。对于扩展态来说，IPR的值趋近 $1/L$ ，当系统的尺寸趋于无穷时，IPR的值趋近零；而局域态的IPR的值不会随着尺寸的增大而改变，当系统的尺寸趋于无穷时，它是一个有限值。在图2.1中，我们展示了系统基态的IPR随 $V/t$ 的变化。

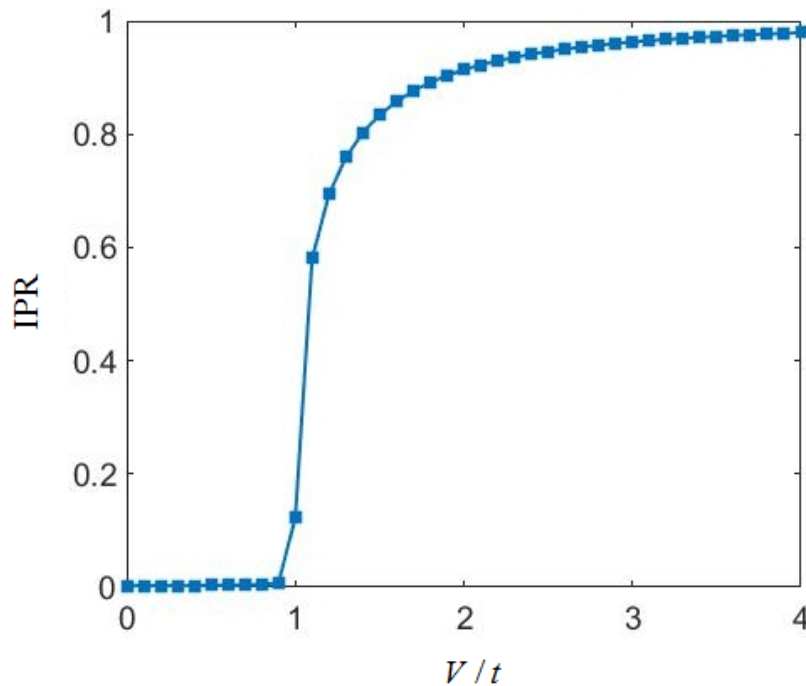


图 2.1 基态 IPR 随参数  $V/t$  的变化。

可以看出， $V/t < 1$ 时，IPR的值趋近零； $V/t > 1$ 时，IPR的值会随着无序强度的增大而趋近1。这表明， $V = t$ 时，IPR的值会突变，与由AA模型自对偶性求出的扩展-局域转变点相一致。

为了更清晰的看出扩展态向局域态的转变，可以通过精确对角化的方法数值求



解得到哈密顿量(2.1)的本征值。图 2.2 中展示了本征能量  $E_n/t$  随  $V/t$  的变化，图中的颜色表示 IPR 的值。黑色表示扩展态，亮色表示局域态。蓝色实线( $V/t=1$ )是扩展态向局域态转变的分界线，这条线左边全是扩展态，右边全是局域态。此系统中没有迁移率边的存在。

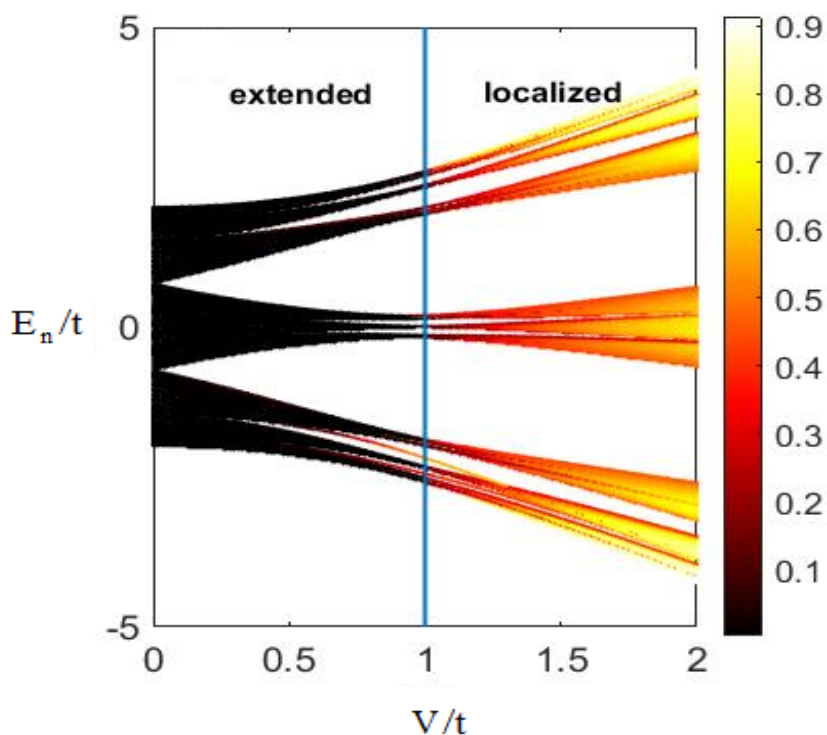


图 2.2 本征能量  $E_n/t$  随  $V/t$  的变化。

## 2.2 具有迁移率边的类 Aubry-André 模型

通过上一小节的计算，我们知道，AA 模型中不存在迁移率边。在这一小节中，我们讨论几种具有迁移率边的类 AA 模型，它们都是一维准周期模型<sup>[58-59]</sup>。

### 2.2.1 长程跃迁模型

2010 年，Biddle<sup>[58]</sup> 等人将 AA 模型中的跃迁项变为  $e$  指数的形式，其薛定谔方程为：

$$\sum_{j' \neq j} t_1 e^{-p|j-j'|} \phi_{n,j'} + 2V \cos(2\pi\alpha j + \delta) \phi_{n,j} = E_n \phi_{n,j}, p > 0 \quad (2.7)$$

其中， $t_1 = e^p$ 。仿照 AA 模型的自对偶变换，得到：

$$(E_n + t_1) - 2V \cos(2\pi\alpha j + \delta) = \omega^2 T_j \quad (2.8)$$

$$T_j = \frac{\cosh(p_0) - \cos(2\pi\alpha j + \delta)}{\sinh(p_0)}, p_0 > 0 \quad (2.9)$$

其中,  $\omega^2 = \sqrt{(E_n + t_1) - 4V^2}$ , 联立(2.8)式和(2.9)式可以得到  $\frac{E_n + t_1}{2V} = \cosh(p_0)$ , 则(2.7)式可以写为:

$$\omega^2 T_j \phi_{n,j} = \sum_{j'} t_1 e^{-p|j-j'|} \phi_{n,j'} \quad (2.10)$$

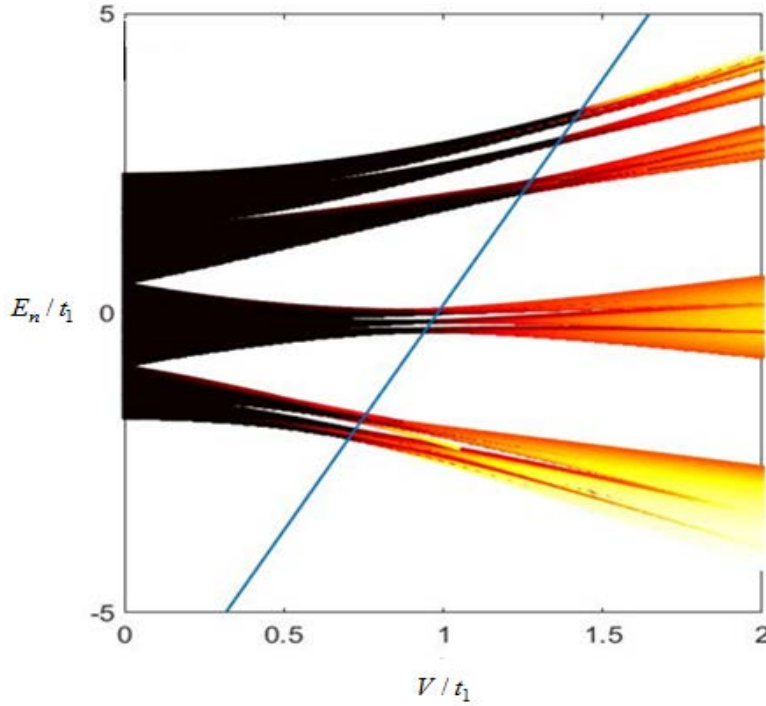


图 2.3 本征能量  $E_n / t_1$  随  $V / t_1$  的变化,  $p=2$ 。

然后, 做如下变换:

$$\tilde{u}_{n,m} = \sum_j e^{im(2\pi\alpha j + \delta)} T_j \phi_{n,j} \quad (2.11)$$

当  $p > 0$  时, 满足:

$$T_j^{-1} = \sum_m e^{-p|m|} e^{im(2\pi\alpha j + \delta)} \quad (2.12)$$

将其带入(2.10)式可以得到:

$$\omega^2 \tilde{T}_m \tilde{u}_{n,m} = \sum_{m'} t_1 e^{-p_0|m-m'|} \tilde{u}_{n,m'} \quad (2.13)$$

其中,  $\tilde{T}_m = \frac{\cosh(p) - \cos(2\pi\alpha m + \delta)}{\sinh(p)}$ 。比较(2.10)式和(2.13)式可知, 若  $p = p_0$ , 则

等式(2.10)满足自对偶的性质。在  $p < p_0$  的区间内, 全是扩展态; 在  $p > p_0$  的区间内, 全是局域态。该系统的迁移率边为:

$$\cosh(p) = \frac{E_n + t_1}{2V} \quad (2.14)$$

图 2.3 中展示了本征能量  $E_n / t_1$  随  $V / t_1$  的变化, 蓝色实线表示迁移率边, 左边为扩展态, 右边为局域态。

### 2.2.2 特殊非公度势模型

上一节中介绍了改变 AA 模型中的跃迁项的形式会导致系统具有迁移率边。在这一小节中, 我们介绍 AA 模型中的化学势改变之后的一个特殊模型, 其改变后的化学势是关于  $b$  的函数, 其表达式为<sup>[59]</sup>:

$$V_j = 2V \frac{\cos(2\pi\alpha j + \delta)}{1 - b \cos(2\pi\alpha j + \delta)}, b \in (-1, 1) \quad (2.15)$$

$b = 0$  时系统就退化为 AA 模型。同样, 根据本征方程可以写出薛定谔方程:

$$-t(\phi_{n,j+1} + \phi_{n,j-1}) + V_j \phi_{n,j} = E_n \phi_{n,j} \quad (2.16)$$

令:

$$g = 2V \frac{\cosh \beta}{\tanh \beta} \quad (2.17)$$

$$1/b = \cosh \beta \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \chi_p(\beta) &= \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta - \cos(2\pi p \alpha + \delta)} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\beta|s|} e^{is(2\pi p \alpha + \delta)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

则化学势可以写为:

$$V_p = g \chi_p(\beta) - 2V \cosh \beta \quad (2.20)$$

那么，薛定谔方程(2.16)可以写为：

$$-t(\phi_{n,p+1} + \phi_{n,p-1}) + g\chi_p(\beta)\phi_{n,p} = (E_n + 2V \cosh \beta)\phi_{n,p} \quad (2.21)$$

在后面的计算中，令  $\delta = 0$ ， $b > 0$ ， $t > 0$ ， $V > 0$ 。与 AA 模型类似，定义一个变换：

$$f_{n,k} = \sum_{mjp} e^{i2\pi\alpha(km+mj+jp)} \chi_j^{-1}(\beta_0)\phi_{n,p} \quad (2.22)$$

令  $v_j = \sum_p e^{i2\pi\alpha jp} u_p$ ， $2t \cosh \beta_0 = E_n + 2V \cosh \beta$ ， $\omega' = 2t \sinh \beta_0$ ，在等式(2.21)两

边同乘以  $\sum_p e^{i2\pi\alpha jp}$ ，可以得到：

$$\omega' \chi_j^{-1}(\beta_0) v_j = g \sum_s e^{-\beta|j-s|} v_s \quad (2.23)$$

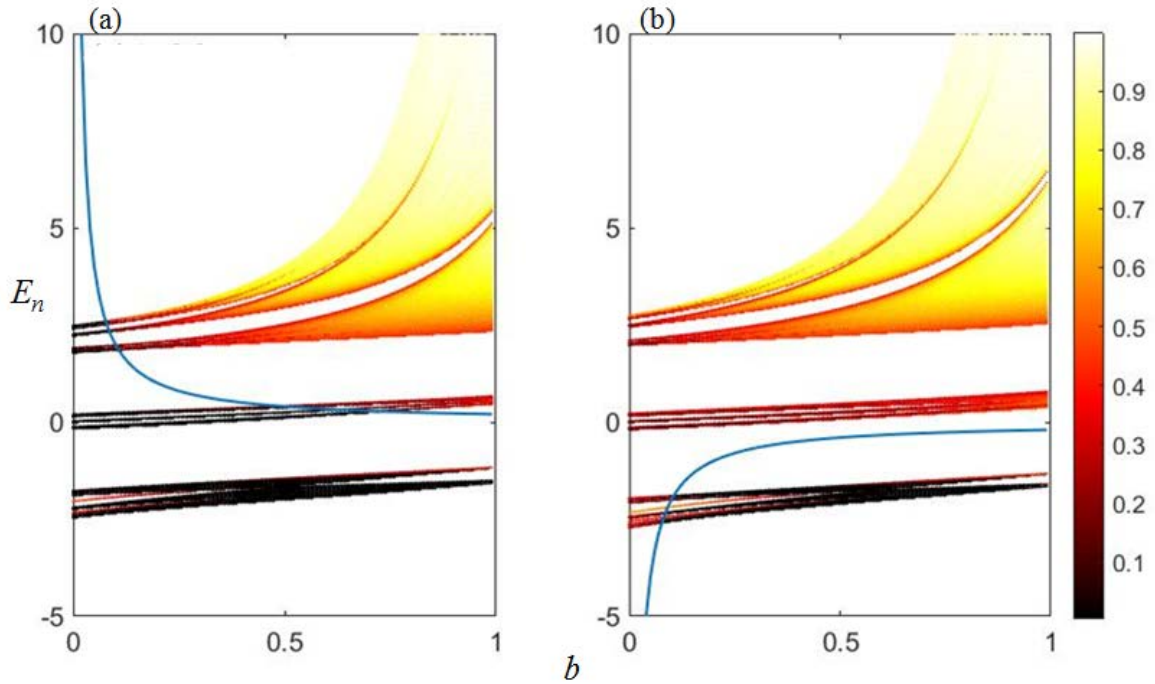


图 2.4 本征能量  $E_n$  随  $b$  的变化，(a)  $V = 0.9$ ；(b)  $V = 1.1$ 。

在等式(2.23)两边同乘以  $\sum_j e^{i2\pi\alpha mj}$ ，可以得到：

$$\omega' \chi_m^{-1}(\beta) \omega'_m = g \sum_s e^{-\beta_0|m-s|} \omega'_s \quad (2.24)$$

其中， $\omega'_m = \sum_j e^{im(2\pi\alpha j)} \chi_j^{-1}(\beta_0) v_j$ 。然后，定义变换  $f_{n,k} = \sum_m e^{i2\pi\alpha mk} \omega'_m$ ，同样

地，在等式(2.24)两边同乘以  $\sum_m e^{i2\pi\alpha mk}$ ，可以得到：

$$-t(f_{n,k+1} + f_{n,k-1}) + g \frac{\sinh \beta}{\sinh \beta_0} \chi_k(\beta_0) f_{n,k} = 2t \cosh \beta f_{n,k} \quad (2.25)$$

当  $\beta_0 = \beta$  时，在  $f_{n,k}$  变换下是等式(2.25)是自对偶的。由此，系统的迁移率边为：

$$bE_n = 2(t - V) \quad (2.26)$$

同样，可以数值求解其本征值和相应的本征波函数。图 2.4 中展示了本征能量  $E_n$  随参数  $b$  的变化。蓝色实线是迁移率边的表达式(2.26)。从图中可以看出，数值结果和解析表达式得到的结果一致。

### 2.3 一维 p 波超导体中的广义 Aubry-André 模型

前面我们讨论了 AA 模型及其变形。在这一节中，我们将讨论将 p 波超导体加入(类)AA 模型中，系统的拓扑量子相变及其迁移率边的特性。

#### 2.3.1 一维 p 波超导体中的 Aubry-André 模型

在 AA 模型中加入 p 波超导，其哈密顿量可以写为：

$$\hat{H} = \sum_i \left[ \left( -t \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} + H.c. \right) + V_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i \right] \quad (2.27)$$

其中  $t$  是跃迁强度且取能量单位( $t=1$ )， $\Delta$  是产生或湮灭一对电子的 p 波配对强度， $V_i$  是化学势，其表达式为：

$$V_i = V \cos(2\pi i\alpha + \delta) \quad (2.28)$$

其中， $V$  是化学势强度， $\delta$  是相移。 $\alpha = p/q$  为有理数且  $p$  和  $q$  为互质的整数， $V_i$  是公度势。 $\alpha$  为无理数时， $V_i$  是非公度(无序)势。我们通过数值求解 BdG 方程(1.44)得到单个准粒子的激发谱。

首先，我们介绍公度势调制的系统<sup>[60]</sup>，即  $\alpha$  为有理数。图 2.5 展示了  $\alpha=1/2$  和  $\alpha=1/3$  在开边界条件和周期性边界条件下最低激发态能量  $E_1$  随公度势  $V$  的变化。结果表明，在开边界条件下，公度势  $V$  较小时，整个相移空间都会有 Majorana 零模的存在；随着  $V$  的增大，能隙不断减小，当它超过临界值  $V_c$  时，一些相移的能隙关闭随后又重新打开，此时伴随着 Majorana 零模的消失，意味着随着公度势的增大，系统会经历拓扑非平庸相到拓扑平庸相的转变。但是，当  $\alpha=1/2$ ， $\delta=\pi/2$  和  $\alpha=1/3$ ， $\delta=\pi/6$  时，无论公度势  $V$  如何增强都不会影响 Majorana 零模，它会一直存在。

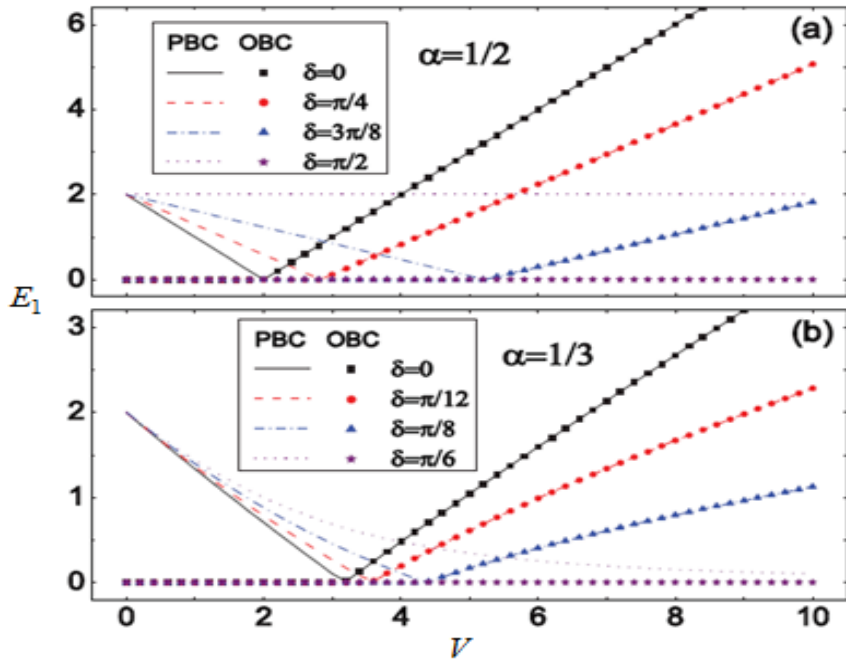


图 2.4 最低激发态能量  $E_1$  随公度势  $V$  的变化,  $t = \Delta = 1$ ,  $L = 510$  <sup>[60]</sup>。

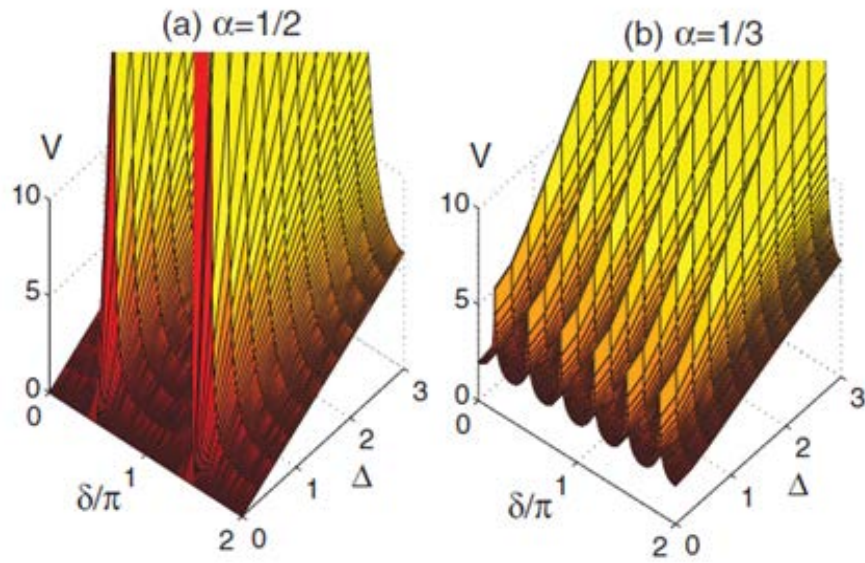


图 2.5  $\alpha = 1/2$  和  $\alpha = 1/3$  时的相图 <sup>[60]</sup>。

系统的拓扑性质可以由  $Z_2$  拓扑不变量表征, 其定义为:

$$M = \text{sgn}[\text{Pf}(B(0))] \text{sgn}[\text{Pf}(B(\pi/q))] \quad (2.29)$$

具体计算在第三章中将详细叙述。 $M = 1$ 对应于拓扑平庸相， $M = -1$ 对应于拓扑非平庸相。在周期性边界条件下令 $M = 0$ 可以得到系统的相边界。当 $\alpha = 1/2$ 时，其相边界为： $V|\cos\delta| = 2\Delta$ 。当 $\alpha = 1/3$ 时，其相边界为： $V^3|\cos 3\delta| = 8t(t^2 + 3\Delta^2)$ 。如图 2.5 所示的相图，我们可以清楚地看到，存在一些特殊点 $\delta_c$ ，对于任意的公度势强度 $V$ 系统一直处于拓扑非平庸相。

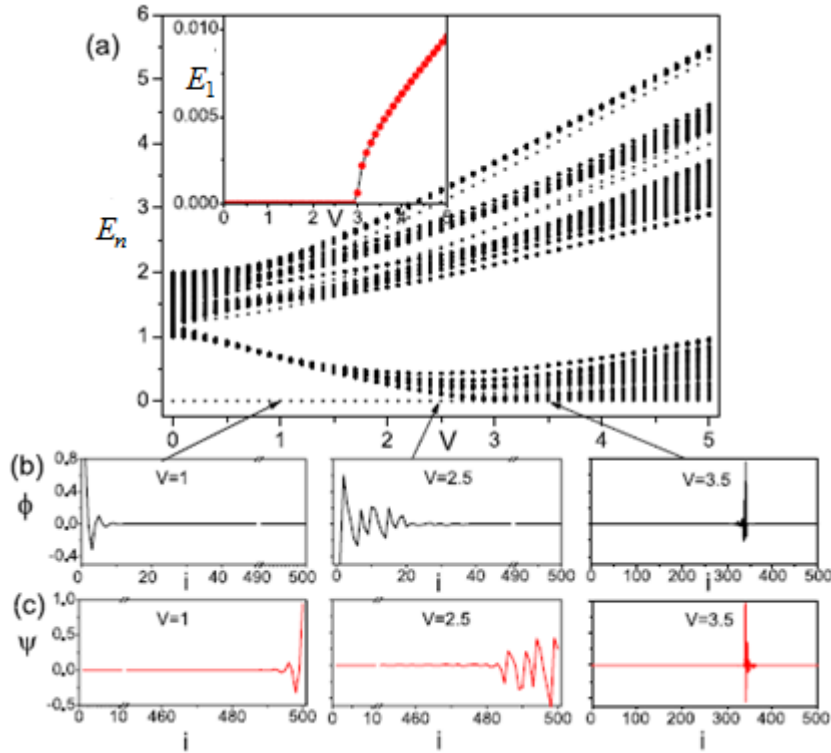


图 2.6 (a)在开边界条件下，能量  $E_n$  随非公度势  $V$  的变化<sup>[61]</sup>

最低激发态的空间分布  $\phi$  (b)和  $\psi$  (c)  $\Delta = 0.5$ ， $L = 500$ 。

接下来，我们介绍非公度势调制下的 p 波超导体<sup>[61]</sup>。在后面的计算中令  $\delta = 0$ 。同样，我们可以通过求解 BdG 方程(1.44)得到准粒子的能谱及其本征波函数。如图 2.6(a)所示，随着非公度势  $V$  的增加，能谱中的能隙关闭，且不再打开。能隙关闭前，体系中存在 Majorana 零模。能隙关闭后，虽然最低激发态能量也为零，但它并不是 Majorana 零模。由图 2.6(b)-(c)可以看出，当  $V < V_c$  时，如  $V = 1$ ，最低激发态的波函数  $\phi$  和  $\psi$  分别局域在边界的两端，对应于拓扑非平庸相；当  $V > V_c$  时，如  $V = 3.5$ ，最低激发态的波函数  $\phi$  和  $\psi$  局域在空间某一点上，且  $\phi$  和  $\psi$  的振幅重叠，并不是 Majorana 边缘态，对应于拓扑平庸相(安德森局域相)。将哈密顿量变换到动量空间

通过计算可以得到其相边界为:

$$|V_c| = 2(\Delta + t) \quad (2.30)$$

与数值结果相吻合。

### 2.3.2 一维 p 波超导中的长程跃迁模型

在长程跃迁模型中加入 p 波超导体的哈密顿量为<sup>[62]</sup>:

$$\hat{H} = \sum_{i \neq j}^L -te^{-p|i-j|} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \sum_i [(\Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} + H.c.) + V \cos(2\pi i \alpha) \hat{n}_i], p > 0 \quad (2.31)$$

当  $\Delta = 0$  时, 系统就退化为 Biddle<sup>[57]</sup> 提出的模型, 此时系统具有解析的迁移率边。为了区分体系局域和扩展的性质, 我们定义逆参与率 (Inverse participation ratio,

IPR)  $\text{IPR}_n = \sum_{i=1}^L (u_{n,i}^4 + v_{n,i}^4)$ , 其中  $i$  是格点数,  $n$  是能级数,  $u_{n,i}$  和  $v_{n,i}$  是 BdG 方程(1.44)

的本征波函数。对于扩展态, 当  $L \rightarrow \infty$  时,  $\text{IPR}_n \rightarrow 0$ ; 对于局域态,  $L \rightarrow \infty$  时,  $\text{IPR}_n$  趋近有限值。

首先, 我们可以数值求解 BdG 方程(1.44)得出其准粒子的能谱, 如图 2.7 所示, 在这里, 我们取  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $q = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = 233$ 。可以看出, 随着非公度势强度的增大能隙关闭并不再打开。在能隙关闭之前, 最低激发态产生了局域的 Majorana 零模。这是加入 p 波超导体后独有的拓扑性质, 会随着非公度势强度的增大发生从拓扑非平庸相到拓扑平庸相的转变。那么, p 超导体的加入对系统的迁移率边有什么影响呢? 图 2.7 中的颜色表示 IPR 的值, 黑色代表扩展态, 亮色代表局域态。从图中我们并不能直观的看出迁移率边的位置。为了更好的确定系统中是否存在迁移率边, 我们给出迁移率边全新的一种定义, 如果能谱中相邻能级的波函数分别是扩展态和局域态, 则该系统存在迁移率边。在图 2.7 中\*所标记的 ME1 和 ME2 的相邻能级 IPR 的值不同, 表明该系统可能存在迁移率边。为了进一步验证这个结果, 我们可以观察这两个位置相邻能级波函数的空间分布。如图 2.8 所示, 处于 ME1 相邻能级的本征态分别是扩展态和局域态, 处于 ME2 相邻能级的本征态也是扩展态和局域态, 可以看出 ME1 和 ME2 符合我们对迁移率边的定义。所以该系统中有迁移率边存在, 但是并不能得出其具体的表达式。我们发现, 增加 p 波配对强度  $\Delta$ , 系统中迁移率边的条数会增加。如图 2.9 所示, 随着 p 波配对强度  $\Delta$  的增加, 由 IPR



表征的能级数图中会出现多条明暗相间的线，一条明暗相间的线代表系统中有一条迁移率边。故在长程跃迁模型中加入 p 波超导后，系统会发生拓扑量子相变，且改变了原系统中的迁移率边。

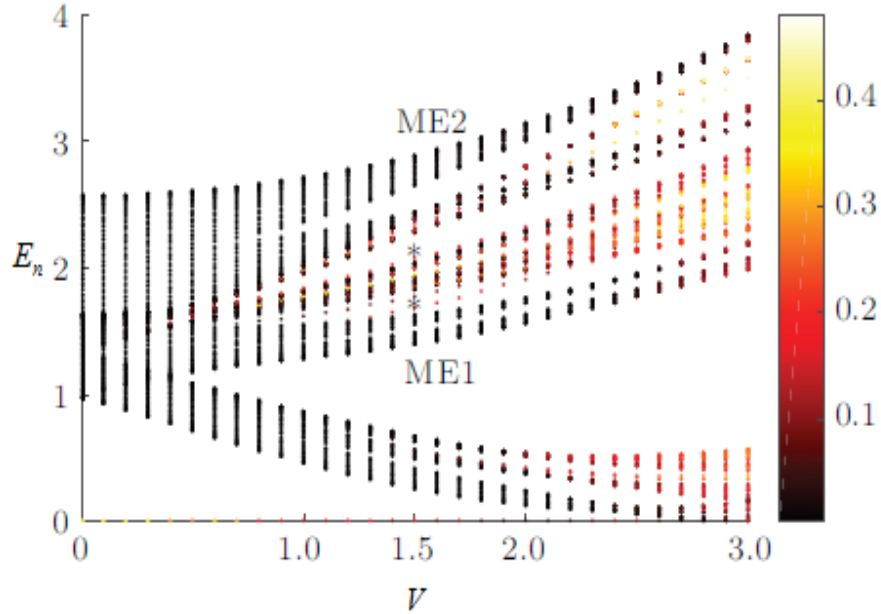


图 2.7 在开边界条件下，随非公度势  $V$  变化的能谱<sup>[62]</sup>

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad q = 1.5, \quad \Delta = 0.5, \quad L = 233$$

图中\*表示 ME1 和 ME2 的位置。

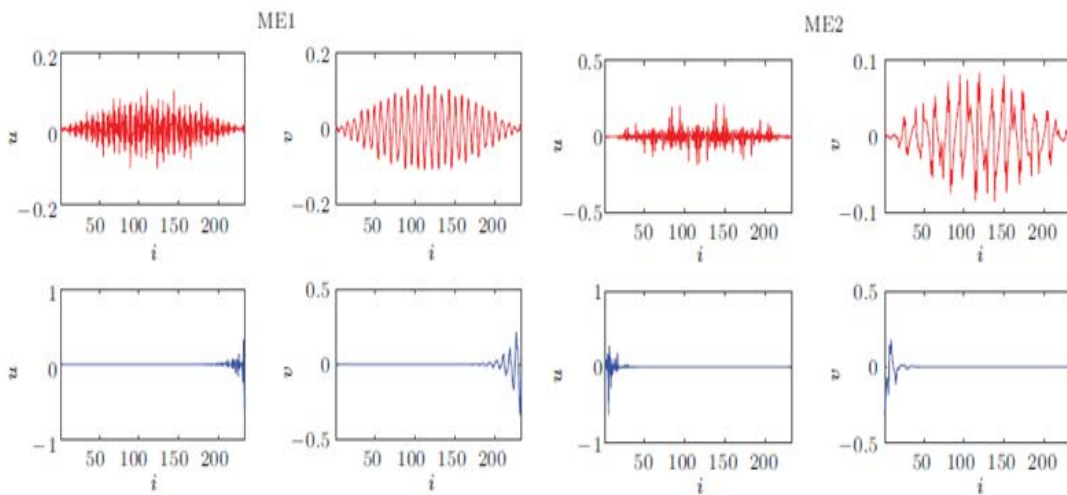


图 2.8 在开边界条件下，ME1 和 ME2 对应准粒子的本征波函数  $u, v$ <sup>[62]</sup>

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad q = 1.5, \quad \Delta = 0.5, \quad L = 233。$$

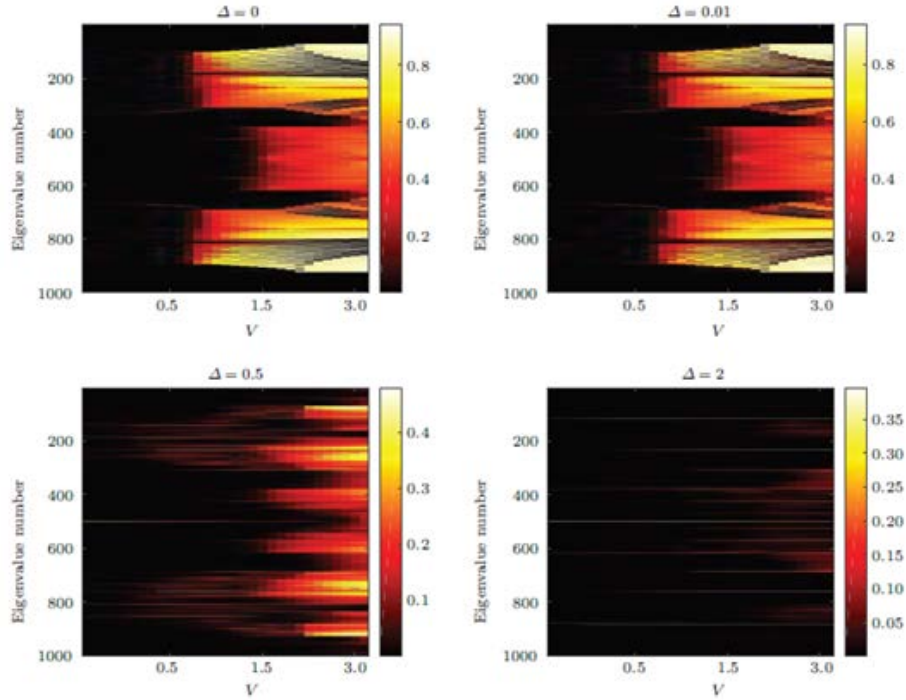


图 2.9 IPR 随非公度势  $V$  和能级数  $n$  的变化,  $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ ,  $q=1.5$ ,  $L=233$  [62]。

### 2.3.3 一维 p 波超导中的缓变势模型

一维缓变势调制的 p 波超导的哈密顿量与加入 p 波超导的 AA 模型(2.24)类似, 其调制化学势变为 [63]:

$$V_i = V \cos(2\pi i^\beta \alpha + \delta) \quad (2.32)$$

其中,  $V$  是非公度势强度,  $i=1, \dots, L$  是格点数,  $0 < \beta < 1$ ,  $\alpha$  为无理数。在后面的计算中, 取  $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ ,  $\delta = 0$ ,  $\beta = 0.4$ 。同样, 可以先求解 BdG 方程得到准粒子的本征能量及其波函数, 在这里, 取  $\Delta = 0.3$ ,  $L = 10000$ 。如图 2.10 所示, 最低激发态在  $V < 2$  时有能隙和零模存在, 观察其  $V = 1.9$  时准粒子的空间分布,  $\phi$  和  $\psi$  分别局域在边界的两端, 属于 Majorana 零模, 此区域对应于拓扑非平庸相。  $V > 2$  时, 能隙关闭, 零模仍然存在, 但它并不是 Majorana 零模。因为其本征态的空间分布局域在某一点上(如  $V = 2.5$ ), 不符合 Majorana 零模的性质。该系统的拓扑相变点为  $V_c = 2$ 。遗憾的是, 我们没有得到精确的解析解, 但是可以通过数值结果佐证这个结论。在图 2.11 中, 在不同 p 波配对强度下画出了能隙( $\Delta_g = E_{L+2} - E_{L-1}$ )随非公度势

$V$  的变化。结果表明，对于不同  $\Delta$  的取值，能隙都在  $V = 2$  处关闭。为了进一步验证这个结果，在图 2.11 的插图中做了标度分析， $V = 2$  时， $\Lambda = \Delta_g / 2$  的分形行为具有幂指数的下降趋势。故认为  $V_c = 2$  是能隙关闭的点，即拓扑相变的点。

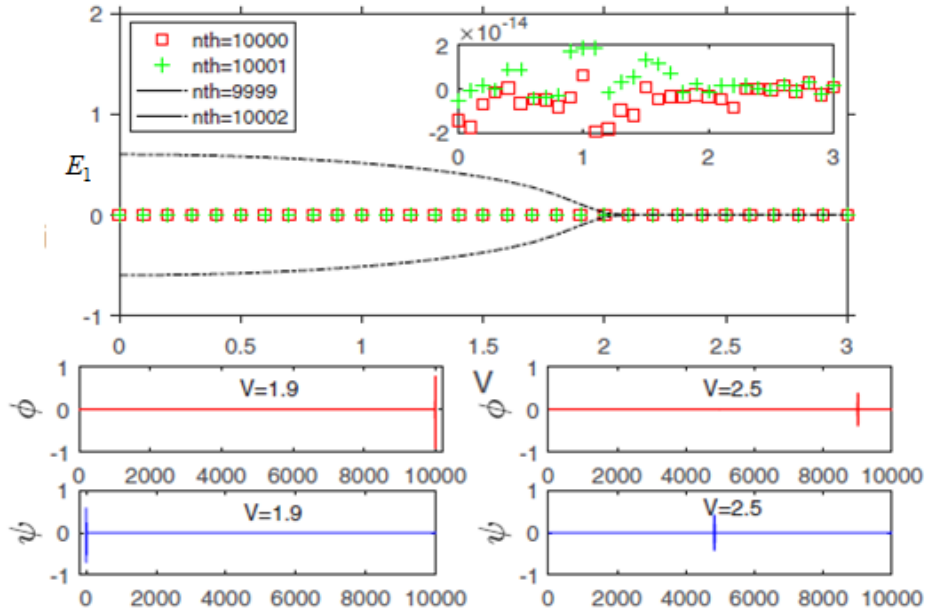


图 2.10 在开边界条件下，随非公度势  $V$  变化的能谱<sup>[63]</sup>

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad \beta = 0.4, \quad \Delta = 0.3, \quad L = 10000。$$

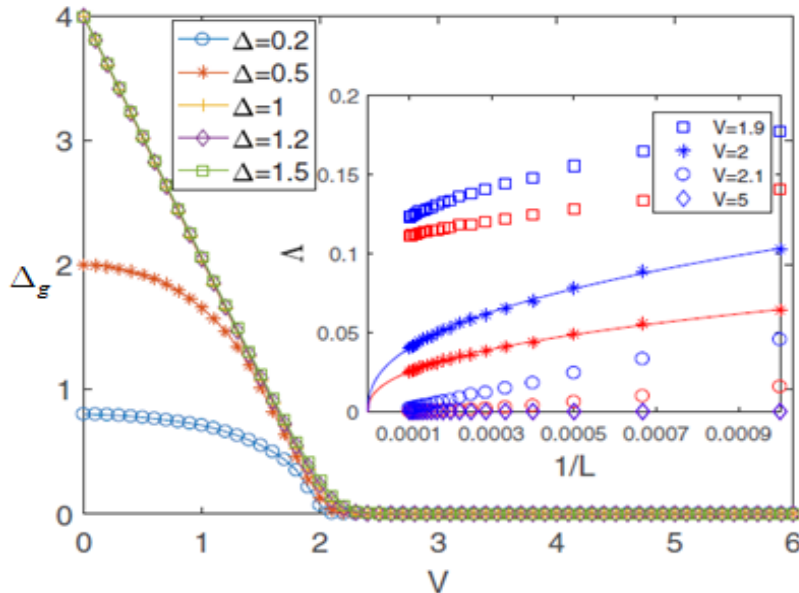


图 2.11 在开边界条件，不同  $p$  波配对强度下系统的能隙  $\Delta_g$  随非公度势  $V$  变化  $L = 1000$ <sup>[63]</sup>

插图表示了  $\Lambda$  在  $V = 2$  附近的标度分析，红色表示  $\Delta = 0.5$ ，蓝色表示  $\Delta = 1$ 。

我们可以通过数值计算的结果去分析该系统的迁移率边。如图 2.12 所示，画出了 IPR 随不同  $(\Delta, V)$  条件下本征能量的变化。图中 IPR 的值为  $10^{-2}$  数量级表示系统处于局域态，IPR 的值为  $10^{-4}$  数量级表示系统处于扩展态。在某些特殊能量下会发生局域-扩展的转变，在另外一些特殊能量下正好相反。我们发现  $V < 2 - 2\Delta$  是该系统存在迁移率边的必要条件。如图 2.12(a)，当  $(\Delta, V) = (0.5, 0.5)$  时(蓝色点)，此时， $V < 2 - 2\Delta = 1$ ，我们可以看出， $E_{c,1} = \pm 1.5$  是扩展-局域的转变点， $E_{c,2} = \pm 1$  是局域-扩展的转变点，说明系统中存在迁移率边。当  $(\Delta, V) = (0.5, 0.8)$  时(红色点)，此时， $V < 2 - 2\Delta = 1$ ，局域和扩展的转变点为  $E_{c,1} = \pm 1.2$ ， $E_{c,2} = \pm 1$ ，说明系统中存在迁移率边。但是当  $(\Delta, V) = (0.5, 1)$  时(绿色点)，此时， $V = 2 - 2\Delta = 1$ ，能谱中 IPR 的值没有发生突变，说明系统中不存在迁移率边。当 p 波配对强度  $\Delta$  改变时，系统的迁移率边将会如何变化呢？如图 2.12(b)所示，当  $(\Delta, V) = (0.6, 0.5)$  时(蓝色点)，此时， $V < 2 - 2\Delta = 0.8$ ，局域和扩展的转变点为  $E_{c,1} = \pm 1.5$ ， $E_{c,2} = \pm 1.2$ ，说明系统中存在迁移率边。但是  $(\Delta, V) = (0.6, 1)$  时，此时， $V > 2 - 2\Delta = 0.8$ ，能谱中 IPR 的值没有发生突变，系统中不存在迁移率边。综上所述，当非公度势强度  $V < 2 - 2\Delta$  时，系统中存在迁移率边，且这些迁移率边分别位于  $E_{c,1} = \pm(2 - V)$  和  $E_{c,2} = \pm 2\Delta$  处。当  $V \geq 2 - 2\Delta$  时，系统中将不存在迁移率边。

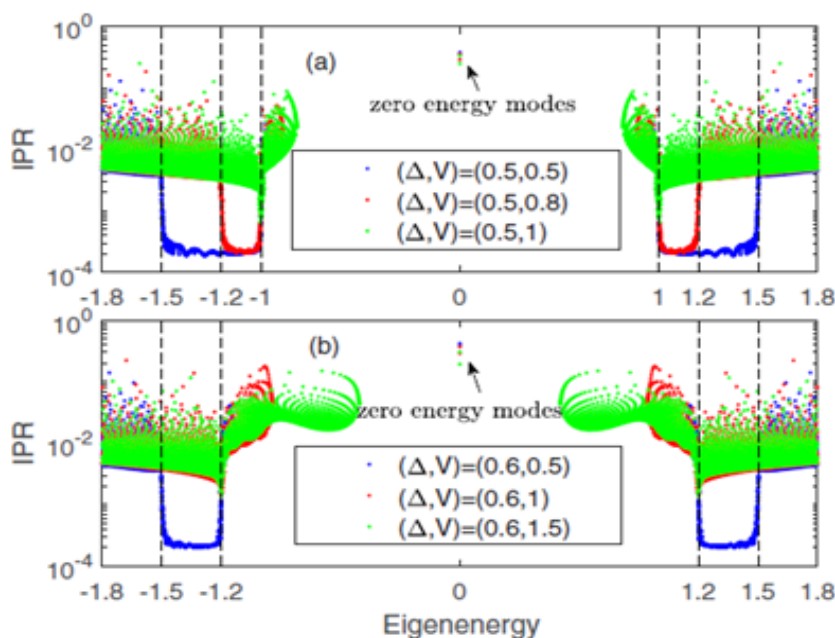


图 2.12 IPR 随不同  $(\Delta, V)$  条件下本征能量的变化<sup>[63]</sup>

黑色虚线表示迁移率边的转折点  $E_{c,1} = \pm(2 - V)$ ， $E_{c,2} = \pm 2\Delta$ ， $L = 5000$ 。

## 2.4 小结

本小节我们介绍了经典的 AA 模型及其相关性质。该模型中具有扩展态向局域态的转变，但是不存在迁移率边。随后，我们介绍了具有迁移率边的 AA 模型的推广，并详细叙述了其迁移率边的求解过程。最后，我们介绍了 AA 模型及推广模型中加入 p 波超导的情况。p 波超导的加入使得系统会发生拓扑量子相变，并使系统的迁移率边发生改变。下一节中，我们将重点讨论含有参数  $b$  的特殊化学势中加入 p 波超导的系统中的拓扑量子相变及其迁移率边的问题。



## 第三章 一维化学势调制的 p 波超导体中的拓扑量子相变

### 3.1 简介

早在上世纪 30 年代, Majorana 求解了 Dirac 相对论协变的电子运动方程, 发现了一种不带电荷的费米子, 它的反粒子是其自身。人们为了寻找它的踪迹一直在不懈的努力, 然而最终 Majorana 零模在凝聚态物理中发现, 并成为重要的研究课题<sup>[64-66]</sup>。超导体中 U(1) 规范对称性的破缺为 Majorana 费米子的产生提供了可能性, 人们已经在具有强自旋-轨道耦合的半导体纳米线<sup>[67-71]</sup>, 磁原子链<sup>[72-74]</sup>, 平面约瑟夫森结<sup>[75-77]</sup>以及常规超导体和拓扑绝缘体<sup>[35, 78, 79]</sup>的界面等体系中发现了它的存在。另一方面由于 Majorana 费米子具有局域性且满足非阿贝尔统计<sup>[80-82]</sup>等特性, 使得它成为实现容错拓扑量子计算<sup>[42, 83]</sup>最有力的竞争者。由于拓扑量子计算的巨大应用前景, 使得 Majorana 费米子相关性质的研究越来越被人们所重视。特别是近年来, 随着冷原子技术的发展, 人们发现通过周期驱动光格子可以实现物质拓扑态<sup>[84-86]</sup>, 通过周期驱动具有 p 波配对的超导量子线, 有可能会产生额外的  $\pi$  模<sup>[87]</sup>。通过多个时间周期性驱动的 Kitaev 链可以产生支持 Majorana 零模的新区域, 对 Majorana 费米子的寻找提供了理论基础<sup>[88]</sup>。拓扑相最初是在厄密系统中发现的, 但人们对非厄密系统中拓扑相的研究也存在很大的兴趣<sup>[89-93]</sup>。由于 Majorana 零模可以在非厄密体系中出现且可以持续存在, 其对环境具有很强的鲁棒性, 为更好的研究 Majorana 费米子提供了方法。最近, 谢心澄等人阐述了实现非阿贝尔编织的一种新途径<sup>[94]</sup>, 利用 Jackiw-Rebbi 零模也可以实现非阿贝尔编织, Jackiw-Rebbi 零模不具有 Majorana 零模的自共轭特性, 其可以出现在非超导体中。Jackiw-Rebbi 零模的研究为拓扑量子计算提供了新的思路。有趣的是, Majorana 零模可以被认为是 Jackiw-Rebbi 零模在具有粒子-空穴对称性时的特例<sup>[95, 96]</sup>。

Kitaev 链是研究 Majorana 费米子的重要模型, 在此基础上人们意识到通过对 Kitaev 链的调制可以极大的改变系统的拓扑相变过程。如郎利君<sup>[59]</sup>等人研究了周期性调制对 Majorana 费米子产生的影响, 他们发现随着调制强度的增大, 拓扑非平庸超导相可能会被破坏。由于 Majorana 零模的稳定性受到超导能隙的保护, 因此在加入周期调制化学势的情况下 Majorana 费米子可能是不稳定的, 会随着调制化学势强度的增大而消失。然而在某些参数情况下, 调制强度无法改变 Majorana 费米子的存

在性。与此同时，蔡小明<sup>[60]</sup>等人讨论了非公度势调制对拓扑相变的影响，发现随着非公度调制强度的增加系统将经历拓扑非平庸相向平庸的安德森局域相的转变。随后相当多的工作对 Kitaev 链进行了深入的研究<sup>[97-99]</sup>。本文主要讨论(准)周期调制的 p 波超导量子线系统中的拓扑量子相变。

### 3.2 理论模型与方法

我们考虑一维具有(准)周期调制的 p 波超导量子线，其哈密顿量可以写为：

$$\hat{H} = \sum_i \left[ (-t\hat{c}_i^\dagger\hat{c}_{i+1} + \Delta\hat{c}_i\hat{c}_{i+1} + H.c.) + V_i\hat{n}_i \right] \quad (3.1)$$

其中  $\hat{c}_i^\dagger$  ( $\hat{c}_i$ ) 是费米子的产生(湮灭)算符， $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i$  是粒子数算符， $t$  是最近邻格点间的跃迁强度，被设为能量单位( $t=1$ )， $\Delta$  为超导配对项中的对产生或对湮灭的强度，化学势项可以写为：

$$V_i = V \frac{\cos(2\pi i\alpha + \delta)}{1 - b\cos(2\pi i\alpha + \delta)} \quad (3.2)$$

其中  $V$  是化学势的强度， $\delta$  是任意的相移。 $\alpha$  控制系统的调制周期，若  $\alpha = p/q$  是有理数 ( $p$  和  $q$  是互质的整数)，则  $V_i$  是公度势；若  $\alpha$  是无理数，系统具有非公度调制。化学势是参数  $b$  的连续函数，其中  $b \in [0,1)$ 。在没有超导配对的情况下，即  $\Delta = 0$ ，当  $b = 0$  时，若  $\alpha$  为有理数，系统处于拓扑非平庸相，由非零整数的陈数所标记<sup>[100]</sup>；若  $\alpha$  为无理数，模型退化为著名的 AA 模型<sup>[101]</sup>，此时如果  $V < 2t$ ，系统中所有的单粒子本征态为扩展态并且具有非平庸的拓扑性质，而当  $V > 2t$  时，所有的本征态都为局域态， $V = 2t$  时扩展到局域相的转变点，此时所有的本征态具有多分形的特性，而这一系统中并不存在迁移率边<sup>[59]</sup>；对于  $b \neq 0$  且  $\alpha$  为无理数的情况<sup>[102]</sup>，系统具有能量依赖的自对偶性，其迁移率边可以解析的表示为： $E_c = (2t - V)/b$ 。对于存在超导配对的情况，即  $\Delta \neq 0$ ，若  $\alpha$  为有理数，模型哈密顿量为周期调制的 p 波超导量子线，已经被广泛的研究<sup>[59]</sup>，文献[59]中指出此系统的拓扑相变依赖于相移  $\delta$ ，而某些特殊的相移  $\delta$  使系统一直处于拓扑非平庸相不受周期调制强度  $V$  所控制；对于非公度调制，蔡小明等<sup>[60]</sup>指出随着非公度调制强度的增大，系统经历一个由拓扑非平庸相到安德森局域相的转变，转变点在  $V_c = 2t + 2\Delta$  处。由此可见，在  $b = 0$  的情况，模型具有丰富的拓扑及局域化特性，已经引起了广泛的兴趣。在本文中我们关注  $\Delta \neq 0$ ， $b \neq 0$ ， $\alpha$  分别为有理数和无理数的情况下系统的拓扑相变，以及在  $\alpha$  为无理数时系



统的局域化特性。

可以通过 Bogoliubov-de Gennes(BdG)变换<sup>[46-48]</sup>把系统的哈密顿量(3.1)对角化,我们定义一组准粒子算符:

$$\hat{\eta}_n^\dagger = \sum_{i=1}^L [u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger + v_{n,i} \hat{c}_i] \quad (3.3)$$

其中  $L$  是系统的格点数,  $n$  是能级指标且  $n=1, \dots, L$ 。由于在哈密顿量(3.1)中所有的参数都选为实数,  $u_{n,i}$  和  $v_{n,i}$  也均为实数。哈密顿量可以用准粒子算符表示为

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^L E_n (\hat{\eta}_n^\dagger \eta_n - 1/2), \text{ 其中 } E_n \text{ 是准粒子的本征能量。由对角化关系 } [\hat{\eta}_n^\dagger, \hat{H}] = -E_n \hat{\eta}_n^\dagger,$$

得到下面的 BdG 耦合方程:

$$\begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta} & -\hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

其中  $\hat{h}_{ij} = -t(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) + V_i \delta_{j,i}$ ,  $\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta(\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1})$ ,  $u_n^T = (u_{n,1}, \dots, u_{n,L})$ ,

$v_n^T = (v_{n,1}, \dots, v_{n,L})$ 。通过求解 BdG 方程,我们可以得到准粒子的本征能量及其相应的本征波函数。由于 BdG 方程满足电子-空穴对称性,即  $\hat{\eta}_n(E_n) = \hat{\eta}_n^\dagger(-E_n)$ , 系统的能谱关于零点对称。系统的基态对应于所有负的准粒子的能级被填满的情况。在下面的分析中,我们取  $b=0.5$ 。

### 3.3 结果分析与讨论

#### 3.3.1 周期调制的 p 波超导线

在这一小节,我们讨论  $\alpha$  为有理数情况,系统的拓扑相变。在开边界条件下,我们通过数值求解 BdG 方程(3.4)得到准粒子的本征能量  $E_n$ ,若系统处于拓扑非平庸相,能谱中会出现零能的 Majorana 边缘态,而当系统处于拓扑平庸相, Majorana 零模消失。图 3.1 中我们计算了在  $b=0.5$ ,  $\Delta=0.2$ ,  $V=1.5$  和  $\delta=0$  时,能谱随参数  $\alpha$  变化的情况,即 Hofstadter 蝴蝶谱<sup>[103, 104]</sup>,其中红色点表示非平庸的零模。随着  $\alpha$  的增加,系统表现出复杂的拓扑相变过程。作为具体的例子,我们将分别讨论  $\alpha=0, 1/2, 1/3$  的情况。

当  $\alpha = 0$  时，哈密顿量退化为标准的 Kitaev 模型<sup>[42]</sup>，系统在  $\left| \frac{V \cos \delta}{1 - b \cos \delta} \right| = 2t$  处会经历一个拓扑相变，在  $\left| \frac{V \cos \delta}{1 - b \cos \delta} \right| < 2t$  区域内处于由 Majorana 零模所标记的拓扑非平庸相。可以看出当  $\delta$  取  $\pi/2$  奇数倍时，系统将一直处于拓扑非平庸相，并不依赖于  $V$  取值。

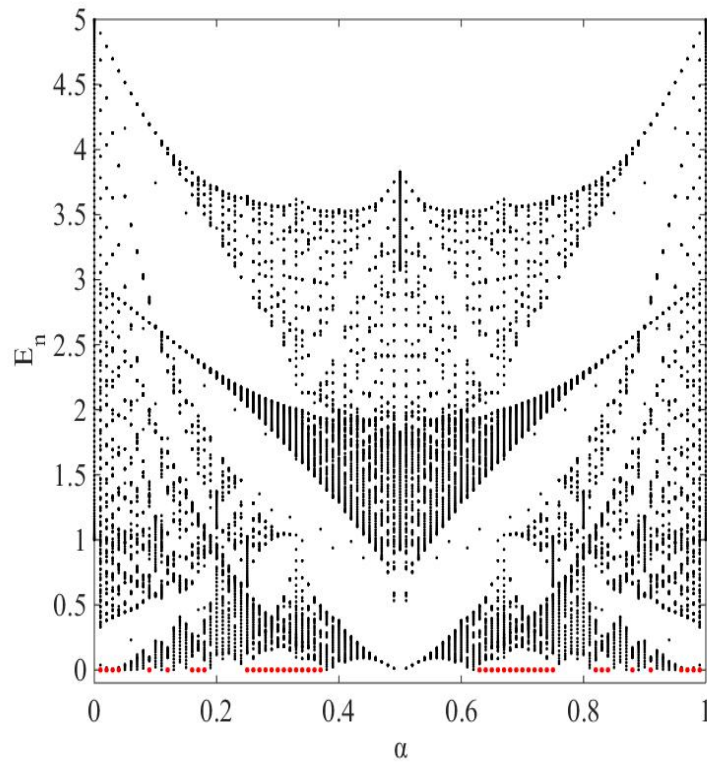


图 3.1 Hofstadter 蝴蝶谱：随  $\alpha$  变化的能谱，红色点是 Majorana 费米子

$$b = 0.5, \quad L = 120, \quad \Delta = 0.2, \quad V = 1.5, \quad \delta = 0.$$

我们知道，非平庸的 Majorana 零模可以由  $Z_2$  拓扑不变量来表征<sup>[42, 59]</sup>。对于  $\alpha = 1/2$  和  $1/3$  的情况，可以通过计算  $Z_2$  拓扑不变量，解析的得到系统的相变点。我

们考虑具有周期性边界的系统并对其进行傅里叶变换， $\hat{c}_i = \hat{c}_{s,l} = \sqrt{\frac{q}{L}} \sum_k \hat{c}_{s,k} e^{ikql}$ 。其中，

$i = s + (l-1)q$ ,  $s = 1, \dots, q$  表示一个超导原胞内的格点数,  $l = 1, \dots, L/q$  是第  $l$  个超导原胞的位置,  $k$  表示动量, 其取值范围为  $[0, 2\pi/q]$ 。哈密顿量(3.1)进行傅里叶变换之后可以写为:

$$\hat{H}_k = \sum_k \left[ \sum_{s=1}^{q-1} \left( -t \hat{c}_{s,k}^\dagger \hat{c}_{s+1,k} + \Delta \hat{c}_{s,k} \hat{c}_{s+1,-k} \right) - t \hat{c}_{q,k}^\dagger \hat{c}_{1,k} e^{ikq} + \Delta \hat{c}_{q,k} \hat{c}_{1,-k} e^{-ikq} + H.c. \right] - \sum_k \sum_{s=1}^q V_s \left( \hat{c}_{s,k}^\dagger \hat{c}_{s,k} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.5)$$

在动量空间下, 我们定义一组准粒子算符<sup>[60]</sup>:  $\hat{\gamma}_{2s-1}(k) = \hat{c}_{s,k} + \hat{c}_{s,-k}^\dagger$ ,  $\hat{\gamma}_{2s}(k) = (\hat{c}_{s,k} - \hat{c}_{s,-k}^\dagger)/i$ , 它满足反对易关系:  $\{\hat{\gamma}_m^\dagger(k), \hat{\gamma}_n(k')\} = 2\delta_{mn}\delta_{kk'}$  以及  $\hat{\gamma}_m^\dagger(k) = \hat{\gamma}_m(-k)$ 。可以看出只有  $\hat{\gamma}_m(0)$  和  $\hat{\gamma}_m(\pi/q)$  满足 Majorana 费米子算符的定义, 即  $\hat{\gamma}_m^\dagger(0) = \hat{\gamma}_m(0)$ ,  $\hat{\gamma}_m^\dagger(\pi/q) = \hat{\gamma}_m(-\pi/q) = \hat{\gamma}_m(\pi/q)$ 。在新的算符基矢下, 我们可以把哈密顿量重新写成如下形式:

$$\hat{H}_k = \frac{i}{4} \sum_k \sum_{m,n} B_{m,n}(k) \hat{\gamma}_m(-k) \hat{\gamma}_n(k) \quad (3.6)$$

对于  $s = 1, \dots, q$  时,  $B_{2s-1,2s}(k) = -B_{2s,2s-1}(k) = -V_s$ ; 对于  $s = 1, \dots, q-1$  时,  $B_{2s-1,2s+2}(k) = -B_{2s+2,2s-1}(k) = \Delta - t$ ,  $B_{2s,2s+1}(k) = -B_{2s+1,2s}(k) = \Delta + t$ ; 对于  $s = q$ , 有  $B_{1,2q}(k) = -B_{2q,1}^*(k) = -(\Delta + t)e^{-ikq}$ ,  $B_{2,2q-1}(k) = -B_{2q-1,2}^*(k) = -(\Delta - t)e^{-ikq}$ 。  $B(k)$  是一个  $2q \times 2q$  的矩阵, 并且只有  $B(0)$  和  $B(\pi/q)$  是反对称矩阵。系统的  $Z_2$  拓扑不变量可以定义为<sup>[42, 99]</sup>:  $M = \text{sgn}[\text{Pf}(B(0))] \text{sgn}[\text{Pf}(B(\pi/q))]$ , 其中  $\text{sgn}(P)$  表示置换的符号,

$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^N N!} \sum_P \text{sgn}(P) A_{P_1 P_2} \dots A_{P_{2N-1} P_{2N}}$  是反对称矩阵  $A$  的 Pfaffian,  $P$  代表矩阵  $A$  中  $2N$  个元素的置换。当  $M = 1$  时, 对应拓扑平庸相,  $M = -1$  对应拓扑非平庸相, 而拓扑相边界可以由  $M = 0$  来标记。当  $\alpha = 1/2$  时,  $\text{Pf}[B(0)] = \frac{-V^2 \cos^2 \delta}{1 - b^2 \cos^2 \delta} - 4t^2$ ,

$\mathbf{Pf}\left[B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{-V^2 \cos^2 \delta}{1-b^2 \cos^2 \delta} + 4\Delta^2$ 。显然， $\mathbf{Pf}[B(0)] < 0$ ，那么系统的拓扑相边界可以

由  $\mathbf{Pf}\left[B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$  得出，即：

$$\Delta = \frac{V|\cos \delta|}{2\sqrt{1-b^2 \cos^2 \delta}} \quad (3.7)$$

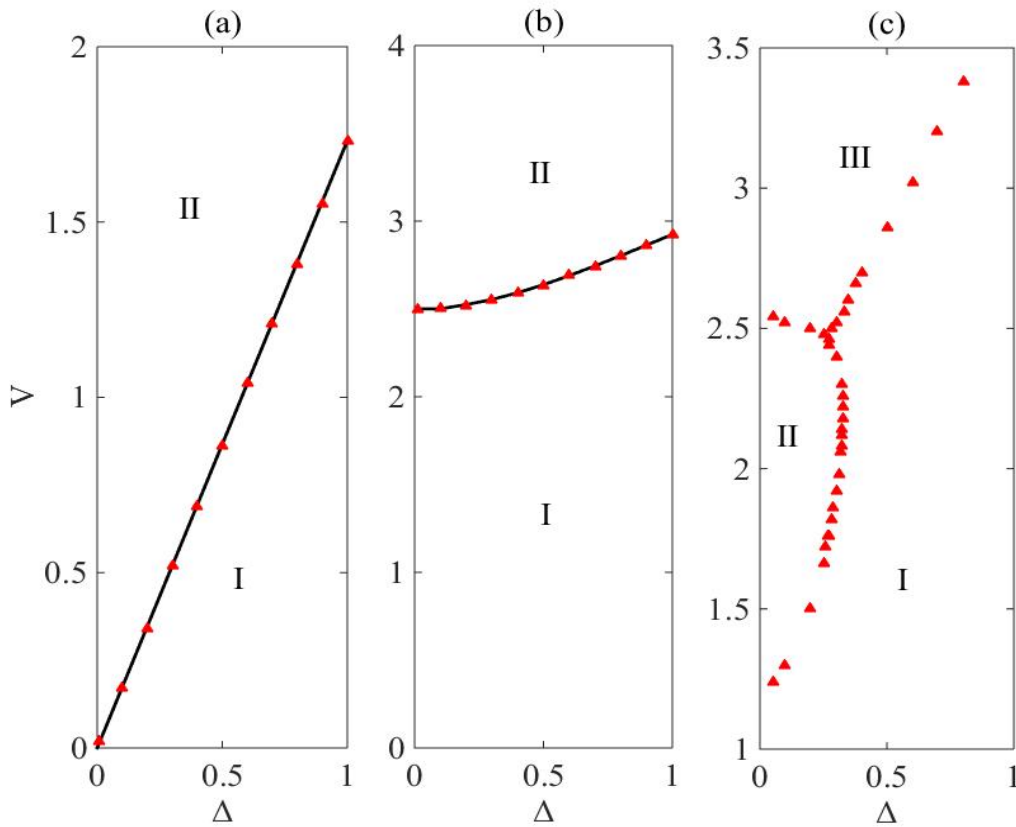


图 3.2 在  $b=0.5$  时，参数  $\Delta-V$  平面的拓扑相图

(a)  $\alpha=1/2$ ,  $L=120$ ; (b)  $\alpha=1/3$ ,  $L=120$ ; (c)  $\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$ ,  $L=2584$ 。

图 3.2(a)展示了  $b=0.5$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\delta=0$  时，系统的拓扑相图。图中的黑色实线对应方程(3.7)所示的解析结果，红色三角形表示的是通过数值求解 BdG 方程(3.4)得到的相变点。我们可以看到数值结果与解析解得到的结果一致。在区域 I，系统处于拓扑非平庸相，区域 II 对应于系统处于拓扑平庸相。我们可以看到，当  $\delta=0$  时，系统会经历拓扑非平庸相到拓扑平庸相的转变。由方程(3.7)可知，当  $\delta$  取值为  $\pi/2$  的奇

数倍时, 任意小的  $\Delta$  将导致系统处于拓扑非平庸相, 而不依赖于周期调制的强度。图 3.3(a)-(c) 展示了  $b=0.5$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\Delta=0.2$ , 不同  $V$  时, 能谱随着相移  $\delta$  变化的情况。在  $V$  较小的时候, 如图 3.3(a) 所示,  $V=0.2$ , 在整个相移参数空间中, Majorana 零模一直存在。随着  $V$  的增大, 能隙逐渐减小, 当它超过某个临界值时, 能隙将在某些  $\delta$  的位置关闭, 随后再次打开, 而此时零模消失 [图 3.3(b),  $V=0.5$ ], 对应于系统从拓扑非平庸相到拓扑平庸相的转变。然而当  $V$  足够大时, 如图 3.3(c),  $V=3$ , 除了在  $\delta=\pi/2$  和  $\delta=3\pi/2$  处 Majorana 零模存在外, 几乎所有的  $\delta$  区域都处于平庸相, 并且无论  $V$  值取多大, 这两点的零模始终存在, 这与我们的解析结果相一致。

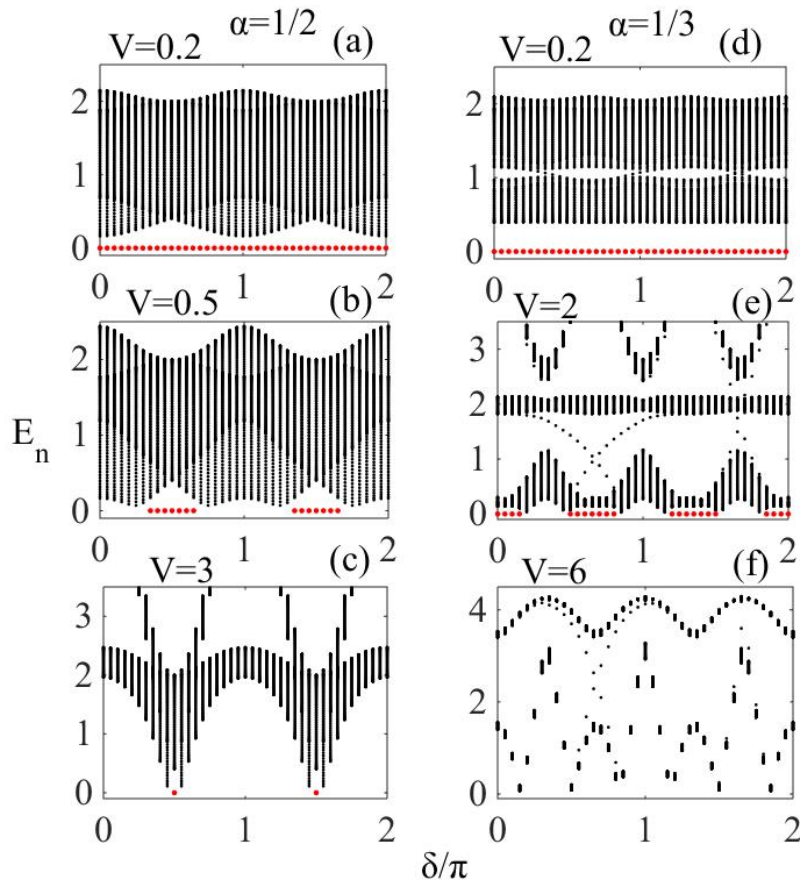


图 3.3 在开边界条件下, 本征能量随相移  $\delta$  的变化

$$b=0.5, \Delta=0.2, L=2584.$$

当  $\alpha=1/3$  时, 我们可以计算  $\text{Pf}[B(0)]$  和  $\text{Pf}\left[B\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ , 由  $M=0$  可以解析的得到

系统的拓扑相边界:

$$\cos(3\delta) = \frac{-2t^2((-4+3b^2)t+3b|V|)+6\Delta^2((4-3b^2)t+b|V|)}{(2bt-|V|)(b^2(3\Delta^2+t^2)+2b|V|t+|V|^2)} \quad (3.8)$$

特别是, 当  $b=0$  时, 相边界可以写为一个简单的表达式<sup>[59]</sup>:  $V^3|\cos 3\delta|=8t(t^2+\Delta^2)$ 。在  $\cos 3\delta=0$  时, 系统始终处于拓扑非平庸相, 并且不依赖于  $V$  的取值。图 3.2(b)展示了  $b=0.5$ ,  $\alpha=1/3$ ,  $\delta=0$  时的拓扑相图。黑色实线为解析结果, 而红色三角为数值结果。由图可知,  $\delta=0$  时, 在某一特定的  $\Delta$  下, 随着周期调制强度  $V$  增强, 系统将出现一个拓扑相变。图 3.3(d)-(f)分别展示了  $b=0.5$ ,  $\alpha=1/3$ ,  $\Delta=0.2$ ,  $V=0.2, 2, 6$  时, 能量以相移  $\delta$  为函数变化的情况。在小  $V$  情况, 系统在不同的  $\delta$  参数下, 始终出现 Majorana 零模[图 3.3(d)], 而随着  $V$  的增加, 拓扑非平庸的区域逐渐减小[图 3.3(e)], 当调制强度足够大时, 拓扑非平庸区域完全消失, 此时系统中并不存在某个特殊的  $\delta$  使得 Majorana 零模一直存在[图 3.3(f)], 这与  $b=0$  的情况不符。我们可以看到, 图 3.3(f)中虽然某些  $\delta$  下最低能量接近于零, 但它并不是 Majorana 零模, 其准粒子的最低能量不低于 0.07。由此可见, 对于  $b \neq 0$ ,  $\alpha$  为有理数的情况, 在某个固定的超导配对强度  $\Delta$  和调制强度  $V$  时, 系统的拓扑相变强烈的依赖于相移  $\delta$ 。然而在某些  $\alpha$  值下, 并不存在与  $b=0$  的情况类似的特殊  $\delta$  值, 使得拓扑相变不依赖于调制强度  $V$ 。

### 3.3.2 准周期调制的 p 波超导线

上一节中我们的结果表明  $b \neq 0$  时, 周期调制的 p 波超导的拓扑性质依赖于  $\alpha$  的取值, 一个有趣的问题是当系统的调制周期趋近于无穷时, 系统的相图将如何变化? 不失一般性, 在这一节中我们固定  $b=0.5$ ,  $\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$ ,  $\delta=0$  作为参数来进行我们的讨论。图 3.2(c)展示了  $b=0.5$ ,  $\delta=0$  时准周期调制的 p 波超导线系统的量子相图, 其中红色三角为数值计算所得的相边界。区域 I 为拓扑非平庸的超导相, 区域 II 为有能隙的平庸超导相, 而区域 III 为无能隙的平庸局域相。当  $0 < \Delta < 0.33$  时, 系统经历 I 相  $\rightarrow$  II 相  $\rightarrow$  III 相的转变; 当  $\Delta > 0.33$  时, 系统经历 I 相  $\rightarrow$  III 相的转变。

为了得到图 3.2(c)中的相图, 我们首先分别计算在开边界和周期性边界条件下, 系统的准粒子最低激发能量, 如图 3.4(a)所示。以  $\Delta=0.2$  为例, 图 3.4(a)展示了最低激发能量  $E_1$  随准周期调制强度  $V$  的变化。图中黑色实线表示周期性边界的情况, 黑色方块表示开边界的情况。当  $V < 1.5$  时, 开边界条件下展示了零能, 而周期边界条件下存在有限的能隙, 这表明在开边界条件下系统中存在零模。在图 3.4(b)和图 3.4(c)

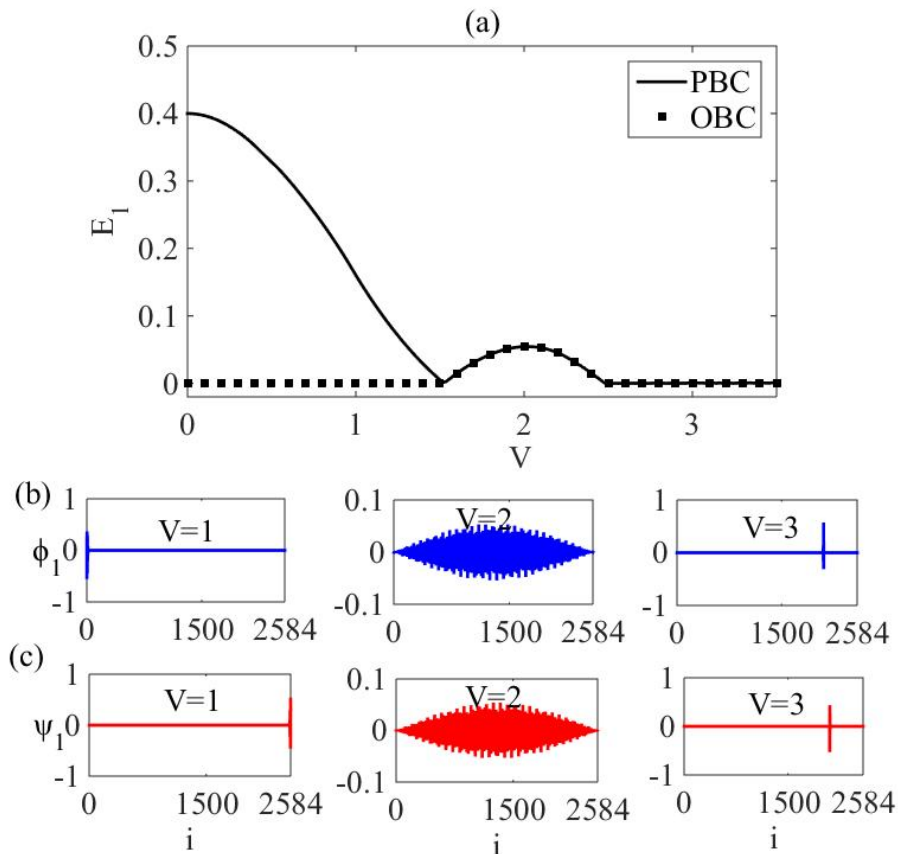


图 3.4 (a)在开边界和周期性边界条件下最低激发态能量  $E_1$  随准周期调制强度  $V$  的变化及其空间

分布  $\phi_1$  (b)和  $\psi_1$  (c)  $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ ,  $b=0.5$ ,  $\Delta=0.2$ ,  $L=2584$ 。

中，我们分别展示了在开边界条件下  $V=1$  时，最低激发态的空间分布  $\phi_1$  和  $\psi_1$ ，这里  $\phi_{1,j} = u_{1,j} + v_{1,j}$ ,  $\psi_{1,j} = u_{1,j} - v_{1,j}$ <sup>[105]</sup>。此时最低激发态  $\phi_1$  和  $\psi_1$  分别位于边界的左右两端， $\phi_1$  和  $\psi_1$  的振幅不会重叠在一起，而是分裂为两个在空间上独立的 Majorana 边缘态，此时系统属于有 Majorana 零模的超导相。当  $1.5 < V < 2.5$  时，开边界和周期边界条件下最低激发态能量大于零，展示了相同的能隙，并没有展示边缘态，并且在开边界条件下最低激发态  $\phi_1$  和  $\psi_1$  的振幅会重叠在一起，且分布在整个空间，此时系统属于超导相[图 3.4(b)，图 3.4(c)， $V=2$ ]。当  $V > 2.5$  时，开边界和周期边界条件下，能隙均消失，其最低激发能量为零。以  $V=3$  为例，其最低激发态  $\phi_1$  和  $\psi_1$  局域在空间某一点上，并不局域在边界位置，表明此区域的零能态不是 Majorana 零模[图 3.4(b)，图 3.4(c)， $V=3$ ]。从准粒子的最低激发能量及其本征态的空间分布我们可以看出对于  $\alpha$  为无理数的情况，系统存在三种不同的相。

为了进一步确定系统中三种不同相的拓扑特性，我们用  $Z_2$  拓扑不变量来表征其

拓扑性质。在非公度势的情况下，我们用散射矩阵  $\mathbf{S}$  来计算  $Z_2$  拓扑不变量<sup>[106, 107]</sup>。散射矩阵  $\mathbf{S}$  与在费米能级  $E_F = 0$  处的入射波和出射波的振幅有关：

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} R & T' \\ T & R' \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

这里， $2 \times 2$  的子块  $R, R'$  和  $T, T'$  分别是在超导线两端的反射和透射矩阵。 $Z_2$  拓扑不变量定义为： $M = \text{sgn}[\text{Det}(R)]$ 。只有当  $M = -1$  时，在超导量子线两端才会出现非平庸的 Majorana 费米子。散射矩阵可以通过转移矩阵方法得到。基于哈密顿量(3.4)，零能的薛定谔方程给出：

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_i \Phi_i \\ \Phi_{i+1} \end{pmatrix} = \tilde{W}_i \begin{pmatrix} \hat{t}_{i-1}^\dagger \Phi_{i-1} \\ \Phi_i \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

其中：

$$\tilde{W}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{t}_i^\dagger \\ -\hat{t}_i^{-1} & -\hat{t}_i^{-1} \hat{\lambda}_i \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$\hat{t}_i = -t\sigma_z + i\Delta\sigma_y$ ， $\hat{\lambda}_i = V_i\sigma_z$ ， $\Phi_i = (u_i, v_i)^T$  是第  $i$  个格点上准粒子的波函数， $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  分别为  $y$  和  $z$  组分的泡利矩阵。在超导量子线两端 ( $i=1$  和  $L$ ) 总的转移矩阵为  $\tilde{W} = \tilde{W}_L \tilde{W}_{L-1} \cdots \tilde{W}_2 \tilde{W}_1$ 。我们通过相似变换，将转移矩阵写在新的基矢下<sup>[108, 109]</sup>：

$$W = U^\dagger \tilde{W} U, U = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

这里  $I$  为  $2 \times 2$  的单位阵。在这个基矢下，透射和反射矩阵的关系为：

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} I \\ R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R' \\ I \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 0 \\ T' \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

拓扑不变量  $M$  就可以通过计算转移矩阵  $W$  得到。如图 3.5(a)所示，我们计算了  $b = 0.5$ ， $\Delta = 0.2$  时，系统的拓扑不变量  $M$  随着调制强度  $V$  变化的情况。从图中可以看出，当  $V < 1.5$  时， $M = -1$  对应于由 Majorana 零模所标记的拓扑非平庸的超导相。而当  $V > 1.5$  时， $M = 1$  对应于拓扑平庸相。由此我们可以确定区域 I 为拓扑非平庸的超导相，而在区域 II 和区域 III 中，系统展现了拓扑平庸的特性。

区域 II 和区域 III 的最低激发态展现了不同的局域化特性，我们通过计算逆参与率 (Inverse participation ratio, IPR)<sup>[110-114]</sup>， $\text{IPR}_n = \sum_{j=1}^L (u_{n,j}^4 + v_{n,j}^4)$ <sup>[60, 108]</sup>，区分系统最低



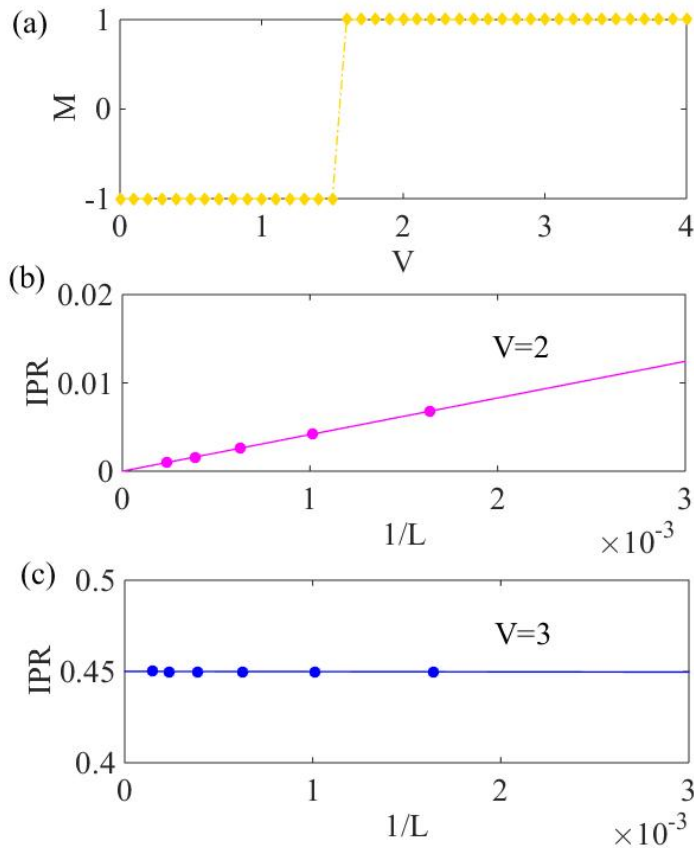


图 3.5 (a)  $Z_2$  拓扑不变量随非公度势强度的变化;

(b)  $V = 2$  时  $\text{IPR}_1$  的标度分析; (c)  $V = 3$  时  $\text{IPR}_1$  的标度分析

$$b = 0.5, \quad \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad \Delta = 0.2, \quad L = 2584.$$

的局域和扩展性质。这里  $n$  是能级指标,  $u_{n,j}$  和  $v_{n,j}$  是 BdG 方程(3.4)的本征态, 满足

归一化条件,  $\sum_{j=1}^L (u_{n,j}^2 + v_{n,j}^2) = 1$ 。对于扩展态, IPR 的值以  $1/L$  趋近零; 而对于局域

态, 其  $\text{IPR} \propto (1/L)^0$  趋于一个有限值。图 3.5(b)和图 3.5(c)分别展示了  $\Delta = 0.2$ ,  $V = 2$

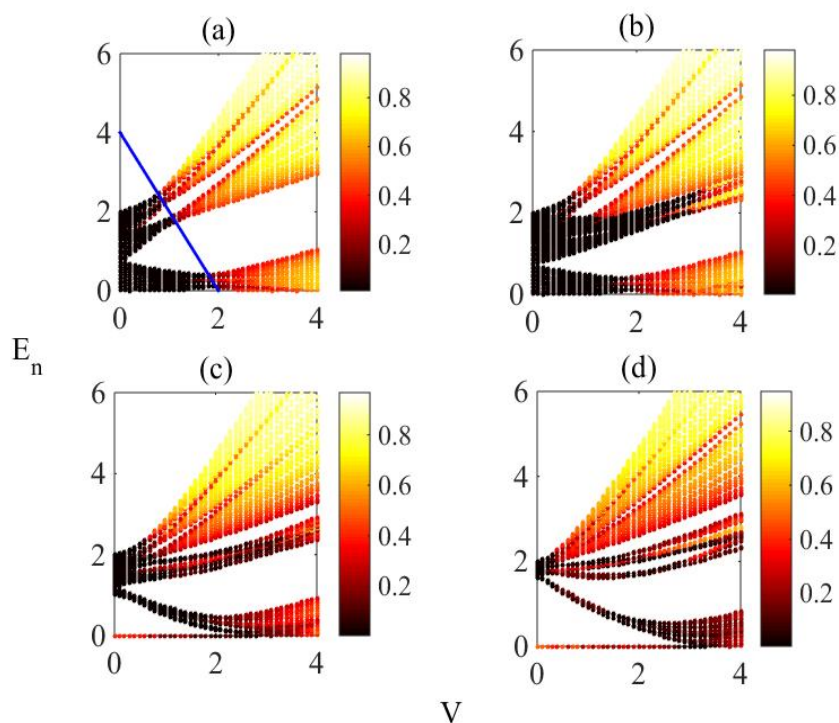
和 3 时, 最低激发态  $\text{IPR}_1$  随着系统尺寸的标度行为。  $V = 3$  时, 最低激发态  $\text{IPR}_1$  不随

尺寸  $L$  的变化而变化, 在  $L$  趋近于无穷时,  $\text{IPR}_1$  的值趋近于 0.45, 表明此时其最低

激发态为局域态。而对于  $V = 2$  的情况, 最低激发态  $\text{IPR}_1$  随着  $1/L$  趋近于 0, 展现扩

展的特性。由此可见, 区域 II 为拓扑平庸的超导相, 而区域 III 对应为拓扑平庸的局

域相。


 图 3.6 IPR 随准周期调制强度  $V$  和本征能量  $E_n$  的变化

(a)  $\Delta = 0$ ; (b)  $\Delta = 0.01$ ; (c)  $\Delta = 0.5$ ; (d)  $\Delta = 0.8$

$$b = 0.5, \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2, L = 144, \delta = 0.$$

当  $\Delta = 0$  时, 系统中存在迁移率边<sup>[102]</sup>, 其解析表达式为:  $E_c = (2t - V)/b$ 。图 3.6(a)展示了  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 144$ ,  $\delta = 0$  和  $\Delta = 0$  时不同能量  $E_n$  的逆参与率随着调制强度  $V$  变化的情况, 其中蓝色实线表示迁移率边的解析解。随着 p 波超导配对势的引入, 即  $\Delta \neq 0$ , 系统中的迁移率边将如何改变? 首先我们考虑  $\Delta \rightarrow 0$  的情况。以  $\Delta = 0.01$  为例[图 3.6(b)], 我们可以看到原来能谱中间趋于展现局域态特性的能态随着微小的超导配对项的引入开始变成扩展态, 而高能 and 低能部分并没有发生显著变化。当  $\Delta$  为有限大时, 如图 3.6(c),  $\Delta = 0.5$  时, 我们可以看到高能部分的局域化特性并没有发生显著的变化, 中能部分局域化趋于扩大, 而低能部分扩展区向局域化区域扩张。随着  $\Delta$  值得进一步增加, 高能和中能部分得局域化区域进一步扩大, 而低能部分的局域化区域不断缩小[图 3.6(d),  $\Delta = 0.8$ ]。由此可见, 由于超导配对项的引入, 迁移率边将无法用一个解析的形式所表示。

### 3.4 小结

本文研究了一维调制的 p 波超导体的拓扑量子相变。在公度势调制下, p 波超导的拓扑性质强烈的依赖于  $\alpha$  和  $\delta$  的取值。当  $b=0$  时, 系统中存在特殊的相移  $\delta$  使得 Majorana 零模的存在不依赖于公度势调制强度  $V$ 。通过计算我们发现当  $b \neq 0$  时, 在公度势调制系统中, 存在特殊相移使得 Majorana 零模不受调制强度影响的结果并不是普适的。在非公度势( $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ )调制下, 我们计算相移  $\delta=0$  时系统的低能激发谱,  $Z_2$  拓扑不变量以及逆参与率(IPR)等, 发现当 p 波配对强度  $0 < \Delta < 0.33$  时, 随着非公度强度  $V$  的增加, 系统将经历从拓扑非平庸超导相到拓扑平庸超导相到拓扑平庸局域相的转变。而当  $\Delta > 0.33$  时, 随着非公度势强度  $V$  的增加, 系统经历拓扑非平庸相到拓扑平庸局域相的转变, 这与  $b=0$  的结果一致。



## 第四章 总结与展望

### 4.1 总结

本文主要研究一维准周期系统中的拓扑量子相变。首先介绍了拓扑绝缘体和拓扑超导体的概念及其性质，并介绍了相应的理论模型，一维 SSH 模型和一维 Kitaev 模型。然后，着重介绍了 Majorana 费米子的性质，Majorana 费米子的反粒子是它自身的特性是拓扑量子计算的重要理论基础。因此，对 Majorana 费米子的研究颇有意义。最后，我们详细介绍了求解一维超导模型中准粒子本征值和本征态的 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程。

紧接着，我们主要介绍了 AA 模型及其性质，这是研究准周期(无序)的经典模型。该模型具有自对偶性，利用该性质可以精确求出扩展态向局域态的转变点。通过引入逆参与率(IPR)可以证明其结论的正确性。该模型中不存在迁移率边。然后介绍了具有迁移率边的类 AA 模型，精确求解了它的迁移率边，并进行了数值验证。最后，介绍了在(类)AA 模型中加入 p 波超导的情况，分析了系统中的拓扑量子相变及其迁移率边。

最后，我们研究了具有参数  $b$  的化学势调制的一维 p 波超导体，在公度势调制下，在特定参数下，系统会经历拓扑非平庸相到拓扑平庸相的转变。在周期性边界条件下，通过求解  $Z_2$  拓扑不变量可以得到它的相变条件。数值结果和解析结果相一致。在非公度势调制下，在一些参数下，系统会经历拓扑非平庸相到拓扑平庸超导相到拓扑平庸局域相的转变；在另一些参数下，统会经历拓扑非平庸相到拓扑平庸局域相的转变。我们可以通过开边界条件下和周期性边界条件下的能谱、 $Z_2$  拓扑不变量、IPR 的值来区分这些相。该模型具有迁移率边。

### 4.2 展望

目前，在(准)周期调制的一维超导链中，随着参数的变化，系统会发生丰富的拓扑量子相变。我们所研究的系统的哈密顿量都不随时间变化。那么，将这样的系统通过周期驱动会发生怎样有趣的变化呢？这是我们下一步想要研究的问题。



## 参考文献

- [1]K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, New method for high-accuracydetermination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance, *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **45**, 494.
- [2]M. Z. Hasan and C. L. Kane, Colloquium: topological insulators, *Rev. Mod. Phys.*, 2010, **82**, 3045.
- [3]X. L. Qi and S. C. Zhang, Topological insulators and superconductors, *Rev. Mod. Phys.*, 2011, **83**, 1057.
- [4]J. E. Moore and L. Balents, Topological invariants of time-reversal-invariant band structures, *Phys. Rev. B*, 2007 **75**, 121306.
- [5]Y. Ando, Topological insulator materials, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 2013, **82**, 102001.
- [6]C. L. Kane and E. J. Mele, Quantum spin hall effect in grapheme, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**, 226801.
- [7]B. A. Bernevig and S. C. Zhang, Quantum spin hall effect, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **96**, 106802.
- [8]M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X. L. Qi and S. C. Zhang, Quantum spin hall insulator state in HgTe quantum wells, *Science*, 2007, **318**, 766.
- [9]X. L. Qi, T. L. Hughes and S. C. Zhang, Topological field theory of time-reversal invariant insulators, *Phys. Rev. B*, 2008, **78**, 195424.
- [10]I. Knez, R. R. Du and G. Sullivan, Evidence for helical edge modes in inverted in As/GaSb quantum wells, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **107**, 136603.
- [11]L. Fu, C. L. Kane and E. J. Mele, Topological insulators in three dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**, 106803.
- [12]J. E. Moore and L. Balents, Topological invariants of time-reversal-invariant band structures, *Phys. Rev. B*, 2007, **75**, 121306.
- [13]R. Roy, Topological phases and the quantum spin hall effect in three dimensions, *Phys. Rev. B*, 2009, **79**, 195322.

- [14]L. Fu and C. L. Kane, Topological insulators with inversion symmetry, *Phys. Rev. B*, 2007, **76**, 045302.
- [15]D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava and M. Z. Hasan, A topological dirac insulator in a quantum spin hall phase, *Nature*, 2008, **452**, 970.
- [16]H. Zhang, C. X. Liu, X. L. Qi, X. Dai, Z. Fang and S. C. Zhang, Topological insulators in Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub>, Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> and Sb<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> with a single dirac cone on the surface, *Nature Phys.*, 2009, **5**, 438.
- [17]Y. Xia, D. Qian, D. Hsieh, L. Wray, A. Pal, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. S. Hor, R. J. Cava and M. Z. Hasan, Observation of a large-gap topological-insulator class with a single dirac cone on the surface, *Nature Phys.*, 2009, **5**, 398.
- [18]Y. L. Chen, J. G. Analytis, J. H. Chu, Z. K. Liu, S. K. Mo, X. L. Qi, H. J. Zhang, D. H. Lu, X. Dai, Z. Fang, S. C. Zhang, I. R. Fisher, Z. Hussain and Z. X. Shen, Experimental realization of a three-dimensional topological insulator: Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub>, *Science*, 2009, **325**, 178.
- [19]M. König, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, T. L. Hughes, C. X. Liu, X. L. Qi and S. C. Zhang, The quantum spin hall effect: theory and experiment, *Phys. Soc. Jpn.*, 2008, **77**, 031007.
- [20]C. L. Kane, An insulator with a twist, *Nature Phys.*, 2008, **4**, 348.
- [21]S. C. Zhang, Viewpoint: Topological states of quantum matter, *Phy.*, 2008, **1**, 6.
- [22]J. E. Moore, The birth of topological insulators, *Nature*, 2010, **464**, 194.
- [23]X. L. Qi and S. C. Zhang, The quantum spin hall effect and topological insulators, *Phys. Today*, 2010, **63**, 33.
- [24]Y. L. Chen, Z. K. Liu, J. G. Analytis, J. H. Chu, H. J. Zhang, B. H. Yan, S. K. Mo, R. G. Moore, D. H. Lu, I. R. Fisher, S. C. Zhang, Z. Hussain and Z. X. Shen, Single dirac cone topological surface state and unusual thermoelectric property of compounds from a new topological insulator family, *Phys. Rev. Lett.*, 2010, **105**, 266401.
- [25]T. Sato, K. Segawa, H. Guo, K. Sugawara, S. Souma, T. Takahashi and Y. Ando, Direct evidence for the dirac-cone topological surface states in the ternary



- chalcogenide TlBiSe<sub>2</sub>, Phys. Rev. Lett., 2010, **105**, 136802.
- [26]J. K. Asbóth, L. Oroszlány and A. Pályi, Topological insulators: band structure and edge states in one and two dimensions, Lecture Notes in Physics, Springer, 2016, **919**, 1-22.
- [27]W. P. Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, Soliton excitations in polyacetylene, Phys. Rev. B, 1979, **22**, 1980.
- [28]Q. M. Liu, Single-polaron properties in the one-dimensional holstein and ssh models, Phys. Lett. A, 2012, **376**, 1219.
- [29]D. J. Rizzo, G. Veber, T. Cao, C. Bronner, T. Chen, F. Z. Zhao, H. Rodriguez, S. G. Louie, M. F. Crommie and F. R. Fischer, Topological band engineering of graphene nanoribbons, Nature, 2018, **560**, 204.
- [30]O. Gröning, S. Wang, X. Yao, C. A. Pignedoli, G. B. Barin, C. Daniels, A. Cupo, V. Meunier, X. Feng, A. Narita, K. Müllen, P. Ruffieux and R. Fasel, Engineering of robust topological quantum phases in graphene nanoribbons, Nature, 2018, **560**, 209.
- [31]J. Zak, Berry's phase for energy bands in solids, Phys. Rev. Lett., 1989, **62**, 2747.
- [32]C. H. Yin, H. Jiang, L. H. Li, R. Lü and S. Chen, Geometrical meaning of winding number and its characterization of topological phases in one-dimensional chiral non-hermitian systems, Phys. Rev. A, 2018, **97**, 052115.
- [33]X. L. Qi, T. L. Hughes, S. Raghu and S. C. Zhang, Time-reversal-invariant topological superconductors and superfluids in two and three dimensions, Phys. Rev. Lett., 2009, **102**, 187001.
- [34]L. Fu and E. Berg, Odd-parity topological superconductors: theory and application to CuxBi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub>, Phys. Rev. Lett., 2010, **105**, 097001.
- [35]A. Cook and M. Franz, Majorana fermions in a topological-insulator nanowire proximity-coupled to an s-wave superconductor, Phys. Rev. B, 2011, **84**, 201105.
- [36]S. Deng, L. Viola and G. Ortiz, Majorana modes in time-reversal invariant s-wave topological superconductors, Phys. Rev. Lett., 2012, **108**, 036803.
- [37]G. Palumbo and J. K. Pachos. Holographic correspondence in topological superconductors, Ann. of Phys., 2016, **372**, 175.

- [38]D. Schmeltzer and A. Saxena, Detecting majorana fermions in topological superconductors using stress, *Ann. of Phys.*, 2017, **385**, 546.
- [39]F. Kazuo and T. Anca, Majorana neutrino as bogoliubov quasiparticle, *Phys. Lett. B*, 2017, **774**, 273.
- [40]E. Majorana, Teoria simmetrica dell' elettrone e del positrone, *Nuovo Cimento*, 1937, **5**, 171.
- [41]S. R. Elliott and M. Franz, Colloquium: majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Rev. of Mod. Phys.*, 2015, **87** 137.
- [42]A. Y. Kitaev, Unpaired majorana fermions in quantum wires, *Phys. Usp.*, 2001, **44**, 131.
- [43]V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers and L. P. Kouwenhoven, Supercurrent reversal in quantum dots, *Science*, 2012, **336**, 1003.
- [44]S. D. Sarma, M. Freedman and C. Nayak, Majorana zero modes and topological quantum computation, *Sci. Rep.*, 2015, **5**, 8880.
- [45]S.G. Cheng, J. Liu, H. W. Liu, H. Jiang, Q. F. Sun and X. C. Xie, Majorana zero modes by engineering topological kink states in two dimensional electron gas, *arXiv:1908.07692v2*.
- [46]C. Chen, Q. Liu, T. Z. Zhang, D. Li, P. P. Shen, X. L. Dong, Z.-X. Zhao, T. Zhang and D. L. Feng, Quantized conductance of majorana zero mode in the vortex of the topological superconductor (Li<sub>0.84</sub>Fe<sub>0.16</sub>) OHFeSe, *arXiv: 1904.04623v1*.
- [47]J. X. Zhu. Bogoliubov-de Gennes method and its applications. *Lecture Notes in Physics*, Springer, 2016, **924**, 3-45.
- [48]P. G. d. Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, New York: Benjamin, 1966, 247-267.
- [49]E. Lieb, T. Schultz and D. Mattis, Two soluble models of an antiferromagnetic chain, *Ann. Phys.*, 1961, **16**, 407.
- [50]P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 1492.
- [51]R. Balian and C. Bloch, Errata: distribution of eigenfrequencies for the wave equation

- in a finite domain, *Ann. Phys.*, 1971, **64**, 271.
- [52]F. Herbut, Comment on Localization and the mobility edge in one-dimensional potentials with correlated disorder, *Phys.*, 2000, **82**, 4062.
- [53]J. Major, Extended states in disordered one-dimensional systems in the presence of the generalized N-mer correlations, *Phys. Rev. A*, 2016, **94**, 053613.
- [54]F. L. Liu, S. Ghosh and Y. D. Chong, Localization and adiabatic pumping in a generalized Aubry-André-Harper model, *Phys. Rev. B*, 2015, **91**, 014108.
- [55]J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser and J. C. Garreau, Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **101**, 255702.
- [56]S. Aubry and G. André, Analyticity breaking and anderson localization in incommensurate lattice, *Israel Phys. Soc.*, 1980, **3**, 18.
- [57]M. Wilkinson, Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1984, **391**, 305.
- [58]J. Biddle and S. D. Sarma, Predicted mobility edges in one-dimensional incommensurate optical lattices: an exactly solvable model of anderson localization, *Phys. Rev. Lett.*, 2010, **104**, 070601.
- [59]S. Ganeshan, J. H. Pixley and S. Das Sarma, Nearest neighbor tight binding models with an exact mobility edge in one dimension, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, **114**, 146601.
- [60]L. J. Lang and S. Chen, Majorana fermions in density-modulated  $p$ -wave superconducting wires, *Phys. Rev. B.*, 2012, **86**, 205135.
- [61]X. M. Cai, L. J. Lang, S. Chen and Y. P. Wang, Topological superconductor to anderson localization transition in one-dimensional incommensurate lattices, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**, 176403.
- [62]刘通, 高先龙, 具有  $p$  波超流的一维非公度晶格中迁移率边研究, *物理学报*, 2016, **65**, 117101.
- [63]T. Liu, H. Y. Yan, H. Guo, Fate of topological states and mobility edges in one-dimensional slowly varying incommensurate potentials, *Phys. Rev. B*, 2017, **96**, 174207.

- [64]J. Alicea, New directions in the pursuit of majorana fermions in solid state systems, Rep. Prog. Phys., 2012, **75**, 076501.
- [65]C. W. J. Beenakker, Search for majorana fermions in superconductors, Ann. Rev. Con. Mat. Phys., 2013, **4**, 113.
- [66]F. Wilczek, Majorana returns, Nat. Phys., 2009, **5**, 614.
- [67]V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers and L. P. Kouwenhoven, Signatures of majorana fermions in hybridsuperconductor-semiconductor nanowire devices, Science, 2012, **336**, 1003.
- [68]J. Chen, P. Yu, J. Stenger, M. Hocevar, D. Car, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, T. D. Stanescu and S. M. Frolov, Experimental phase diagram of zero-bias conductance peaks in superconductor/semiconductor nanowire devices, Sci. Adv., 2017, **3**, e1701476.
- [69]S. M. Albrecht, A. P. Higginbotham, M. Madsen, F. Kuemmeth, T. S. Jespersen, J. Nygard, P. Krogstrup and C. M. Marcus, Exponential protection of zero modes in majorana islands, Nature, 2016, **531**, 206.
- [70]M. T. Deng, S. Vaitiekenas, E. B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygard, P. Krogstrup and C. M. Marcus, Majorana bound state in a coupled quantum-dot hybrid-nanowire system, Science, 2016, **354**, 1557.
- [71]H. Zhang, C. X. Liu, S. Gazibegovic, D. Xu, J. A. Logan, G. Z. Wang, N. L. van, J. D. S. Bommer, M. W. A. d. Moor, D. Car, R. L. M. O. H. Veld, P. J. Veldhoven, S. Koelling, M. A. Verheijen, M. Pendharkar, D. J. Pennachio, B. Shojaei, J. S. Lee, E. P. A. M. Bakkers, S. D. Sarma and L. P. Kouwenhoven, Quantized majorana conductance, Nature, 2018, **556**, 74.
- [72]S. N. Perge, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig and A. Yazdani, Proposal for realizing majorana fermions in chains of magnetic atoms on a superconductor, Phys. Rev. B, 2013, **88**, 020407.
- [73]S. N. Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig and A. Yazdani, Observation of majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor, Science, 2014, **346**, 602.

- [74]S. Jeon, Y. L. Xie, J. Li, Z. J. Wang, B. A. Bernevig and A. Yazdani, Distinguishing a majorana zero mode using spin-resolved measurements, *Science*, 2017, **358**, 772.
- [75]M. Hell, M. Leijnse and K. Flensberg, Two-dimensional platform for networks of Majorana bound states, *Phys. Rev. Lett.*, 2017, **118**, 107701.
- [76]F. Pientka, A. Keselman, E. Berg, A. Yacoby, A. Stern and B. I. Halperin, Topological superconductivity in a planar josephson junction, *Phys. Rev. X*, 2017, **7**, 021032.
- [77]A. Fornieri, A. M. Whiticar, F. Setiawan, E. P. Marin, C. C. D. Asbjorn, A. Keselman, S. Gronin, C. Thomas, T. Wang, R. Kallaher, G. C. Gardner, E. Berg, M. J. Manfra, A. Stern, C. M. Marcus and F. Nichele, Evidence of topological superconductivity in planar josephson junctions, *Nature*, 2019, **569**, 89.
- [78]H. H. Sun, K.W. Zhang, L. H. Hu, C. Li, G. Y. Wang, H. Y. Ma, Z. A. Xu, C. L. Gao, D. D. Guan, Y. Y. Li, C. H. Liu, D. Qian, Y. Zhou, L. Fu, S. C. Li, F. C. Zhang and J. F. Jia, Majorana zero mode detected with spin selective andreev reflection in the vortex of a topological superconductor, *Phys. Rev. Lett.*, 2016, **116**, 257003.
- [79]L. Fu and C. L. Kane, Superconducting proximity effect and majorana fermions at the surface of a topological insulator, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 096407.
- [80]D. A. Ivanov, Non-abelian statistics of half-quantum vortices in p-wave superconductors, *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**, 268.
- [81]S. L. Zhu, L. B. Shao, Z. D. Wang and L. M. Duan, Probing non-Abelian statistics of majorana fermions in ultracold atomic superfluid, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 100404.
- [82]N. H. Lindner, E. Berg, G. Refael and A. Stern, Fractionalizing majorana fermions: non-abelian statistics on the edges of abelian quantum hall states, *Phys. Rev. X*, 2012, **2**, 041002.
- [83]C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman and S. D. Sarma, Non-abelian anyons and topological quantum computation, *Rev. Mod. Phys.*, 2008, **80**, 1083.
- [84]L. Jiang, T. Kitagawa, J. Alicea, A. R. Akhmerov, D. Pekker, G. Refael, J. I. Cirac, E. Demler, M. D. Lukin and P. Zoller, Majorana fermions in equilibrium and in driven

- cold-atom quantum wires, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 220402.
- [85]H. Hubener, M. A. Sentef, U. D. Giovannini, A. F. Kemper and A. Rubio, Creating stable floquet–weyl semimetals by laser-driving of 3D dirac materials, *Nat. Commun.*, 2017, **8**, 13940.
- [86]Q. Cheng, Y. Pan, H. Wang, C. Zhang, D. Yu, A. Gover, H. Zhang, T. Li, L. Zhou and S. Zhu, Observation of anomalous  $\pi$  modes in photonic floquet engineering, *Phys. Rev. Lett.*, 2019, **122**, 173901.
- [87]T. Cadez, R. Mondaini and P. D. Sacramento, Edge and bulk localization of floquet topological superconductors, *Phys. Rev. B*, 2019, **99**, 014301.
- [88]H. Y. Wang, L. Zhuang and W. M. Liu, Majorana edge modes of kitaev chain with multiple time periodic driving, arXiv: 1910. 10911.
- [89]K. Takata and M. Notomi, Photonic topological insulating phase induced solely by gain and loss, *Phys. Rev. Lett.*, 2018, **121**, 213902.
- [90]L. Zhou, Non-hermitian floquet topological superconductors with multiple majorana edge modes, arXiv: 1911. 11978.
- [91]Q. B. Zeng, Y. B. Yang and Y. Xu, Topological non-hermitian quasicrystals, arXiv: 1901. 08060.
- [92]N. Okuma and M. Sato, Topological phase transition driven by infinitesimal instability: Majorana fermions in non-hermitian spintronics, *Phys. Rev. Lett.*, 2019, **123**, 097701.
- [93]M. Ezawa, Braiding of majorana-like corner states in electric circuits and its non-hermitian generalization, *Phys. Rev. B*, 2019, **100**, 045407.
- [94]Y. J. Wu, H. W. Liu, J. Liu, H. Jiang and X. C. Xie, Double-frequency aharonov-bohm effect and non-abelian braiding properties of jackiw-rebbi zero-mode, arXiv: 1901. 03138.
- [95]C. S. Amorim, K. Ebihara, A. Yamakage, Y. Tanaka and M. Sato, Majorana braiding dynamics in nanowires, *Phys. Rev. B*, 2015, **91**, 174305.

- [96]C. Z. Chen, Y. M. Xie, J. Liu, P. A. Lee and K. T. Law, Quasi-one-dimensional quantum anomalous hall systems as new platforms for scalable topological quantum computation, *Phys. Rev. B*, 2018, **97**, 104504.
- [97]S. S. Hegde and S. Vishveshwara, Majorana wave-function oscillations, fermion parity switches, and disorder in kitaev chains, *Phys. Rev. Lett.*, 2016, **94**, 115166.
- [98]W. DeGottardi, M. Thakurathi, S. Vishveshwara and D. Sen, Majorana fermions in superconducting wires: effects of long-range hopping, broken time-reversal symmetry, and potential landscapes, *Phys. Rev. B*, 2013, **88**, 165111.
- [99]R. Wakatsuki, M. Ezawa, Y. Tanaka and N. Nagaosa, Fermion fractionalization to majorana fermions in a dimerized kitaev superconductor, *Phys. Rev. B*, 2014, **90**, 014505.
- [100]L. J. Lang, X. M. Cai and S. Chen, Edge states and topological phases in one-dimensional optical superlattices, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **108**, 220401.
- [101]S. Aubry and G. Andre, Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, *Ann. Isr. Phys. Soc.*, 1980, **3**, 133.
- [102]A. Sen, K. Damle and R. Moessner, Vacancy-induced spin textures and their interactions in a classical spin liquid, *Phys. Rev. B*, 2012, **86**, 205134.
- [103]Y. E. Kraus, Y. Lahini, Z. Ringel, M. Verbin and O. Zilberberg, Topological states and adiabatic pumping in quasicrystals, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **109**, 106402.
- [104]D. R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev. B*, 1976, **14**, 2239.
- [105]B. Zhou and S. Q. Shen, Energy levels and wave functions of bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev. B*, 2011, **84**, 054532.
- [106]A. R. Akhmerov, J. P. Dahlhaus, F. Hassler, M. Wimmer and C. W. J. Beenakker, Quantized conductance at the majorana phase transition in a disordered superconducting wire, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 057001.
- [107]I. C. Fulga, F. Hassler, A. R. Akhmerov and C. W. J. Beenakker, Scattering formula for the topological quantum number of a disordered multimode wire, *Phys. Rev. B*, 2011, **83**, 155429.

- [108]I. Snyma, J. Tworzydło and C. W. J. Beenakker, Calculation of the conductance of a graphene sheet using the chalker-coddington network model, *Phys. Rev. B*, 2008, **78**, 045118.
- [109]T. P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov and C. W. J. Beenakker, Majorana fermions emerging from magnetic nanoparticles on a superconductor without spin-orbit coupling, *Phys. Rev. B*, 2011, **84**, 195442.
- [110]D. J. Thouless, Electrons in disordered systems and the theory of localization, *Phys. Rep.*, 1974, **13**, 93.
- [111]M. Kohmoto, Metal-insulator transition and scaling for incommensurate systems, *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **51**, 1198.
- [112]M. Schreiber, Numerical evidence for power-law localisation in weakly disordered systems, *J. Phys. C*, 1985, **18**, 2493.
- [113]Y. Hashimoto, K. Niizeki and Y. Okabe, A finite-size scaling analysis of the localization properties of one-dimensional quasiperiodic systems, *J. Phys. A*, 1992, **25**, 5211.
- [114]G. L. Ingolda, A. Wobst, C. Aulbach and P. Hanggi, Delocalization and hisenberg's uncertainty relation, *Eur. Phys. J. B*, 2002, **30**, 175.



## 攻读学位期间取得的研究成果及参与科研的项目

武璟楠, 徐志浩, 陆展鹏, 张云波, 一维化学势调制的p波超导体中的拓扑量子相变, 物理学报, 2020, **69**(7), 070302.



## 致 谢

在论文即将完成之际，标志着我在山西大学理论物理研究所学习生涯的结束。研究生三年的时光转瞬即逝，但三年时光中所学到的知识会使我受益终生，如今要离开母校，更觉得不舍与感激。在这三年求学期间，我的导师徐志浩老师在学习上给予了我很多帮助，总是耐心而又细致的帮我解决问题 而且本论文的完成，徐老师功不可没，无论是从论文框架的设计，还是修改定稿，徐老师都始终给予我细心的指导。在此，我特向徐老师表示衷心的感谢和崇高的敬意！感谢您对我的指导和培养！

与此同时，我还要感谢张云波老师，张老师对待科研以及每一件事的认真令我很动容。张老师在组会上认真的聆听每一个人的报告，认真的提出每一个问题，总是可以关注到被我们忽略的问题，为我们的研究提供了很大的帮助。感谢您！

我还要感谢帮助过我的所有老师和同学们！无论在学习还是生活上，你们都给予了我很大的帮助。我很开心能够与你们一起度过这三年美好的研究生时光。同时，我还要感谢给我们上课的所有老师们，是你们不辞辛劳的教授我们知识，我们能够更好的进行科研工作。感谢你们！

最后，我要感谢养育我长大的父母，是您们不辞辛苦的劳动让我可以无忧无虑徜徉在知识的海洋中。感谢您们为我付出的汗水与努力。我会更加努力来报答您们对我的养育之恩！

感谢参与阅读和答辩的各位评审专家和教授。

武璟楠

2020年3月于山西大学理论物理研究所



## 个人简况及联系方式

姓名：武璟楠

性别：女

籍贯：山西省晋中市祁县

学习经历：2017年9月至2020年6月在山西大学理论物理研究所攻读硕士学位



## 承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：武焱楠

2020年5月26日





## 学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：武禄楠

导师签名：徐岩皓

2020年5月26日